

Семинар 2

доцент Волков Н.П.

Занятие 2.

Скалярное произведение векторов

Определение 1. Скалярным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется число:

$$(\vec{a}, \vec{b}) \equiv \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle \vec{a}, \vec{b}) \quad (*)$$

Утверждение 1. \forall векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ справедливы свойства

а) геометрические:

$$1^\circ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a}$$

$$2^\circ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$3^\circ \vec{a} \cdot \vec{b} > 0 (< 0) \Leftrightarrow \text{угол } (\angle \vec{a}, \vec{b}) \text{ острый (тупой)}$$

б) алгебраические:

$$1^\circ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$2^\circ (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$3^\circ (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$4^\circ \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0, \text{ причем } \vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

Утверждение 2. Если в ОНБ $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

$$\vec{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad \vec{b} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}, \quad \text{то}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 \quad (**)$$

$$795) \vec{a}, \vec{b}: (\vec{a}, \vec{b}) = \varphi = \frac{2}{3}\pi, |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4.$$

$$1) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi = 3 \cdot 4 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \boxed{-6}$$

$$3) \vec{b}^2 = \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 = \boxed{16}$$

$$5) (3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = 3\vec{a} \cdot \vec{a} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{a} - 4\vec{b} \cdot \vec{b} = 3|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} - 4|\vec{b}|^2 = 27 + 4(-6) - 4 \cdot 16 = 27 - 24 - 64 = \boxed{-61}$$

$$797) \forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$$

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \\ &+ \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \\ &+ |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) \end{aligned}$$

Теорема Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

800 | $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} : |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ и

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}. (*)$$

Найти $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = ?$

Решение. Умножим скалярно (*)

на \vec{a} , потом на \vec{b} , потом на \vec{c} .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{c} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{b}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

802 | $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} : (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ, (\vec{b}, \vec{c}) = 60^\circ,$
 $(\vec{a}, \vec{c}) = 60^\circ; |\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 6$

Найти $|\vec{p}| = |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$

Решение $|\vec{p}|^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) =$
 $= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} +$
 $+ \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 +$
 $+ 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a} = 16 + 4 + 36 +$
 $+ 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 56 +$
 $+ 8 + 12 + 24 = 100 \Rightarrow |\vec{p}| = \boxed{10}$

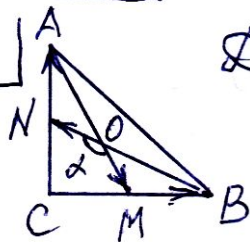
805] Доказать, что вектор $\vec{p} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \perp \vec{a}$?

Док-во: $\vec{p} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \vec{p} \cdot \vec{a} = 0$

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{a} &= (\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})) \cdot \vec{a} = \\ &= \underbrace{(\vec{b} \cdot \vec{a})(\vec{a} \cdot \vec{c})} - \underbrace{(\vec{c} \cdot \vec{a})(\vec{a} \cdot \vec{b})} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p} \perp \vec{a}}$$

809]



Дано: $\triangle ABC$ - равнобедренный
прямоугольный

$$\angle ACB = \frac{\pi}{2}$$

$AC = BC$; AM, BN - медианы

Найти угол $\alpha = \widehat{NOM}$

Обозначим $\vec{AM} = \vec{x}$, $\vec{BN} = \vec{y}$, $\vec{CA} = \vec{a}$, $\vec{CB} = \vec{b}$

$$\text{Тогда } \vec{x} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}, \quad \vec{y} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}$$

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{y} &= \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{b} - \\ &- \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) = \overset{0}{-} |\vec{a}|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{x}|^2 &= \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right)^2 = \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a}^2 = \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 \\ &= \frac{5}{4}|\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{x}| = \frac{\sqrt{5}}{2}|\vec{a}| = |\vec{y}| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{-|\vec{a}|^2}{\frac{5}{4}|\vec{a}|^2} = -\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

816] Даны силы: $\vec{M} = \{3; -4; 2\}$, $\vec{N} = \{2; 3; -5\}$
и $\vec{P} = \{-3; -2; 4\}$. $\Rightarrow \vec{F}$ — равнодействующая сила
Найти работу A силы \vec{F} , двигающейся
из точки $M_1(5; 3; -7)$ в точку $M_2(4; -1; -4)$

Решение $\vec{F} = \vec{M} + \vec{N} + \vec{P} = \{2; -3; 1\}$

$$\vec{M}_1\vec{M}_2 = \{-1; -4; 3\}$$

$$\Rightarrow A = \vec{F} \cdot \vec{M}_1\vec{M}_2 = -2 + 12 + 3 = 13$$

818] $\vec{a} = \alpha \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$
 $\alpha = ?$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$.

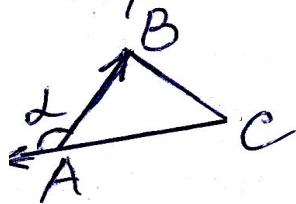
Решение

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (\alpha \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}) \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}) = \\ &= \alpha \vec{i} \cdot \vec{i} + 2\alpha \vec{i} \cdot \vec{j} - \alpha^2 \vec{i} \cdot \vec{k} - 3\vec{j} \cdot \vec{i} - 6\vec{j} \cdot \vec{j} + 3\alpha \vec{j} \cdot \vec{k} + \\ &+ 2\vec{k} \cdot \vec{i} + 4\vec{k} \cdot \vec{j} - 2\alpha \vec{k} \cdot \vec{k} = \alpha - 6 - 2\alpha \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -6 - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -6$$

821] $A(3; 2; -3), B(5; 1; -1), C(1; -2; 1)$ -
 - вершины треугольника ABC.



$\alpha = ?$

Решение

$$\cos \alpha = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{AB}}{|\vec{CA}| |\vec{AB}|}$$

$$\vec{AB} = \{2; -1; 2\}, \vec{CA} = \{2; 4; -4\}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CA} = 4 - 4 - 8 = -8$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3, |\vec{CA}| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$$

$$\cos \alpha = \frac{-8}{3 \cdot 6} = -\frac{4}{9}$$

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{4}{9}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{4}{9}\right)$$

825] $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5\vec{k}$

$\vec{x} \perp \vec{a}, \vec{x} \perp \vec{b} \quad (\vec{x}, \vec{j}) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), |\vec{x}| = 14$

$\vec{x} = ?$

Решение Пусть $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \quad (*) \\ 18x_1 - 22x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}, \vec{x} \cdot \vec{j} < 0 \Rightarrow x_2 < 0$$

$$|\vec{x}| = 14 \Rightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 14$$

Рассмотрим систему (*)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 18x_1 - 22x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \begin{array}{l} -6 \\ + \end{array} \Rightarrow -34x_2 - 17x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_3 = -2x_2 \Rightarrow \text{Из } 1^{\text{о}} \text{о ур-ция}$$

$$\Rightarrow 3x_1 + 2x_2 - 4x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}x_2$$

Тогда из $|\vec{x}| = 14$ следует

$$\frac{4}{9}x_2^2 + x_2^2 + 4x_2^2 = 196$$

$$\Rightarrow \frac{49}{9}x_2^2 = 196 \Rightarrow x_2^2 = 36 \Rightarrow x_2 = \pm 6$$

$$\text{Из } x_2 < 0 \Rightarrow x_2 = -6$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{x} = \{-4; -6; 12\}}$$

$$\underline{830} \quad \vec{S} = \{\sqrt{2}; -3; -5\}$$

$$\vec{e} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} : \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \gamma = \frac{1}{2}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + \cos^2 \beta + \frac{1}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 \beta = \frac{1}{4} \quad \cos \beta = \frac{1}{2}$$

$$\vec{e} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\} \Rightarrow |\vec{e}| = 1$$

$$\text{Пр } \vec{e} \vec{S} \stackrel{(1,0)}{=} \frac{\vec{e} \cdot \vec{S}}{|\vec{e}|} = \vec{e} \cdot \vec{S} = 1 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = \boxed{-3}$$

$$833) \vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}, \vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}, \vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$$
$$\text{Пр}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = ?$$

Решение $\vec{a} + \vec{b} = \{4; -2; -6\}$

$$\text{Из 1, a)} \Rightarrow \text{Пр}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 12 + 8 - 72 = -52$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$\text{Пр}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{-52}{13} = \boxed{-4}$$

$$837) M(-5; 7; -6) \text{ и } N(7; -9; 9)$$

$$\vec{a} = \{1; -3; 1\}. \text{ Найдти } \text{Пр}_{\vec{MN}} \vec{a} = ?$$

Решение $\vec{MN} = \{12; -16; 15\}$

$$|\vec{MN}| = \sqrt{144 + 256 + 225} = \sqrt{625} = 25$$

$$(\vec{a}, \vec{MN}) = 12 + 48 + 15 = 75$$

$$\text{Пр}_{\vec{MN}} \vec{a} = \frac{\vec{MN} \cdot \vec{a}}{|\vec{MN}|} = \frac{75}{25} = \boxed{3}$$

Дома: К. 795(2, 4, 7), 796, 801, 804, 812,
815, 818, 820, 829, 834, 838