Семинар 2

доцент Волков Н.П.

Занятие 2.

Скалярное произведение векторов

Определение 1. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число:

$$(a,b) \equiv \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) \qquad (*)$$

Утверждение 1. $\forall$ векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ справедливы свойства

а) геометрические:

1° $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot Пр_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cdot Пр_{\vec{b}}\vec{a}$

2° $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

3° $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0\ (<0) \Leftrightarrow$ угол $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ острый (тупой)

б) алгебраические:

1° $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

2° $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$

3° $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) \quad \forall\lambda\in R$

4° $\vec{a}\cdot\vec{a} \geqslant 0$, причем $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Утверждение 2. Если в ОНБ $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ $\vec{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\vec{b} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 \qquad (**)$$

795 $\vec{a}, \vec{b}$: $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \varphi = \frac{2}{3}\pi$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$.

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi = 3\cdot4\cdot\cos\frac{2\pi}{3} = 12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) =$
$= \boxed{-6}$

3) $\vec{b}^2 = \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|^2 = \boxed{16}$

5) $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b}) = 3\vec{a}\cdot\vec{a} + 6\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{b}\cdot\vec{a} -$
$- 4\vec{b}\cdot\vec{b} = 3|\vec{a}|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} - 4|\vec{b}|^2 = 27 +$
$+ 4(-6) - 4\cdot16 = 27 - 24 - 64 = \boxed{-61}$

797 $\forall\, \vec{a}, \vec{b} \in V$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$

$(\vec{a}+\vec{b})^2 + (\vec{a}-\vec{b})^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) + (\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} +$
$+ \vec{b}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} +$
$+ |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$

Теорема Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

800 | $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}: |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ и

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. (*)

Найти $\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a} = ?$

Решение. Умножим скалярно (*) на $\vec{a}$, потом на $\vec{b}$, потом на $\vec{c}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{a} = 0 \quad + \\ \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} + \vec{c}\cdot\vec{b} = 0 \quad + \\ \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{c} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{c}\cdot\vec{a} + |\vec{b}|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}) + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

802 | $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}: (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°, (\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = 60°,$

$(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = 60°; |\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 6$

Найти $|\vec{p}| = |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$

Решение $|\vec{p}|^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) =$

$= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} +$

$+ \vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{b} + \vec{c}\cdot\vec{c} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 +$

$+ 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{c}\cdot\vec{a} = 16 + 4 + 36 +$

$+ 2\cdot4\cdot2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot2\cdot6\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot4\cdot6\cdot\frac{1}{2} = 56 +$

$+ 8 + 12 + 24 = 100 \Rightarrow |\vec{p}| = \boxed{10}$

805 Доказать, что вектор
$\vec{p} = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}) \perp \vec{a}$?

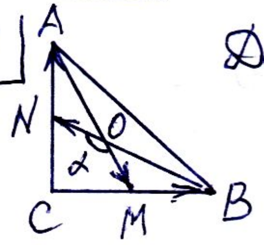
Док-во: $\vec{p} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \vec{p}\cdot\vec{a} = 0$

$\vec{p}\cdot\vec{a} = (\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}))\cdot\vec{a} =$

$= (\vec{b}\cdot\vec{a})(\vec{a}\cdot\vec{c}) - (\vec{c}\cdot\vec{a})(\vec{a}\cdot\vec{b}) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\vec{p} \perp \vec{a}}$.

809



Дано: $\triangle ABC$ - равнобедренный прямоугольный

$\angle ACB = \frac{\pi}{2}$

$AC = BC$; AM, BN - медианы

Найти угол $\alpha = \widehat{NOM}$

Обозначим $\vec{AM} = \vec{x}$, $\vec{BN} = \vec{y}$, $\vec{CA} = \vec{a}$, $\vec{CB} = \vec{b}$

Тогда $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$, $\vec{y} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$

$\vec{x}\cdot\vec{y} = |\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}$

$\vec{x}\cdot\vec{y} = (\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a})(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{4}\underset{0}{\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}} - \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{b} -$

$- \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{a} + \underset{0}{\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}} = -\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) = -|\vec{a}|^2$

$|\vec{x}|^2 = (\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a})^2 = \frac{1}{4}\vec{b}^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}^2 = \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2$

$= \frac{5}{4}|\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{x}| = \frac{\sqrt{5}}{2}|\vec{a}| = |\vec{y}|$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-|\vec{a}|^2}{\frac{5}{4}|\vec{a}|^2} = -\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{4}{5}\right)}$$

816) Даны силы: $\vec{M} = \{3; -4; 2\}$, $\vec{N} = \{2; 3; -5\}$ и $\vec{P} = \{-3; -2; 4\}$. $\Rightarrow \vec{F}$ - равнодействующая сила

Найти работу A силы $\vec{F}$, двигающейся из точки $M_1(5; 3; -7)$ в точку $M_2(4; -1; -4)$

Решение

$$\vec{F} = \vec{M} + \vec{N} + \vec{P} = \{2; -3; 1\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{-1; -4; 3\}$$

$$\Rightarrow A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = -2 + 12 + 3 = \boxed{13}$$

818) $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$

$\alpha = ?$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Решение

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

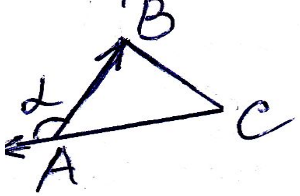
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k})(\vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}) =$$

$$= \alpha\vec{i}\cdot\vec{i} + 2\alpha\vec{i}\cdot\vec{j} - \alpha^2\vec{i}\cdot\vec{k} - 3\vec{j}\cdot\vec{i} - 6\vec{j}\cdot\vec{j} + 3\alpha\vec{j}\cdot\vec{k} +$$

$$+ 2\vec{k}\cdot\vec{i} + 4\vec{k}\cdot\vec{j} - 2\alpha\vec{k}\cdot\vec{k} = \alpha - 6 - 2\alpha$$

$$\Rightarrow -6 - \alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -6}$$

821 $A(3;2;-3)$, $B(5;1;-1)$, $C(1;-2;1)$ – вершины треугольника ABC.



$\alpha = ?$

Решение

$$\cos\alpha = \frac{\vec{CA}\cdot\vec{AB}}{|\vec{CA}||\vec{AB}|}$$

$\vec{AB} = \{2;-1;2\}$, $\vec{CA} = \{2;4;-4\}$

$\vec{AB}\cdot\vec{CA} = 4-4-8 = -8$

$|\vec{AB}| = \sqrt{4+1+4} = 3$, $|\vec{CA}| = \sqrt{4+16+16} = 6$

$$\cos\alpha = \frac{-8}{3\cdot 6} = -\frac{4}{9}$$

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{4}{9}\right) = \boxed{\pi - \arccos\left(\frac{4}{9}\right)}$$

825 $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5\vec{k}$

$\vec{x}\perp\vec{a}$, $\vec{x}\perp\vec{b}$ $(\widehat{\vec{x},\vec{j}}) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $|\vec{x}| = 14$

$\vec{x} = ?$

Решение Пусть $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 18x_1 - 22x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} (*), \quad \vec{x}\cdot\vec{j} < 0 \Rightarrow x_2 < 0$$

$|\vec{x}| = 14 \Rightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 14$

Рассмотрим систему (*)

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3=0 \\ 18x_1-22x_2-5x_3=0 \end{cases} \Big|\begin{matrix} \cdot(-6) \\ + \end{matrix} \Rightarrow -34x_2-17x_3=0$$

$\Rightarrow x_3=-2x_2 \Rightarrow$ Из $1^{\text{ого}}$ ур-ния

$\Rightarrow 3x_1+2x_2-4x_2=0 \Rightarrow x_1=\frac{2}{3}x_2$

Тогда из $|\vec{x}|=14$ следует

$$\frac{4}{9}x_2^2+x_2^2+4x_2^2=196$$

$\Rightarrow \frac{49}{9}x_2^2=196 \Rightarrow x_2^2=36 \Rightarrow x_2=\pm 6$

Из $x_2<0 \Rightarrow x_2=-6$

$\Rightarrow \boxed{\vec{x}=\{-4;-6;12\}}$

830 $\vec{S}=\{\sqrt{2};-3;-5\}$

$\vec{e}=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$: $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\gamma=\frac{1}{2}$

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \Rightarrow \frac{1}{2}+\cos^2\beta+\frac{1}{4}=1$

$\Rightarrow \cos^2\beta=\frac{1}{4}$ $\quad \cos\beta=\frac{1}{2}$

$\vec{e}=\{\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\} \Rightarrow |\vec{e}|=1$

$$\text{Пр}_{\vec{e}}\vec{S} \overset{(10a)}{=\!=} \frac{\vec{e}\cdot\vec{S}}{|\vec{e}|}=\vec{e}\cdot\vec{S}=1-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}=\boxed{-3}$$

833 | $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$

$\text{Пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = ?$

Решение $\quad \vec{a}+\vec{b} = \{4; -2; -6\}$

Из 1°а) $\Rightarrow \text{Пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = \dfrac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|}$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = 12 + 8 - 72 = -52$

$|\vec{c}| = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$

$\text{Пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = \dfrac{-52}{13} = \boxed{-4}$

837 | $M(-5; 7; -6)$ и $N(7; -9; 9)$

$\vec{a} = \{1; -3; 1\}$. Найти $\text{Пр}_{\overrightarrow{MN}}\vec{a} = ?$

Решение $\quad \overrightarrow{MN} = \{12; -16; 15\}$

$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{144+256+225} = \sqrt{625} = 25$

$(\vec{a}, \overrightarrow{MN}) = 12 + 48 + 15 = 75$

$\text{Пр}_{\overrightarrow{MN}}\vec{a} = \dfrac{\overrightarrow{MN}\cdot\vec{a}}{|\overrightarrow{MN}|} = \dfrac{75}{25} = \boxed{3}$

Дома: К. 795(2,4,7), 796, 801, 804, 812, 815, 818, 820, 829, 834, 838