

# Тема 6.1

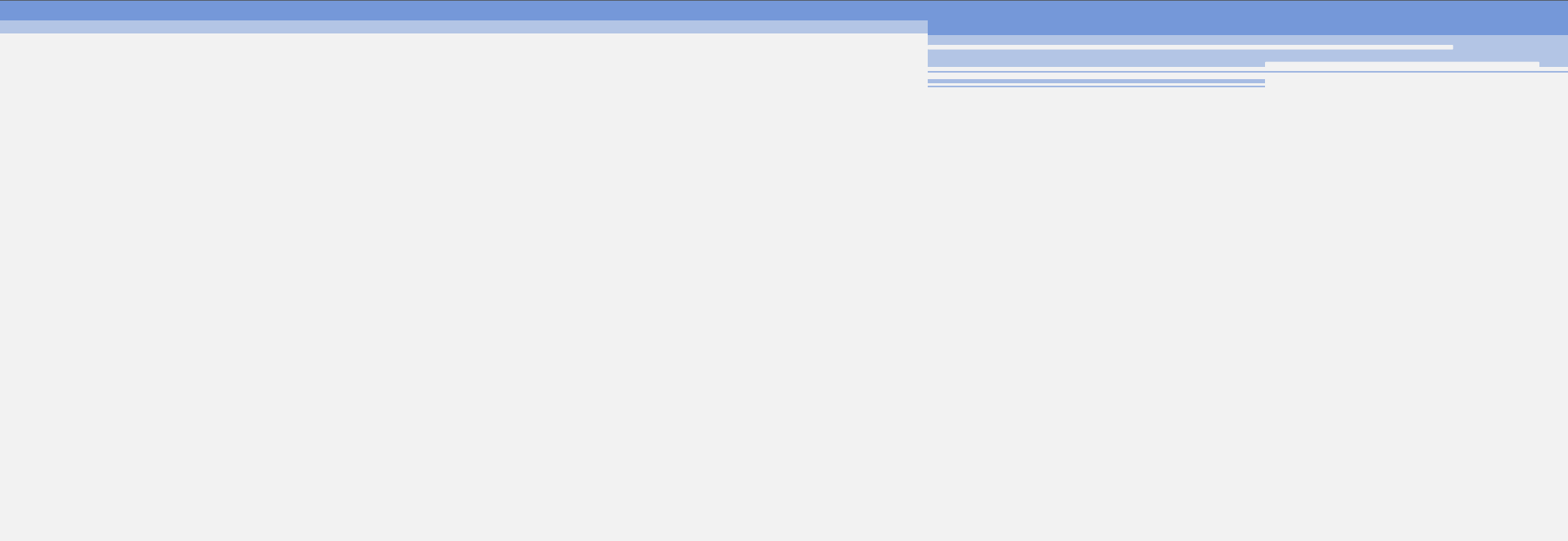
## Наращение и дисконтирование по простым процентным ставкам

**Дисциплина:**

Элементы высшей математики

Преподаватель: Трушакова Е.А.

# ЛОГИКА ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ



# Предмет и методы финансовой математики

**Финансовая математика** — это наука, изучающая методы и методики определения стоимостных и временных параметров финансовых и инвестиционных операций, процессов и сделок, а также модели управления инвестициями, капиталом и его составляющими.

**Объект финансовой математики** — финансовые операции и сделки, их технико-экономическое обоснование, направленное на извлечение прибыли.

**Предмет финансовой математики** — финансовые и актуарные оценки показателей эффективности финансовых операций и сделок, а также доходов отдельно взятых участников этих сделок, определяемых в виде процентных ставок, норм и коэффициентов, скидок, доходов и дивидендов, ренты и маржи, котировок ценных бумаг, курсов валют, курсовых разниц и пр.

# Предмет и методы финансовой математики

## **Методы Финансовой математики:**

- Методы количественного анализа, используемые при принятии управленческих решений в финансовой сфере.
- Методы учета факторов времени, инфляции, оценки потоков платежей, операций с ценными бумагами и др.

Финансовая математика охватывает круг методов вычислений, когда в финансово-банковской операции оговаривают конкретные значения параметров трех видов:

- **стоимостные характеристики** (размеры платежей, долговых обязательств, кредитов и т.д.);
- **временные данные** (даты и сроки выплат, продолжительность льготных периодов, **отсрочки** платежей и т.д.);
- **процентные ставки** (последние иногда задают в открытой форме).

# Предмет и методы финансовой математики

## **Методы финансовой математики применяют при решении следующих практических задач:**

1. исчисление конечных сумм денежных средств, находящихся во вкладах, займах, ценных бумагах, путем начисления процентов;
2. учет ценных бумаг;
3. установление взаимосвязи между отдельными параметрами сделки и определение параметров сделки исходя из заданных условий;
4. определение эквивалентности параметров сделки для получения равной отдачи от затрат, произведенных различными способами;
5. анализ последствий изменения условий финансовой операции;
6. исчисление обобщающих характеристик и отдельных параметров денежных средств, рассматриваемых как финансовые потоки;
7. разработка планов выполнения финансовых операций;
8. расчет показателей доходности финансовых операций и т.д.

## ФАКТОРЫ, УЧИТЫВАЕМЫЕ В ФИНАНСОВО- ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

Финансовые процессы определяются многими факторами или параметрами, которые с достаточной долей условности можно отнести к двум типам: ***внутренним и внешним***

## ФАКТОРЫ, УЧИТЫВАЕМЫЕ В ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

### ***К внутренним факторам относят :***

- 1. основные, существенные и непосредственные характеристики финансового процесса (например, структура портфеля активов, участвующих в сделке);*
- 2. контрактные характеристики сделки (например, способ начисления процентов в кредитных сделках, выбранная схема погашения долга и т.п.);*
- 3. характеристики, определяющие начальные условия сделки (например, инвестируемый капитал, начальный момент инвестиций)*

## ФАКТОРЫ, УЧИТЫВАЕМЫЕ В ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

### *К внешним относят факторы*

определяющие рыночную среду, т.е. условия, в которых протекает финансовый процесс (например, фактор времени, текущие и будущие рыночные цены, инфляционные ожидания и др.).



# ФАКТОРЫ, УЧИТЫВАЕМЫЕ В ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

## ***Внешние факторы:***

*Инфляционные ожидания — существенный фактор, влияющий на уровень процентных ставок.*

Снижение покупательной способности денег за период кредитования приводит к уменьшению реального размера заемных средств, возвращаемых кредитору. Соответственно кредиторы пытаются компенсировать снижение реальных доходов за счет увеличения процентных ставок по активным операциям.

# ФАКТОРЫ, УЧИТЫВАЕМЫЕ В ФИНАНСОВО- ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

## ***Внешние факторы:***

*Конкуренция на рынке финансовых ресурсов также оказывает влияние на уровень банковских процентных ставок.*

Чем выше конкуренция среди заемщиков, тем выше процентные ставки по кредитам. Чем выше конкуренция среди кредиторов, тем они ниже.

# ФАКТОРЫ, УЧИТЫВАЕМЫЕ В ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

## ***Внешние факторы:***

*Развитие рынка ценных бумаг выступает одним из факторов ценообразования на кредитном рынке.*

Организованный рынок государственных и корпоративных долговых обязательств является альтернативой прямому банковскому кредитованию, поэтому важнейшие параметры рынка ценных бумаг (доходность, объемы совершаемых операций, ожидания инвесторов, состояние инфраструктуры) и денежно-кредитного рынка находятся в прямой зависимости.

## ФАКТОРЫ, УЧИТЫВАЕМЫЕ В ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

### ***Внешние факторы:***

*Факторы, также влияющие на национальную систему процентных ставок:*

- Открытость национальной экономики,*
- Международная миграция капиталов,*
- Обменный курс валют,*
- Состояние платежного баланса страны*

## ФАКТОРЫ, УЧИТЫВАЕМЫЕ В ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

### ***Внешние факторы:***

*Фактор риска присущ практически любой финансовой сделке.*

С позиции макроэкономики риск зависит от экономической, политической и прочих составляющих и часто не поддается управлению.

## ФАКТОРЫ, УЧИТЫВАЕМЫЕ В ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

### ***Внешние факторы:***

*Система налогообложения определяет размер чистой прибыли, остающейся в распоряжении налогоплательщика.*

Меняя ставки налогообложения, порядок взимания налогов, применяя систему льгот, государство стимулирует определенные экономические процессы. Этот порядок справедлив и для денежно-кредитного рынка. Например, инвестор может отдать предпочтение менее доходным государственным ценным бумагам при наличии по ним определенных налоговых льгот.

## ФАКТОРЫ, УЧИТЫВАЕМЫЕ В ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

*Внутренние и внешние факторы финансового процесса полностью определяют его динамику.*

Так, выбор схемы начисления процентов и процентной ставки полностью определяет процесс накопления денежной суммы вклада.

*Внешние факторы не поддаются управлению, однако при проведении финансово-экономических расчетов их необходимо учитывать.*

Это относится прежде всего к учету влияния инфляции, налоговой системы, финансовых рисков.

*Внутренние факторы можно рассматривать двояко:* как управляющие параметры либо как параметры, значение которых необходимо определить в ходе выполнения расчетов.

Особую роль среди этих факторов играет фактор времени.

# ФАКТОР ВРЕМЕНИ В РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКЕ

*Фактор времени* в финансовой сфере учитывают с помощью *процентной ставки*.

*В узком смысле* процентная ставка представляет собой цену, уплачиваемую за использование заемных денежных средств.

*В финансовом менеджменте* ее также часто используют в качестве измерителя уровня (нормы) доходности производимых операций, исчисляемого как отношение полученной прибыли к сумме вложенных средств и выражаемого в долях единицы (в виде десятичной дроби) или в процентах.



# НАРАЩЕНИЕ ПО ПРОСТЫМ ПРОЦЕНТНЫМ СТАВКАМ



# 1.1. Сущность процентных денег

$$\text{Процентная ставка} = \frac{\text{Доход (за период времени)}}{\text{Капитал, предоставленный в кредит}}$$

$$i = \frac{I}{P \cdot n}$$

$i$  – процентная ставка, выраженная в долях единицы (десятичной дробью)

$I$  – доход (величина дохода владельца капитала), процентные деньги

$P$  – сумма капитала, предоставляемого в кредит.

$n$  – срок ссуды в годах

# 1.1. Сущность процентных денег

$$\text{Процентная ставка} = \frac{\text{Доход (за период времени)}}{\text{Капитал, предоставленный в кредит}}$$

$$i = \frac{I}{P \cdot n}$$

$i$  – процентная ставка, выраженная в долях единицы (десятичной дробью)

$I$  – доход (величина дохода владельца капитала), процентные деньги

$P$  – сумма капитала, предоставляемого в кредит.

$n$  – срок ссуды в годах

# 1.1. Сущность процентных денег

**Пример 1.** Фирма приобрела в банке вексель, по которому через год должна получить 66 тыс. руб. (номинальная стоимость векселя). В момент приобретения цена векселя составила 60 тыс. руб. Определить доходность этой сделки т.е. размер процентной ставки.

Дано:

$$P_1 = 60 \text{ тыс. руб.}$$

$$P_2 = 66 \text{ тыс. руб.}$$

$$S = 30000$$

$$n = 1 \text{ год}$$

$$I = P_1 - P_2 = 66 - 60 = 6 \text{ тыс. руб.}$$

$$i = \frac{I}{P \cdot n} = \frac{6}{60 \cdot 1} = 0,1 (10\%)$$

Определить  $i$

# 1.1. Сущность процентных денег

**Пример 2.** Коммерческий банк приобрел на 2,0 млн. руб. государственных облигаций со сроком погашения через 6 месяцев. По истечении указанного срока банк рассчитывает получить по облигациям 2140 тыс. руб. Определим доходность ГКО.

Дано:

$I_1 = 2$  млн. руб.  
 $I_2 = 66$  тыс. руб.  
 $n = 0,5$

$$I = I_2 - I_1 = 2140 - 2000 \\ = 140 \text{ тыс. руб.}$$

$$i = \frac{I}{P \cdot n} = \frac{140}{2000 \cdot 0,5} = 0,14 \text{ (14\%)} \quad |$$

Определить  $i$

# 1.1. Сущность процентных денег

$$i = \frac{I}{P \cdot n} \Rightarrow I = P \cdot n \cdot i = P \cdot n \cdot \frac{i}{100} \text{ – величина дохода или процентные деньги.}$$

Процентная ставка может измеряться в *процентах* или в *десятичных дробях* и в *натуральных*, последние используются с точностью до  $1/32$ .

*Проценты начисляются дискретно, т.е. в качестве периода начисления берется год, полугодие, квартал, месяц или определенное число дней.*

# 1.1. Сущность процентных денег

Доход по банковскому вкладу выплачивается вкладчику в денежной форме в виде процентов (п. 1 ст. 838 ГК РФ; ст. 36 Закона от 02.12.1990 N 395-1).

В договоре банковского вклада обычно содержится условие о размере процентной ставки по вкладу. При отсутствии такого условия в договоре банк обязан выплачивать вкладчику проценты в размере ставки рефинансирования Банка России (п. 1 ст. 838, п. 1 ст. 809 ГК РФ).

Договор банковского вклада также должен содержать условие о порядке начисления процентов.

*Проценты на сумму банковского вклада начисляются со дня, следующего за днем ее поступления в банк, до дня ее возврата вкладчику включительно (п. 1 ст. 839 ГК РФ).*

**Начисление процентов** может осуществляться одним из **четырёх способов**: по формулам простых процентов, сложных процентов, с использованием фиксированной либо плавающей процентной ставки в соответствии с условиями договора.

Если в договоре не указывается способ начисления процентов, то они начисляются по формуле простых процентов с использованием фиксированной процентной ставки.

# 1.1. Сущность процентных денег

Для начисления процентов используются методы:

- *По простым процентным ставкам* – проценты начисляются в течение всего срока кредита на одну и ту же величину капитала, предоставляемого в кредит.
- *По сложным процентным ставкам* – в первом периоде начисление производится на первоначальную сумму кредита, затем она суммируется с начисленными процентами и в каждом последующем периоде проценты начисляются на уже наращенную сумму. Таким образом, база для начисления процентов постоянно меняется.

Процентная ставка может быть как фиксированная, так и переменная.



## 1.2. Вычисление наращенных сумм на основе простых процентных ставок

По условиям кредитного контракта *начисленные проценты* могут выплачиваться кредитору по мере их начисления *в каждом периоде*, или *совместно с основной суммой долга по истечении срока контракта*.

*Наращенная сумма – результат сложения суммы, предоставляемой в кредит и начисленных процентов.*

## 1.2.1. Нарощенная сумма при постоянной процентной ставке

$S = P + I = P + P \cdot n \cdot i = P(1 + n \cdot i)$  – наросщенная сумма простых процентов

$k_n = 1 + n \cdot i$  – множитель наращения процентов

При использовании простых процентов, когда срок сделки не равен целому числу лет, периоды начисления процентов выражают дробным числом как отношение числа

дней функционирования сделки к числу дней в году:  $n = \frac{t}{K}$

## 1.2.1. Нарощенная сумма при постоянной процентной ставке

$$n = \frac{t}{K} = \frac{\text{число дней функционирования сделки}}{\text{число дней в году}} = \frac{\text{число дней, на которые был предоставлен кредит}}{\text{временная база}}$$

$$S = P + I = P \left( 1 + \frac{t}{K} \cdot i \right) = P(1 + n \cdot i) - \text{наращенная сумма простых процентов, когда срок сделки не равен целому числу лет.}$$

$i$  – простая годовая ставка процентов.

$I$  – сумма процентных денег.

$P$  – первоначальная сумма по кредиту или депозиту.

$n$  – срок операции в годах.

$t$  – срок операции в днях.

$K$  – временная база (360, 365, 366 дней).

## 1.2.1. Нарощенная сумма при постоянной процентной ставке

Расчет современной величины наращенной суммы по простой ставке процентов

$$P = \left( \frac{S}{1 + n \cdot i_n} \right)$$

$$P = \left( \frac{S}{1 + \frac{t}{K} \cdot i_n} \right)$$

или  $P = S \cdot k_{\partial}$ , где  $k_{\partial} = \frac{1}{1 + n \cdot i_n} = \frac{1}{1 + \frac{t}{K} \cdot i_n}$

$k_{\partial}$  – коэффициент дисконтирования

## 1.2.1. Нарощенная сумма при постоянной процентной ставке

### Расчет срока платежа по простой ставке процентов

$$n = \frac{S - P}{P \cdot i_n}$$

$$t = \frac{S - P}{P \cdot i_n} \cdot K$$

### Расчет простой ставки процентов

$$i_n = \frac{S - P}{P \cdot n}$$

$$i_n = \frac{S - P}{P \cdot t} \cdot K$$

## 1.2.1. Нарощенная сумма при постоянной процентной ставке

**Пример 3.** Банк выдал районной администрации ссуду в размере 4 млн. руб. сроком на 2 года по ставке простых процентов, равной 11% годовых. Определить проценты и сумму накопленного долга (наращенную сумму).

Дано:

$$P = 4 \text{ млн. руб.}$$

$$i = 0,11$$

$$n = 2 \text{ года}$$

$$I = P \cdot n \cdot i = 4 \cdot 0,11 \cdot 2 = 0,88 \text{ млн. руб.}$$

$$S = P + I = 4,0 + 0,88 = 4,88 \text{ млн. руб.}$$

ИЛИ

$$S = P(1 + 2 \cdot 0,11) = 4,88 \text{ млн. руб.}$$

Определить  $S$

## 1.2.2. Три метода процентных расчетов

	<b>Английская практика</b>	<b>Французская практика</b>	<b>Германская практика</b>
	<i>Точные проценты с точным числом дней ссуды</i>	<i>Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды</i>	<i>Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды</i>
<b>t – количество дней</b>	фактическое число дней между двумя датами (дата погашения и дата получения ссуды)	фактическое число дней между двумя датами (дата погашения и дата получения ссуды)	определяется количеством месяцев по 30 дней в каждом начиная с момента выдачи и до момента погашения и точным числом дней ссуды в неполном месяце
<b>K – временная база</b>	365 (366– год високосный)	360	360

*При точном и приближенном методах начисления процентов день выдачи и день погашения ссуды принимаются за один день*

## 1.2.2. Три метода процентных расчетов

**Пример 4.** Банк выдал кредит 18 января в размере 500,0 тыс. руб. Срок возврата кредита – 3 марта; процентная ставка – 12,0% годовых; год невисокосный. Определить сумму долга, подлежащую возврату. Рассчитать сумму тремя методами.

Дано:

$P = 500,0$  тыс. руб.

$i = 0,12$

$n = 3$  года

$t_1 = 18.01$

$t_2 = 03.03$

Определить

$S_A$   $S_\Phi$   $S_T$

1) Английская практика  $K=365$

с 18.01 по 31.01 включительно – 14 дней

февраль – 28 дней

март – 3 дня

Итого 45 дней

Так, как день выдачи и день погашения ссуды принимаются за один день, то  $t = 45 - 1 = 44$  дня.

$$S = P \left( 1 + \frac{t}{K} i \right) = 500 \left( 1 + \frac{44}{365} 0,12 \right) = 507,23 \text{ тыс. руб.}$$



## 1.2.2. Три метода процентных расчетов



Дано:

$$P = 500,0 \text{ тыс. руб}$$

$$i = 0,12$$

$$n = 3 \text{ года}$$

$$t_1 = 18.01$$

$$t_2 = 03.03$$

---

Определить

$$S_A \ S_\Phi \ S_\Gamma$$

2) Французская практика  $K=360$

$$S = P \left( 1 + \frac{t}{K} i \right) = 500 \left( 1 + \frac{44}{360} 0,12 \right) = 507,33 \text{ тыс. руб.}$$

3) Германская практика  $K=360$

с 18.01 по 30.01 включительно – 13 дней

февраль – 30 дней

март – 3 дня

Итого 46 дней

Так, как день выдачи и день погашения ссуды принимаются за один день, то  $t = 46 - 1 = 45$  дня.

$$S = P \left( 1 + \frac{t}{K} i \right) = 500 \left( 1 + \frac{45}{360} 0,12 \right) = 507,50 \text{ тыс. руб.}$$

Из примера видно, что для кредиторов наиболее предпочтительным является третий вариант начисления процентов.

### 1.2.3. Нарощенная сумма при переменной процентной ставке

$$S = P \left( 1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \dots + n_t i_t \right) = P \left( 1 + \sum_{t=1}^m n_t i_t \right)$$

$i_t$  – ставка простых процентов в периоде  $t$ .

$n_t$  – продолжительность начисления ставки  $i_t$ .

$m$  – число периодов начисления процентов.

**Пример 5.** Банк предлагает вкладчикам следующие условия по срочному годовому депозиту: в первое полугодие процентная ставка 12,0% годовых, каждый следующий квартал ставка возрастает на 0,5%. Проценты начисляются только на первоначально внесенную сумму вклада. Определим наращенную за год сумму, если вкладчик поместил в банк на этих условиях 400,0 тыс. руб.

Дано:

$$P = 400,0 \text{ тыс. руб.}$$

$$n_1 = 0,5$$

$$n_2 = 0,25$$

$$n_3 = 0,25$$

$$i_1 = 0,12$$

$$i_2 = 0,125 = 0,12 + 0,5$$

$$i_3 = 0,13 = 0,125 + 0,5$$

$$S = P \left( 1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + n_3 i_3 \right) =$$

$$= 400 \left( 1 + 0,5 \cdot 0,12 + 0,25 \cdot 0,125 + 0,25 \cdot 0,13 \right) = 449,5 \text{ тыс. руб.}$$

Определить  $S$

## 1.2.4. Нарощенная сумма при начислении процентов на уже наросшие в предыдущем периоде суммы (капитализация процентного дохода)

$$S = P(1 + n_1 i_1) \cdot (1 + n_2 i_2) \cdot \dots \cdot (1 + n_t \cdot i_t)$$

$n_1, n_2, \dots, n_t$  – продолжительность периодов наращивания

$i_1, i_2, \dots, i_t$  – процентные ставки, по которым производится реинвестирование.

**Пример 6.** Клиент поместил в банк 500,0 тыс. руб. Какова будет наросшая сумма вклада за 3 месяца, если за первый месяц начисляются проценты в размере 15% годовых, а каждый последующий месяц процентная ставка возрастает на 1,5% с одновременной капитализацией процентного дохода?

Дано:

$P = 500,0$  тыс. руб.

$i_1 = 0,15$

$i_2 = 0,165 = 0,15 + 0,015$

$i_3 = 0,18 = 0,165 + 0,015$

$$\begin{aligned} S &= P(1 + n_1 i_1) \cdot (1 + n_2 i_2) \cdot (1 + n_3 \cdot i_3) = \\ &= 500 \left(1 + \frac{30}{360} 0,15\right) \cdot \left(1 + \frac{30}{360} 0,165\right) \cdot \left(1 + \frac{30}{360} 0,18\right) = 520,91 \text{ тыс. руб.} \end{aligned}$$

Определить  $S$