Тема 6.1
Наращение и дисконтирование по простым процентным ставкам

Дисциплина:
Элементы высшей математики

Преподаватель: Трушакова Е.А.

ЛОГИКА ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Предмет и методы финансовой математики

Финансовая математика *— это наука, изучающая методы и методики определения стоимостных и временных параметров финансовых и инвестиционных операций, процессов и сделок, а также модели управления инвестициями,* капиталом *и его составляющими.*

Объект финансовой математики *— финансовые операции и сделки, их технико-экономическое обоснование, направленное на извлечение прибыли.*

Предмет финансовой математики *— финансовые и актуарные оценки показателей эффективности финансовых операций и сделок, а также доходов отдельно взятых участников этих сделок, определяемых в виде процентных ставок, норм и коэффициентов, скидок, доходов и дивидендов, ренты и маржи, котировок ценных бумаг, курсов валют, курсовых разниц и пр.*

Предмет и методы финансовой математики

Методы Финансовой математики:

- *Методы количественного анализа, используемые при принятии управленческих решений в финансовой сфере.*
- *Методы учета факторов времени, инфляции, оценки потоков платежей, операций с ценными бумагами и др.*

Финансовая математика охватывает круг методов вычислений, когда в финансово-банковской операции оговаривают конкретные значения параметров трех видов:

- **стоимостные характеристики** (размеры платежей, долговых обязательств, кредитов и т.д.);
- **временные данные** (даты и сроки выплат, продолжительность льготных периодов, **отсрочки** платежей и т.д.);
- **процентные ставки** (последние иногда задают в открытой форме).

Предмет и методы финансовой математики

Методы финансовой математики применяют при решении следующих практических задач:

1. исчисление конечных сумм денежных средств, находящихся во вкладах, займах, ценных бумагах, путем начисления процентов;
2. учет ценных бумаг;
3. установление взаимосвязи между отдельными параметрами сделки и определение параметров сделки исходя из заданных условий;
4. определение эквивалентности параметров сделки для получения равной отдачи от затрат, произведенных различными способами;
5. анализ последствий изменения условий финансовой операции;
6. исчисление обобщающих характеристик и отдельных параметров денежных средств, рассматриваемых как финансовые потоки;
7. разработка планов выполнения финансовых операций;
8. расчет показателей доходности финансовых операций и т.д.

ФАКТОРЫ, УЧИТЫВАЕМЫЕ В ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

Финансовые процессы определяются многими факторами или параметрами, которые с достаточной долей условности можно отнести к двум типам: ***внутренним и внешним***

ФАКТОРЫ, УЧИТЫВАЕМЫЕ В ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

К внутренним факторам относят :

1. *основные, существенные и непосредственные характеристики финансового процесса* (например, структура портфеля активов, участвующих в сделке);

2. *контрактные характеристики сделки* (например, способ начисления процентов в кредитных сделках, выбранная схема погашения долга и т.п.);

3. *характеристики, определяющие начальные условия сделки* (например, инвестируемый капитал, начальный момент инвестиций)

ФАКТОРЫ, УЧИТЫВАЕМЫЕ В ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

К внешним относят факторы

определяющие рыночную среду, т.е. условия, в которых протекает финансовый процесс (например, фактор времени, текущие и будущие рыночные цены, инфляционные ожидания и др.).

ФАКТОРЫ, УЧИТЫВАЕМЫЕ В ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

Внешние факторы:

Инфляционные ожидания — существенный фактор, влияющий на уровень процентных ставок.

Снижение покупательной способности денег за период кредитования приводит к уменьшению реального размера заемных средств, возвращаемых кредитору. Соответственно кредиторы пытаются компенсировать снижение реальных доходов за счет увеличения процентных ставок по активным операциям.

ФАКТОРЫ, УЧИТЫВАЕМЫЕ В ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

Внешние факторы:

Конкуренция на рынке финансовых ресурсов также оказывает влияние на уровень банковских процентных ставок.

Чем выше конкуренция среди заемщиков, тем выше процентные ставки по кредитам. Чем выше конкуренция среди кредиторов, тем они ниже.

ФАКТОРЫ, УЧИТЫВАЕМЫЕ В ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

Внешние факторы:

Развитие рынка ценных бумаг выступает одним из факторов ценообразования на кредитном рынке.

Организованный рынок государственных и корпоративных долговых обязательств является альтернативой прямому банковскому кредитованию, поэтому важнейшие параметры рынка ценных бумаг (доходность, объемы совершаемых операций, ожидания инвесторов, состояние инфраструктуры) и денежно-кредитного рынка находятся в прямой зависимости.

ФАКТОРЫ, УЧИТЫВАЕМЫЕ В ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

Внешние факторы:

Факторы, также влияющие на национальную систему процентных ставок:

- *Открытость национальной экономики,*
- *Международная миграция капиталов,*
- *Обменный курс валют,*
- *Состояние платежного баланса страны*

ФАКТОРЫ, УЧИТЫВАЕМЫЕ В ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

Внешние факторы:

Фактор риска присущ практически любой финансовой сделке.

С позиции макроэкономики риск зависит от экономической, политической и прочих составляющих и часто не поддается управлению.

ФАКТОРЫ, УЧИТЫВАЕМЫЕ В ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

Внешние факторы:

Система налогообложения определяет размер чистой прибыли, остающейся в распоряжении налогоплательщика.

Меняя ставки налогообложения, порядок взимания налогов, применяя систему льгот, государство стимулирует определенные экономические процессы. Этот порядок справедлив и для денежно-кредитного рынка. Например, инвестор может отдать предпочтение менее доходным государственным ценным бумагам при наличии по ним определенных налоговых льгот.

ФАКТОРЫ, УЧИТЫВАЕМЫЕ В ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

Внутренние и внешние факторы финансового процесса полностью определяют его динамику.

Так, выбор схемы начисления процентов и процентной ставки полностью определяет процесс накопления денежной суммы вклада.

Внешние факторы не поддаются управлению, однако при проведении финансово-экономических расчетов их необходимо учитывать.

Это относится прежде всего к учету влияния инфляции, налоговой системы, финансовых рисков.

Внутренние факторы можно рассматривать двояко: как управляющие параметры либо как параметры, значение которых необходимо определить в ходе выполнения расчетов.

Особую роль среди этих факторов играет фактор времени.

ФАКТОР ВРЕМЕНИ В РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКЕ

Фактор времени в финансовой сфере учитывают с помощью процентной ставки.

В узком смысле процентная ставка представляет собой цену, уплачиваемую за использование заемных денежных средств.

В финансовом менеджменте ее также часто используют в качестве измерителя уровня (нормы) доходности производимых операций, исчисляемого как отношение полученной прибыли к сумме вложенных средств и выражаемого в долях единицы (в виде десятичной дроби) или в процентах.

НАРАЩЕНИЕ ПО ПРОСТЫМ ПРОЦЕНТНЫМ СТАВКАМ

1.1. Сущность процентных денег

$$\text{Процентная ставка} = \frac{\text{Доход (за период времени)}}{\text{Капитал, предоставленный в кредит}}$$

$$i = \frac{I}{P \cdot n}$$

i – процентная ставка, выраженная в долях единицы (десятичной дробью)
I – доход (величина дохода владельца капитала), процентные деньги
P – сумма капитала, предоставляемого в кредит.
n – срок ссуды в годах

1.1.Сущность процентных денег

$$\text{Процентная ставка} = \frac{\text{Доход (за период времени)}}{\text{Капитал, предоставленный в кредит}}$$

$$i = \frac{I}{P \cdot n}$$

i – процентная ставка, выраженная в долях единицы (десятичной дробью)
I – доход (величина дохода владельца капитала), процентные деньги
P – сумма капитала, предоставляемого в кредит.
n – срок ссуды в годах

1.1.Сущность процентных денег

Пример 1. Фирма приобрела в банке вексель, по которому через год должна получить 66 тыс. руб. (номинальная стоимость векселя). В момент приобретения цена векселя составила 60 тыс. руб. Определить доходность этой сделки т.е. размер процентной ставки.

Дано:

$P_1 = 60$ тыс. руб.

$P_2 = 66$ тыс. руб.

$S = 30000$

$n = 1$год

Определить i

$$I = P_1 - P_2 = 66 - 60 = 6 \text{ тыс. руб.}$$

$$i = \frac{I}{P \cdot n} = \frac{6}{60 \cdot 1} = 0{,}1\ (10\%)$$

1.1.Сущность процентных денег

Пример 2. Коммерческий банк приобрел на 2,0 млн. руб. государственных облигаций со сроком погашения через 6месяцев. По истечении указанного срока банк рассчитывает получить по облигациям 2140 тыс. руб. Определим доходность ГКО.

Дано:

$I_1 = 2$ млн. руб.

$I_2 = 66$ тыс. руб.

$n = 0{,}5$

$$I = I_2 - I_1 = 2140 - 2000 = 140 \text{ тыс. руб.}$$

$$i = \frac{I}{P \cdot n} = \frac{140}{2000 \cdot 0{,}5} = 0{,}14 \ (14\%)$$

Определить i

1.1.Сущность процентных денег

$i = \frac{I}{P \cdot n} \Rightarrow I = P \cdot n \cdot i = P \cdot n \cdot \frac{i}{100}$ – величина дохода или процентные деньги.

Процентная ставка может измеряться в *процентах* или в *десятичных дробях* и в натуральных, последние используются с точностью до $^{1}/_{32}$.

Проценты начисляются дискретно, т.е. в качестве периода начисления берется год, полугодие, квартал, месяц или определенное число дней.

1.1.Сущность процентных денег

Доход по банковскому вкладу выплачивается вкладчику в денежной форме в виде процентов (п. 1 ст. 838 ГК РФ; ст. 36 Закона от 02.12.1990 N 395-1).

В договоре банковского вклада обычно содержится условие о размере процентной ставки по вкладу. При отсутствии такого условия в договоре банк обязан выплачивать вкладчику проценты в размере ставки рефинансирования Банка России (п. 1 ст. 838, п. 1 ст. 809 ГК РФ).

Договор банковского вклада также должен содержать условие о порядке начисления процентов.

Проценты на сумму банковского вклада начисляются со дня, следующего за днем ее поступления в банк, до дня ее возврата вкладчику включительно (п. 1 ст. 839 ГК РФ).

Начисление процентов может осуществляться одним из четырех способов: по формулам простых процентов, сложных процентов, с использованием фиксированной либо плавающей процентной ставки в соответствии с условиями договора.

Если в договоре не указывается способ начисления процентов, то они начисляются по формуле простых процентов с использованием фиксированной процентной ставки.

1.1.Сущность процентных денег

Для начисления процентов используются методы:

- *По простым процентным ставкам* – проценты начисляются в течение всего срока кредита на одну и ту же величину капитала, предоставляемого в кредит.

- *По сложным процентным ставкам* – в первом периоде начисление производится на первоначальную сумму кредита, затем она суммируется с начисленными процентами и в каждом последующем периоде проценты начисляются на уже наращенную сумму. Таким образом, база для начисления процентов постоянно меняется.

Процентная ставка может быть как фиксированная, так и переменная.

1.2.Вычисление наращенных сумм на основе простых процентных ставок

По условиям кредитного контракта *начисленные проценты* могут выплачиваться кредитору по мере их начисления *в каждом периоде*, или *совместно с основной суммой долга по истечении срока контракта.*

Наращенная сумма – результат сложения суммы, предоставляемой в кредит и начисленных процентов.

1.2.1. Наращенная сумма при постоянной процентной ставке

$S = P + I = P + P \cdot n \cdot i = P(1 + n \cdot i)$ – наращенная сумма простых процентов

$k_n = 1 + n \cdot i$ – множитель наращения процентов

При использовании простых процентов, когда срок сделки не равен целому числу лет, периоды начисления процентов выражают дробным числом как отношение числа дней функционирования сделки к числу дней в году: $n = \frac{t}{K}$

1.2.1. Наращенная сумма при постоянной процентной ставке

$$n = \frac{t}{K} = \frac{\text{число дней функционирования сделки}}{\text{число дней в году}} = \frac{\text{число дней, на которые был предоставлен кредит}}{\text{временная база}}$$

$S = P + I = P\left(1 + \frac{t}{K} \cdot i\right) = P(1 + n \cdot i)$ – наращенная сумма простых процентов, когда срок сделки не равен целому числу лет.

i – простая годовая ставка процентов.
I – сумма процентных денег.
P – первоначальная сумма по кредиту или депозиту.
n – срок операции в годах.
t – срок операции в днях.
K – временная база (360, 365, 366 дней).

1.2.1. Наращенная сумма при постоянной процентной ставке

Расчет современной величины наращенной суммы по простой ставке процентов

$$P = \left(\frac{S}{1 + n \cdot i_n} \right)$$

$$P = \left(\frac{S}{1 + \frac{t}{K} \cdot i_n} \right)$$

или $P = S \cdot k_\partial$, где $k_\partial = \frac{1}{1 + n \cdot i_n} = \frac{1}{1 + \frac{t}{K} \cdot i_n}$

k_∂ – коэффициент дисконтирования

1.2.1. Наращенная сумма при постоянной процентной ставке

Расчет срока платежа по простой ставке процентов

$$n = \frac{S - P}{P \cdot i_n}$$

$$t = \frac{S - P}{P \cdot i_n} \cdot K$$

Расчет простой ставки процентов

$$i_n = \frac{S - P}{P \cdot n}$$

$$i_n = \frac{S - P}{P \cdot t} \cdot K$$

1.2.1. Наращенная сумма при постоянной процентной ставке

Пример 3. Банк выдал районной администрации ссуду в размере 4 млн. руб. сроком на 2 года по ставке простых процентов, равной 11% годовых. Определить проценты и сумму накопленного долга (наращенную сумму).

Дано:

$P = 4$ млн. руб.

$i = 0{,}11$

$n = 2$ года

Определить S

$$I = P \cdot n \cdot i = 4 \cdot 0{,}11 \cdot 2 = 0{,}88 \text{ млн. руб.}$$

$$S = P + I = 4{,}0 + 0{,}88 = 4{,}88 \text{ млн. руб.}$$

или

$$S = P(1 + 2 \cdot 0{,}11) = 4{,}88 \text{ млн. руб.}$$

1.2.2. Три метода процентных расчетов

	Английская практика	Французская практика	Германская практика
	Точные проценты с точным числом дней ссуды	*Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды*	*Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды*
t – количество дней	фактическое число дней между двумя датами (дата погашения и дата получения ссуды)	фактическое число дней между двумя датами (дата погашения и дата получения ссуды)	определяется количеством месяцев по 30 дней в каждом начиная с момента выдачи и до момента погашения и точным числом дней ссуды в неполном месяце
K – временная база	365 (366– год високосный)	360	360

При точном и приближенном методах начисления процентов день выдачи и день погашения ссуды принимаются за один день

1.2.2. Три метода процентных расчетов

Пример 4. Банк выдал кредит 18 января в размере 500,0 тыс. руб. Срок возврата кредита – 3 марта; процентная ставка – 12,0% годовых; год невисокосный. Определить сумму долга, подлежащую возврату. Рассчитать сумму тремя методами.

Дано:

P = 500,0 тыс. руб.

i = 0,12

n = 3 года

t_1=18.01

t_2=03.03

Определить

S_A $S_Ф$ $S_Г$

1) Английская практика К=365

с 18.01 по 31.01 включительно – 14 дней

февраль – 28 дней

март – 3 дня

Итого 45 дней

Так, как день выдачи и день погашения ссуды принимаются за один день, то t = 45–1=44 дня.

$$S = P\left(1+\frac{t}{K}i\right) = 500\left(1+\frac{44}{365}0{,}12\right) = 507{,}23\ тыс.\ руб.$$

1.2.2. Три метода процентных расчетов

Дано:

$P = 500{,}0$ тыс. руб

$i = 0{,}12$

$n = 3$ года

t_1=18.01

t_2=03.03

Определить

S_A $S_Ф$ $S_Г$

2) Французская практика К=360

$$S = P\left(1+\frac{t}{K}i\right) = 500\left(1+\frac{44}{360}0{,}12\right) = 507{,}33\ тыс.\ руб.$$

3) Германская практика К=360

с 18.01 по 30.01 включительно – 13 дней

февраль – 30 дней

март – 3 дня

Итого 46 дней

Так, как день выдачи и день погашения ссуды принимаются за один день, то t = 46–1=45 дня.

$$S = P\left(1+\frac{t}{K}i\right) = 500\left(1+\frac{45}{360}0{,}12\right) = 507{,}50\ тыс.\ руб.$$

Из примера видно, что для кредиторов наиболее предпочтительным является третий вариант начисления процентов.

1.2.3. Наращенная сумма при переменной процентной ставке

$$S = P\left(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots + n_t i_t\right) = P\left(1 + \sum_1^m n_t i_t\right)$$

i_t – ставка простых процентов в периоде t.
n_t – продолжительность начисления ставки i_t.
m – число периодов начисления процентов.

Пример 5. Банк предлагает вкладчикам следующие условия по срочному годовому депозиту: в первое полугодие процентная ставка 12,0% годовых, каждый следующий квартал ставка возрастает на 0,5%. Проценты начисляются только на первоначально внесенную сумму вклада. Определим наращенную за год сумму, если вкладчик поместил в банк на этих условиях 400,0 тыс. руб.

Дано:
P = 400,0 тыс. руб.
n_1=0,5
n_2=0,25
n_3=0,25
i_1 = 0,12
i_2 = 0,125 =0,12+0,5
i_1 = 0,13=0,125+0,5

Определить S

$$S = P\left(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + n_3 i_3\right) =$$
$$= 400\left(1 + 0{,}5 \cdot 0{,}12 + 0{,}25 \cdot 0{,}125 + 0{,}25 \cdot 0{,}13\right) = 449{,}5 \text{ тыс. руб.}$$

1.2.4. Наращенная сумма при начислении процентов на уже наращенные в предыдущем периоде суммы (капитализация процентного дохода)

$$S = P(1 + n_1 i_1)\cdot(1 + n_2 i_2)\cdot\ldots\cdot(1 + n_t \cdot i_t)$$

$n_1, n_2, \ldots, n_t$ – продолжительность периодов наращения
$i_1, i_2, \ldots, i_t$ – процентные ставки, по которым производится реинвестирование.

Пример 6. Клиент поместил в банк 500,0 тыс. руб. Какова будет наращенная сумма вклада за 3 месяца, если за первый месяц начисляются проценты в размере 15% годовых, а каждый последующий месяц процентная ставка возрастает на 1,5% с одновременной капитализацией процентного дохода?

Дано:
$P = 500{,}0$ тыс. руб.
$i_1 = 0{,}15$
$i_2 = 0{,}165 = 0{,}15 + 0{,}015$
$i_1 = 0{,}18 = 0{,}165 + 0{,}015$

Определить S

$$S = P(1 + n_1 i_1)\cdot(1 + n_2 i_2)\cdot(1 + n_3 \cdot i_3) =$$

$$= 500\left(1 + \frac{30}{360}0{,}15\right)\cdot\left(1 + \frac{30}{360}0{,}165\right)\cdot\left(1 + \frac{30}{360}0{,}18\right) = 520{,}91 \text{ тыс. руб.}$$