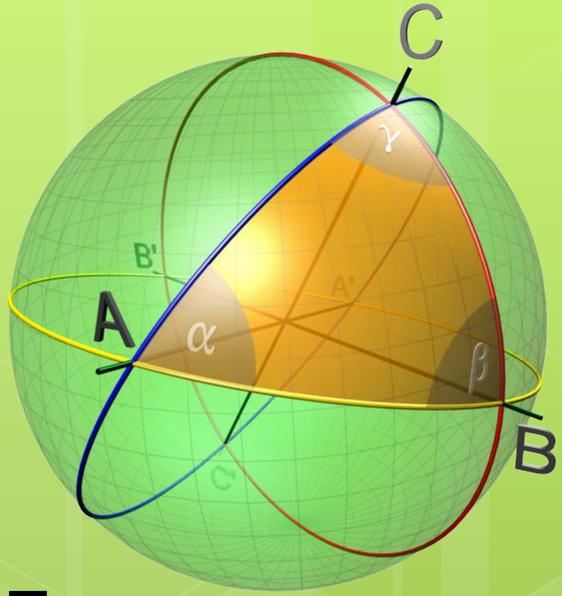
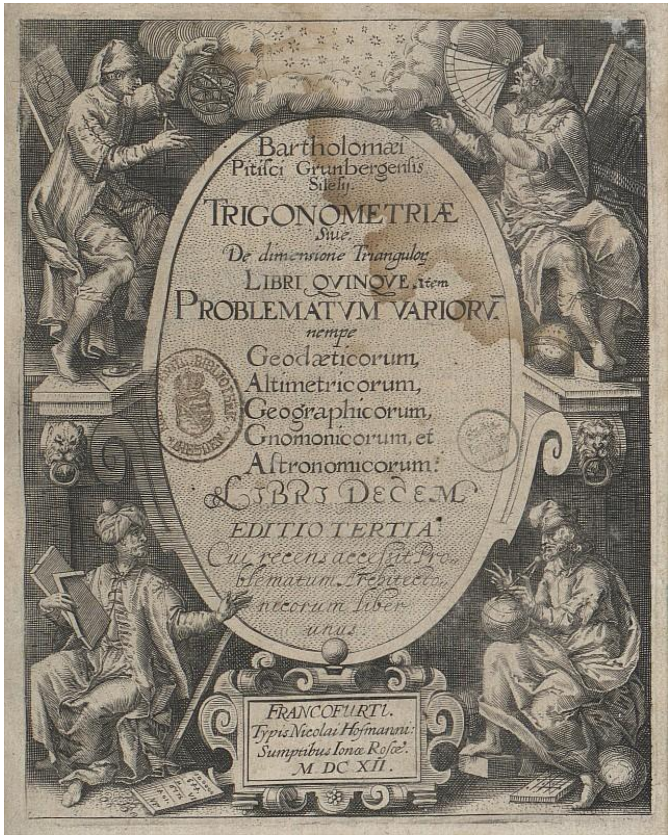


Тригонометрические уравнения

Работу выполнила студентка группы 16Т14 ГАОУ СПО РО РТРСТ "Сократ" Пошлякова Елизавета Владимировна.

Тригонометрия и ее создатель



Тригономе́трия (от греч. τρίγωνον (треугольник) и греч. μέτρεο (*меряю*), то есть *измерение треугольников*) — раздел математики, в котором изучаются тригонометрические функции и их использование в геометрии. Данный термин впервые появился в 1595 г. как название книги немецкого математика Бартоломеуса Питискуса (1561—1613), а сама наука ещё в глубокой древности использовалась для расчётов в астрономии, архитектуре и геодезии (науке, исследующей размеры и форму земли).

Бартоломеус Питискус

Бартоломе́ус Пити́скус (или **Бартоломео Питиск**, нем. *Bartholomäus Pitiscus*, 1561—1613) — немецкий математик, астроном, теолог-кальвинист. Внёс вклад в развитие тригонометрии, в том числе предложил сам термин «тригонометрия» в качестве названия этой науки.

Тригонометрические уравнения. Определение

- *Тригонометрическим* уравнением называется уравнение, содержащее переменную под знаком тригонометрических функций.
- Простейшими тригонометрическими уравнениями являются уравнения вида.

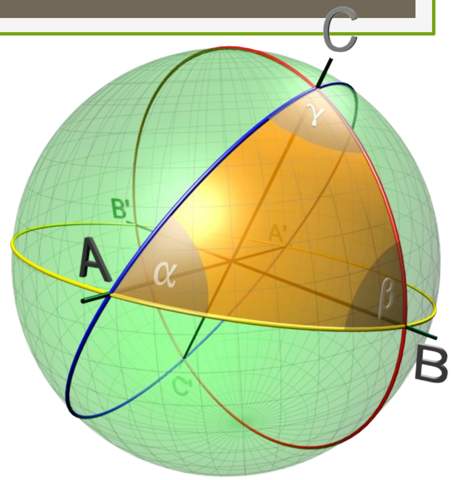
$\sin x = a$,

$\cos x = a$,

$tgx = a$,

$ctgx = a$.

Уравнение SIN X=a



Уравнение $\sin x = a$.

Так как множество значений функции $y = \sin x$ - отрезок [-1;1], то данное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда

$$|a| \le 1.$$

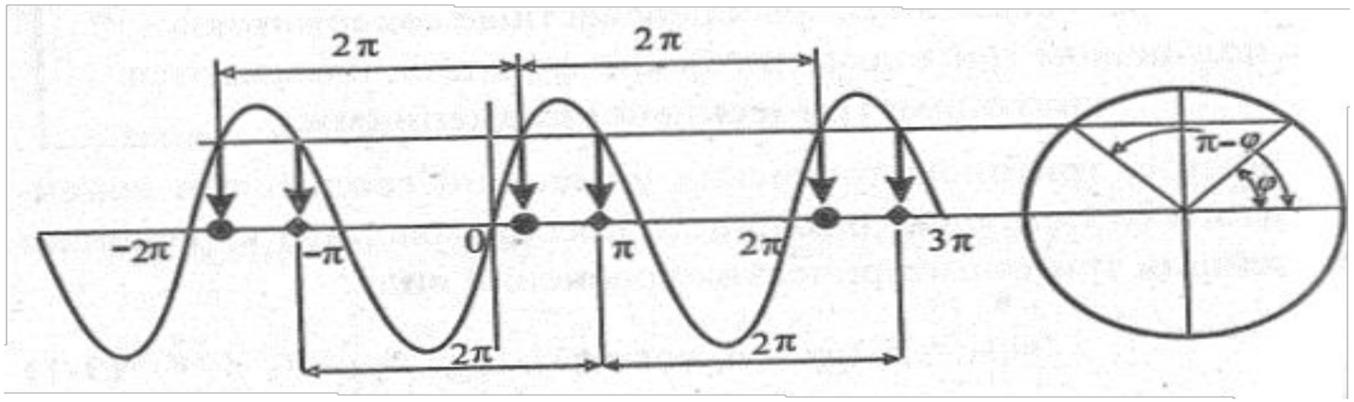
Далее, из-за периодичности функции $y = \sin x$, каждому значению a соответствует бесконечное множество решений. Поэтому все решения описываются формулами:

$$\begin{cases} x_1 = \arcsin a + 2\pi k \\ x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi k, \ k \in Z \end{cases}$$

или обобщенной формулой

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \ k \in Z.$$

На рисунке 1 члены первой последовательности отмечены кружками, а второй - квадратами.



Пример. Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решение. $x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \pi k,\ k \in Z$ $\Rightarrow$ $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Уравнение $\cos x = a$.

Данное уравнение имеет тогда и только тогда, когда

$$|a| \leq 1.$$

Множество решений записывается в виде

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Заметим, что $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Пример. Решить уравнение $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

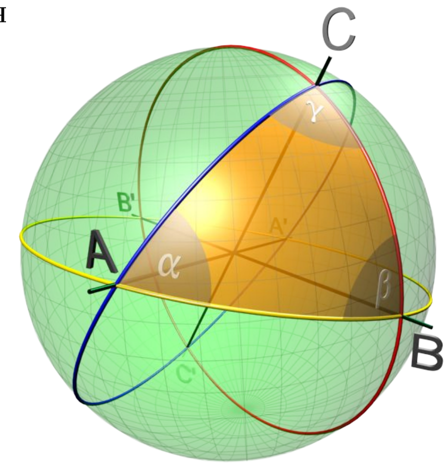
Решение. $x = \pm \arccos \dfrac{1}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \Rightarrow x = \pm \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$

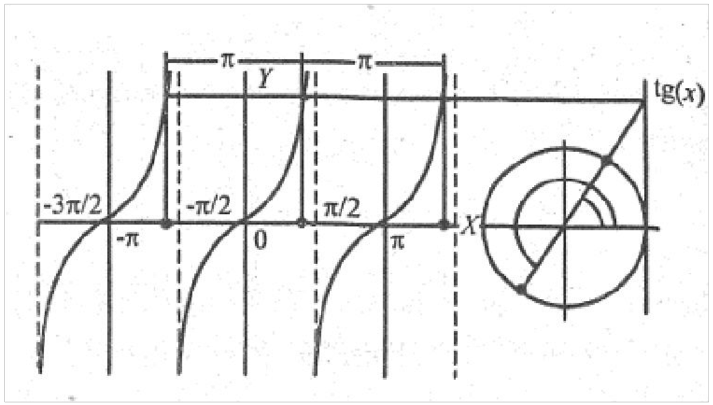
Ответ: $x = \pm \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Уравнение $tgx = a$.

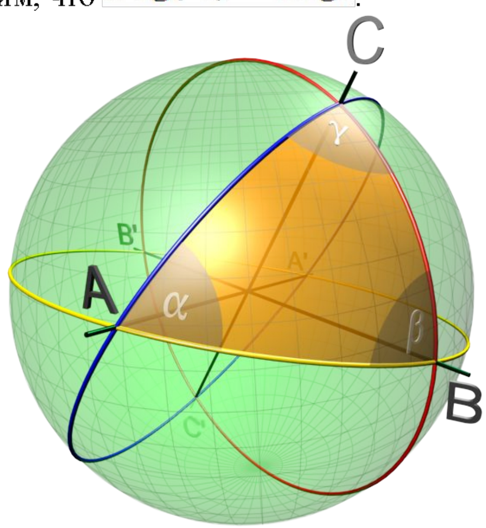
Данное уравнение разрешимо при любом a. Все решения задаются формулой

$$x = arctga + \pi k,\ k \in Z.$$





Заметим, что $arctg(-a) = -arctga$.



Пример. Решить уравнение $tgx = \sqrt{3}$.

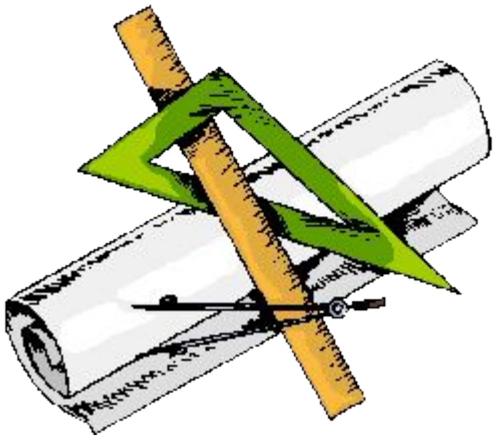
Решение. $x = arctg\sqrt{3} + \pi k,\ k \in Z \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

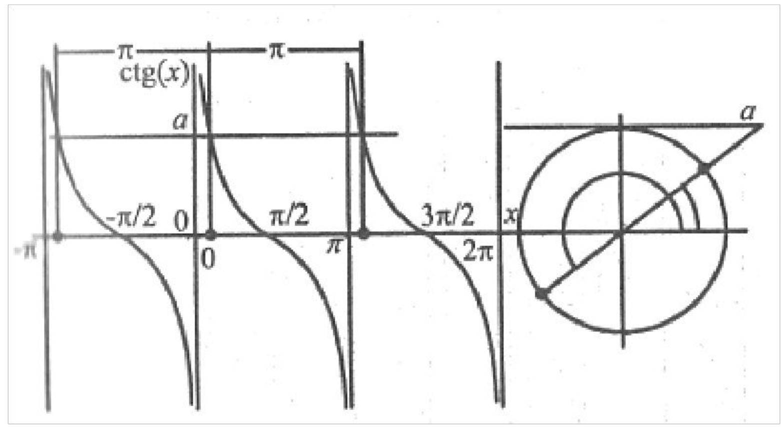
Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Уравнение $ctgx = a$.

Данное уравнение разрешимо при любом a. Все решения задаются формулой

$$x = arcctga + \pi k,\ k \in Z.$$





Пример. Решить уравнение $ctgx = \sqrt{3}$.

Решение. $x = arcctg\sqrt{3} + \pi k,\ k \in Z \Rightarrow$ $x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Основные методы решения

- Любое тригонометрическое уравнение в процессе решения с помощью надлежащих преобразований должно быть приведено к простейшим. Наиболее часто при решении тригонометрических уравнений применяются следующие методы:

- разложение на множители;
- способ замены (сведение к алгебраическим уравнениям);
- сведение к уравнениям, однородным относительно и ;
- преобразование суммы тригонометрических функций в произведение;
- преобразование произведения тригонометрических функций в сумму;
- использование формул понижения степени;
- равенство одноименных тригонометрических функций;
- равенство одноименных тригонометрических функций
- введение вспомогательного аргумента.

Способ замены

При решении уравнений этим методом необходимо знать формулы:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad tgx = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad ctgx \frac{\cos x}{\sin x};$$

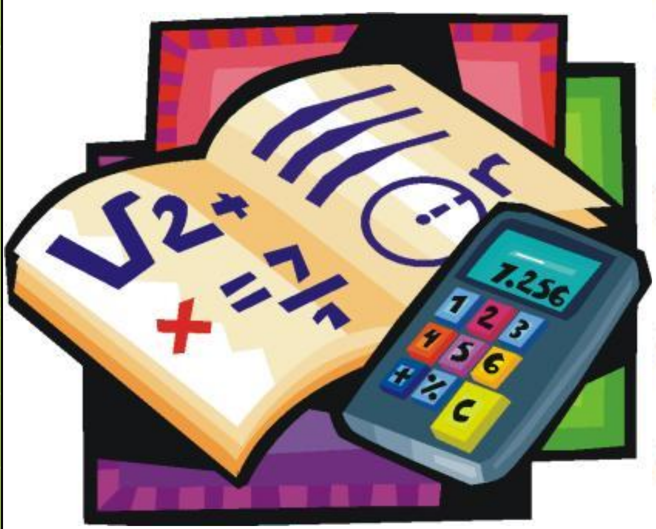
$$ctgx = \frac{1}{tgx}; \quad 1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad 1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x};$$

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x, \quad 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x,$$

$$tg 2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}; \quad \sin 2x = \frac{2tgx}{1 + tg^2 x};$$

$$\cos 2x = \frac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x}; \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x;$$

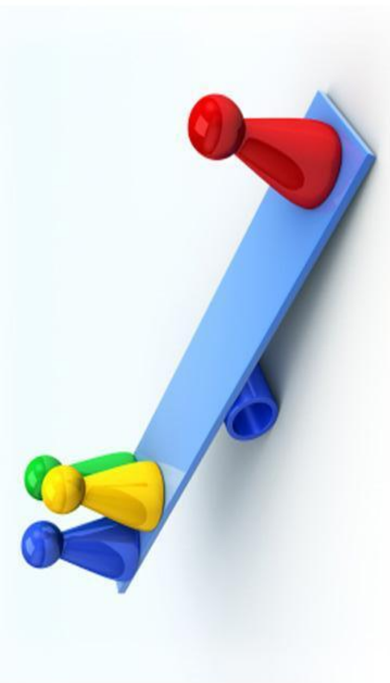
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$



Пример 1. Решить уравнение $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$.

Решение. Это уравнение является квадратным относительно $\cos x$. Поэтому сделаем замену $\cos x = t$. В результате получим уравнение $t^2 + t - 2 = 0$. Его корни: $t_1 = 1,\ \ t_2 = -2$, то есть получаем уравнение $\cos x = 1$ или $\cos x = -2$. Первое уравнение дает $x = 2\pi k,\ \ k \in Z$. Второе уравнение не имеет корней.

Ответ: $x = 2\pi k,\ \ k \in Z$.



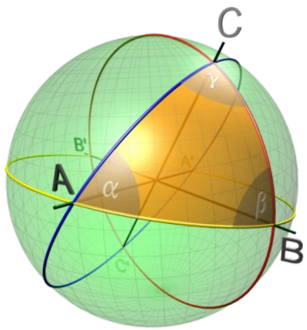
Пример 2 Решить уравнение $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$.

Решение. Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то уравнение можно представить в виде $6(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 7 = 0$; $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$. Сделаем замену $t = \sin x$. Получим квадратное уравнение $6t^2 - 5t + 1 = 0$, решая которое, имеем: $D = 25 - 6 \cdot 4 = 1,\ t_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12}$, то есть $t_1 = \frac{1}{2},\ t_2 = \frac{1}{3}$. Таким образом, получим два простейших уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = \frac{1}{3}$. Решая их, имеем $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z$ или $x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k,\ \ k \in Z$.

Ответ: $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k;\ \ (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k,\ \ k \in Z$

Однородные уравнения

Уравнения:



$$a_0 \sin x + a_1 \cos x = 0,$$

$$a_0 \sin^2 x + a_1 \sin x \cos x + a_2 \cos^2 x = 0,$$

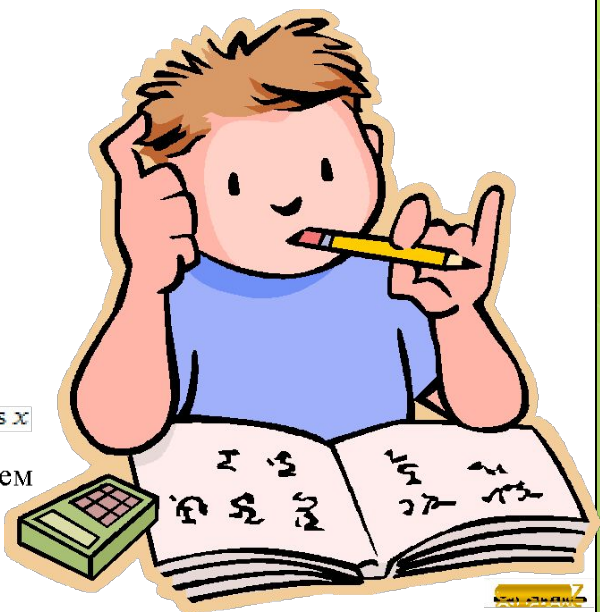
$$a_0 \sin^3 x + a_1 \sin^2 x \cos x + a_2 \sin x \cos^2 x + a_3 \cos^3 x = 0,$$

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cos^2 x + \ldots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0$$

называются *однородными относительно* $\sin x$ и $\cos x$. Они обладают тем свойством, что сумма показаний степеней при $\sin x$ и $\cos x$ у всех членов уравнения одинакова. Делением на $\cos x,\ \cos^2 x, \ldots, \cos^n x$ соответственно уравнения приводятся к алгебраическим уравнениям относительно tgx. При этом, конечно, предполагается, что коэффициент $a_0 \neq 0$. В результате получаем равносильное уравнение, так как разделили на $\cos x \neq 0$ (если бы $\cos x = 0$, то из исходного уравнения следует, что и $\sin x = 0$, а это невозможно, так как $\sin x$ и $\cos x$ при одном и том же значении x в нуль не обращаются, ибо всегда $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

Уравнение $a_0\sin^2 x + a_1\sin x\cos x + a_2\cos^2 x = b$ легко сводится к однородному, если правую часть представить в виде $b = b\cdot 1 = b(\sin^2 x + \cos^2 x)$. После очевидных преобразований получаем

$$(a_0 - b)\sin^2 x + a_1\sin x\cos x + (a_2 - b)\cos^2 x = 0.$$



Пример 1. Решить уравнение:

$$3\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0.$$

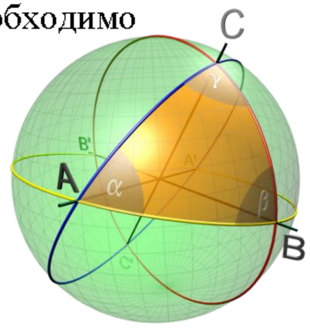
Решение. Это уравнение является однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$. Поэтому, разделив его на $\cos^2 x$ $(\cos x \neq 0)$, получим $3tg^2x - 2tgx - 1 = 0$. Введем новую переменную $tgx = t$ и решим квадратное уравнение $3t^2 - 2t - 1 = 0$.

Его корни $t_1 = 1,\ t_2 = -\frac{1}{3}$. Получили два простейших тригонометрических уравнения $tgx = 1,\ tgx = -\frac{1}{3}$. Решая их, найдем: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$ или $x = -arctg\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k;\quad -arctg\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Разложение на множители

При решении уравнений этим методом нужно пользоваться известными способами разложения на множители алгебраических выражений. Необходимо также знать уже приведенные формулы и дополнительно:



$$tg(x \pm y) = \frac{tgx \pm tgy}{1 \mp tgxtgy}; \qquad \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x;$$
$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

Пример 1. Решить уравнение $\sin 2x - \cos x = 0$.

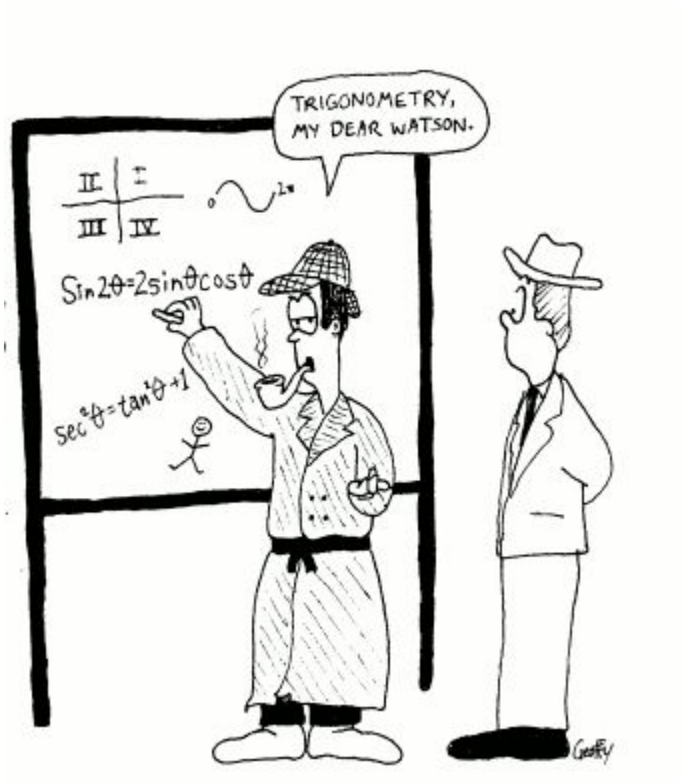
Решение. Применяя формулу синуса двойного угла, получим $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, $\cos x(2\sin x - 1) = 0$. Полученное уравнение равносильно совокупности уравнений: $\cos x = 0,\ 2\sin x - 1 = 0$.

Решение 1-го уравнения: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

Уравнение $2\sin x - 1 = 0$ преобразуем к виду $\sin x = \frac{1}{2}$, имеющему решение $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z$.

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение



При решение уравнений данным способом необходимо знать формулы:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\quad \operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

Пример. Решить уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)-\sin 2x=0$.

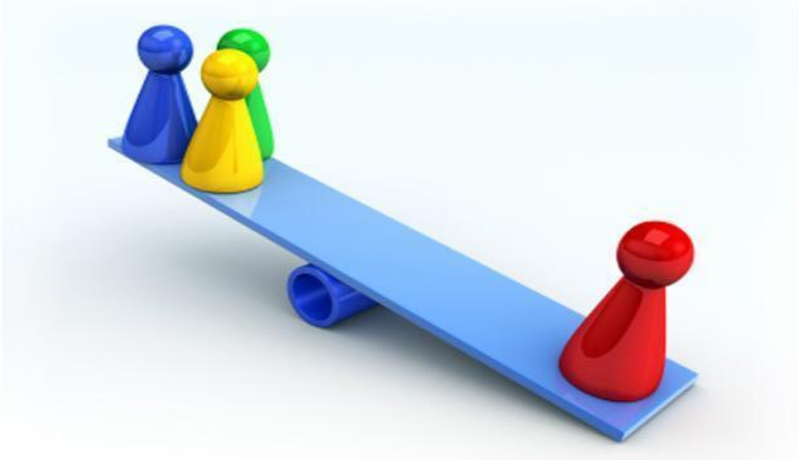
Решение. По формулам приведения $\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\sin 3x$. Получаем уравнение $\sin 3x-\sin 2x=0$. Пользуясь, выше приведенной формулой, преобразуем разность синусов в произведение:

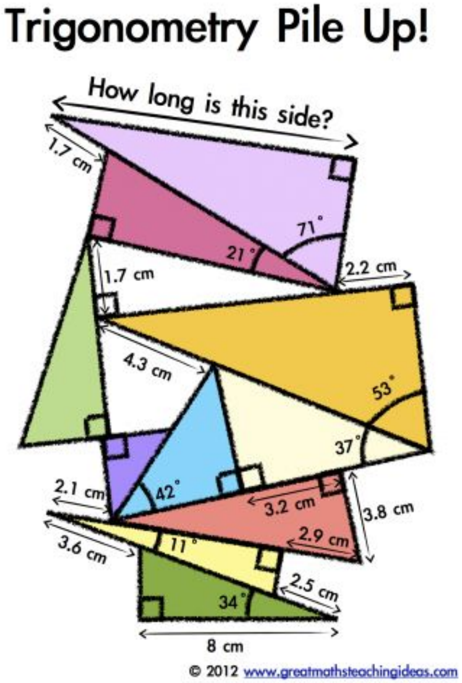
$$\sin 3x-\sin 2x=2\sin\frac{3x-2x}{2}\cos\frac{3x+2x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}.$$

В результате имеем уравнение $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}=0$, откуда $\sin\frac{x}{2}=0$ или $\cos\frac{5x}{2}=0$

Решая эти уравнения, получим $x=2\pi k,\ k\in Z$; $x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}k,\ k\in Z$.

Ответ: $2\pi k,\ \frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}k,\ k\in Z$.





Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)],$$

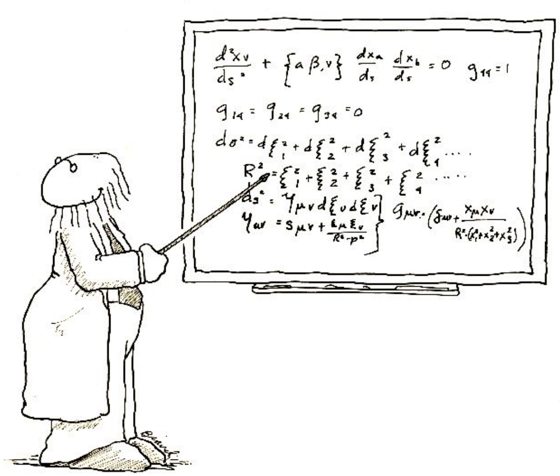
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)].$$

При решение уравнений данным способом необходимо знать формулы:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}.$$



Пример. Решить уравнение $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$.

Решение. Преобразуем по выше приведенным формулам левую и правую части уравнения. В результате получим:

$$\frac{1}{2}\left[\cos(2x-6x)-\cos(2x+6x)\right]=\frac{1}{2}\left[\cos(x-3x)+\cos(x+3x)\right],$$

иначе $\cos 4x - \cos 8x = \cos 2x + \cos 4x$, то есть $\cos 8x + \cos 2x = 0$. Преобразовывая теперь в произведение сумму косинусов, будем иметь $2\cos 5x \cos 3x = 0$, откуда $\cos 5x = 0,\ \ x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5},\ k \in Z$ или $\cos 3x = 0,\ \ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5},\ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z$.

Использование формул понижения степени

При решение уравнений данным способом необходимо знать формулы:

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \quad 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Пример. Решить уравнение:

$$\cos^2 3x+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)=\cos^2 7x+\cos^2 9x+\cos\frac{3\pi}{2}.$$

Решение. Сразу заметим, что $\cos\frac{3\pi}{2}=0$, а $\sin\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)=\cos 5x$, и уравнение принимает вид $\cos^2 3x+\cos 5x=\cos^2 7x+\cos^2 9x$. Используя, выше приведенные формулы, перепишем его в виде

$$\frac{1}{2}(1+\cos 6x)+\frac{1}{2}(1+\cos 10x)=\frac{1}{2}(1+\cos 14x)+\frac{1}{2}(1+\cos 18x),$$

то есть $\cos 6x+\cos 10x=\cos 14x+\cos 18x$. Преобразуем суммы косинусов в произведения, тогда получим

$$2\cos 8x\cos 2x = 2\cos 16x\cos 2x,$$
$$\cos 2x(\cos 16x-\cos 8x)=0.$$

Равенство одноименных тригонометрических функций

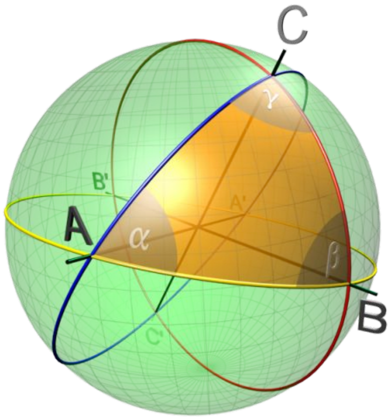
Данным методом решаются уравнения вида $\sin\alpha = \sin\beta,\ \ \cos\alpha = \cos\beta,\ \ tg\alpha = tg\beta$.

Т еорема 1. Для того чтобы синусы двух углов были равны, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий

$$\left[\begin{array}{l}\alpha + \beta = (2n+1)\pi \\ \alpha - \beta = 2n\pi,\ n \in Z\end{array}\right.$$

Т еорема 2. Для того чтобы косинусы двух углов были равны, необходимо и достаточно выполнения одного из условий

$$\left[\begin{array}{l}\alpha + \beta = 2n\pi \\ \alpha - \beta = 2n\pi,\ n \in Z\end{array}\right.$$



Теорема 3. Для того чтобы тангенсы двух углов были равны, необходимо и достаточно, одновременное выполнение двух условий

$$\begin{cases} \alpha \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, \quad \beta \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \\ \alpha - \beta = n\pi, \ n \in Z \end{cases}.$$

Пример. Решить уравнение $\sin 3x = \sin 5x$.

Решение. На основании условий равенства двух синусов имеем:

$$\left[\begin{array}{l} 5x - 3x = 2k\pi \\ 3x + 5x = (2k+1)\pi, \ k \in Z \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{(2k+1)\pi}{8}, \ k \in Z \end{array}\right..$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{(2k+1)\pi}{8}, \ k \in Z \end{array}\right.$

Введение вспомогательного аргумента

Метод основан на преобразовании выражения $a\sin x + b\cos x$, где a и b – постоянные, не обращающиеся в нуль одновременно.

Введем угол φ, положив

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Тогда:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) = \sqrt{a^2+b^2}\,(\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi) = \sqrt{a^2$$

,

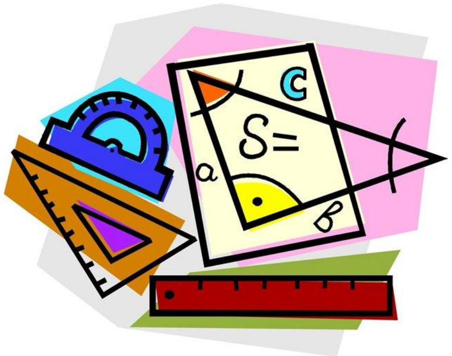
где φ находится из уравнения $tg\varphi = \frac{b}{a}$.

Пример. Решить уравнение $\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1$.

Решение. Так как $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$, то $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ уже являются соответственно косинусом и синусом определенного угла; ясно, что этот угол $\frac{\pi}{3}$. Таким образом, получаем

$$\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}=1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1.$$

Решая это уравнение, имеем $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$.



Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$.

Уравнение, рассмотренное в последнем примере, имеет вид $a\sin x+b\cos x=c$. Однако решить такие уравнения можно и другими методами.

Метод рационализации для уравнения вида

Известно, что если $\alpha \neq (2n+1)\pi,\ n \in Z$, то $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ tg\alpha$ выражаются рационально через $tg\frac{\alpha}{2}$.

$$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

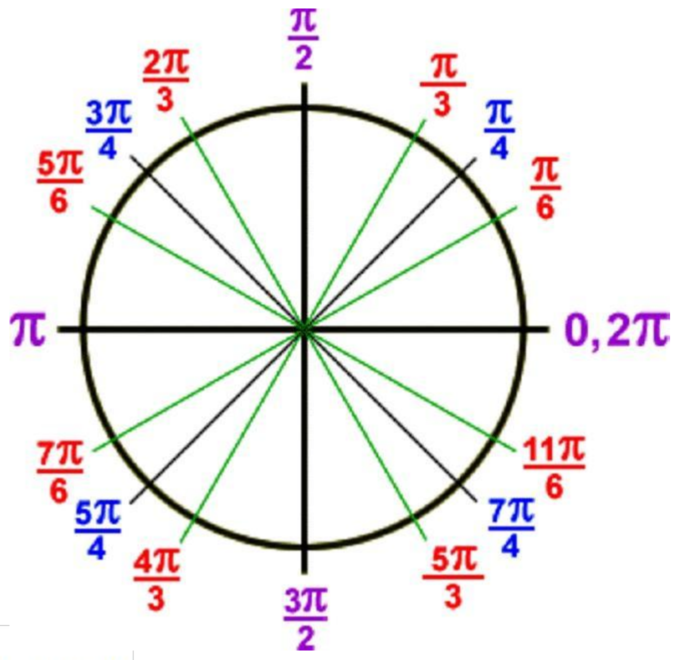
Вводим вспомогательное неизвестное так, чтобы после подстановки получилось рациональное уравнение относительно вспомогательного неизвестного.

Данное уравнение можно переписать в виде

$$a\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}+b\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=c.$$

Положим $tg\frac{\alpha}{2}=t$, тогда получим

$$a\frac{2t}{1+t^2}+b\frac{1-t^2}{1+t^2}=c.$$

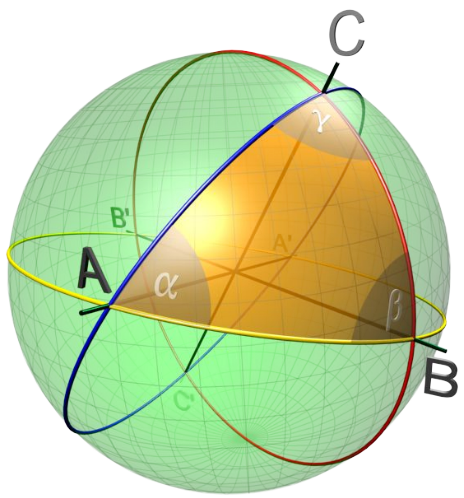


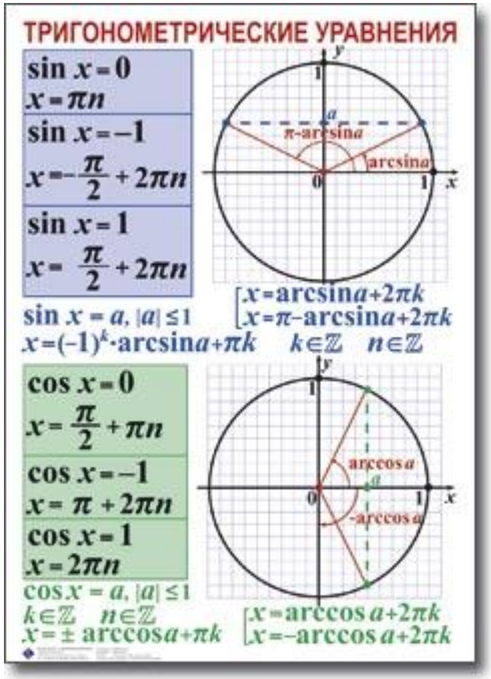
Решим данное уравнение и получим следующие ответы

1. если $a^2+b^2<c^2$, то у уравнения нет корней;

2. если $a^2+b^2\geq c^2,\ c\neq -b$, то $x=2arctg\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}+2n\pi,\ n\in Z$;

3. если $c\neq -b$, то $x=\begin{cases}(2n+1)\pi\\ -2arctg\frac{b}{a}+2n\pi,\ n\in Z\end{cases}$.





Пример. Решить уравнение $3\sin x + 4\cos x = 3$.

Решение. $a = 3,\ b = 4,\ c = 3,\ a^2 + b^2 > c^2$ - уравнение имеет решение.

$$3\frac{2t}{1+t^2} + 4\frac{1-t^2}{1+t^2} = 3 \;\Rightarrow\; 7t^2 - 6t - 1 = 0,\ t_{1,2} = \frac{3 \pm 4}{7}.$$

1) $t_1 = 1,\ \ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ \ x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in Z$;

2) $t_2 = -\frac{1}{7},\ \ \frac{x}{2} = -arctg\frac{1}{7} + n\pi,\ \ x = -2arctg\frac{1}{7} + 2n\pi,\ n \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ x = -2arctg\frac{1}{7} + 2n\pi,\ n \in Z$.

Приведение к однородному для уравнения вида

Данное уравнение перепишем в виде

$$2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=c\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right),$$

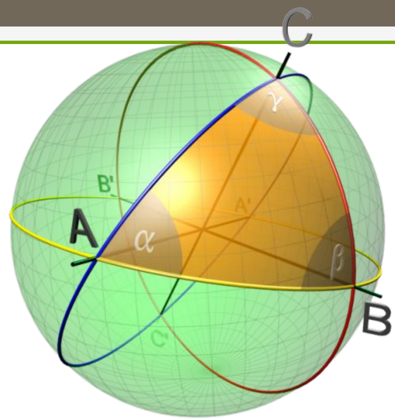
т.е. имеем однородное уравнение

$$(c+b)\sin^2\frac{x}{2}-2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+(c-b)\cos^2\frac{x}{2}=0.$$

Подведем итоги!

Долгое время тригонометрия носила чисто геометрический характер, т. е. факты, которые мы сейчас формулируем в терминах тригонометрических функций, формулировались и доказывались с помощью геометрических понятий и утверждений. Такою она была еще в средние века, хотя иногда в ней использовались и аналитические методы, особенно после появления логарифмов. Начиная с XVII в., тригонометрические функции начали применять к решению уравнений, задач механики, оптики, электричества, радиотехники, для описания колебательных процессов, распространения волн, движения различных механизмов, для изучения переменного электрического тока и т. д. Поэтому тригонометрические функции всесторонне и глубоко исследовались, и приобрели важное значение для всей математики.

В заключении:



- Тригонометрические формулы применяются практически во всех областях геометрии, физики, инженерного дела. Большое значение имеет техника триангуляции, позволяющая измерять расстояния до недалёких звезд в астрономии, между ориентирами в географии. Применяется также в таких отраслях как техника навигации; теория музыки; акустика; теория чисел; экономика, анализ финансовых рынков; электроника; теория вероятности; статистика и др.