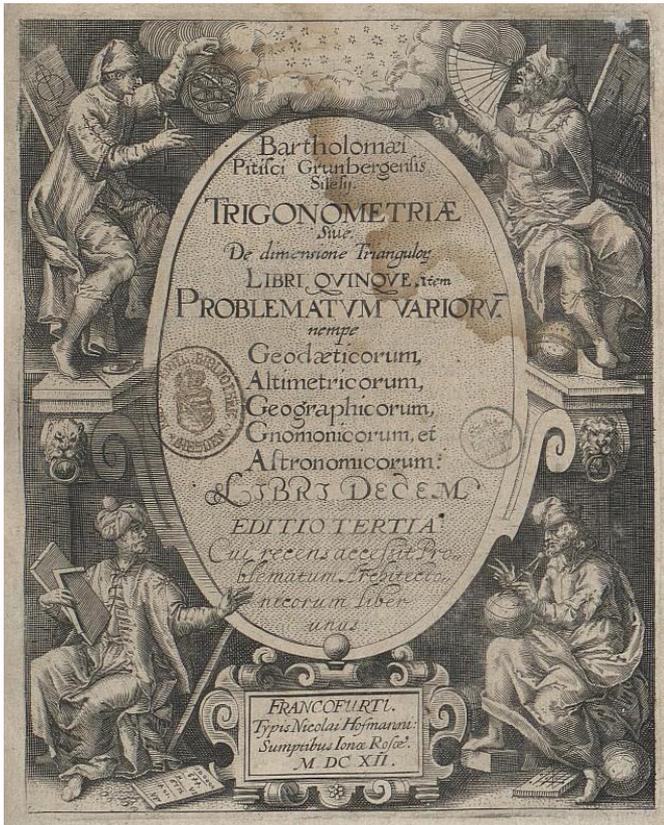


Тригонометрия и ее СОЗДАТЕЛЬ



Тригонометрия (от греч. τριγωνον (треугольник) и греч. μέτρος (меряю), то есть измерение треугольников) — раздел математики, в котором изучаются тригонометрические функции и их использование в геометрии. Данный термин впервые появился в 1595 г. как название книги немецкого математика Бартоломеуса Питискуса (1561—1613), а сама наука ещё в глубокой древности использовалась для расчётов в астрономии, архитектуре и геодезии (науке, исследующей размеры и форму земли).

Бартоломеус Питискус

**Бартоломéус
Питíскус** (или **Бартоломео
Питиск**, нем. *Bartholomäus Pitiscus*,
1561—1613) —
немецкий математик, астроном,
теолог-кальвинист. Внёс вклад в
развитие тригонометрии, в том
числе предложил сам термин
«тригонометрия» в качестве
названия этой науки.



Тригонометрические уравнения. Определение

- ▣ Тригонометрическим уравнением называется уравнение, содержащее переменную под знаком тригонометрических функций.
- ▣ Простейшими тригонометрическими уравнениями являются уравнения вида.

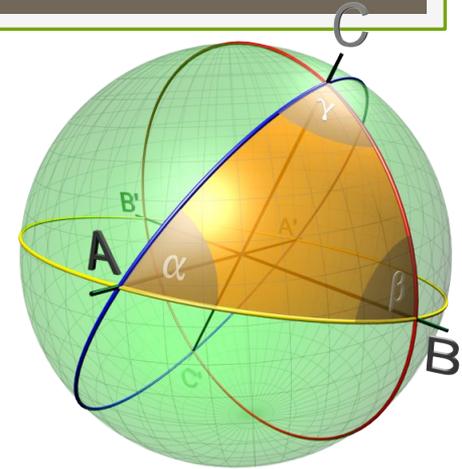
$$\sin x = a,$$

$$\cos x = a,$$

$$\operatorname{tg} x = a,$$

$$\operatorname{ctg} x = a.$$

Уравнение $\sin x = a$



Уравнение $\sin x = a$.

Так как множество значений функции $y = \sin x$ - отрезок $[-1; 1]$, то данное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда

$$|a| \leq 1.$$

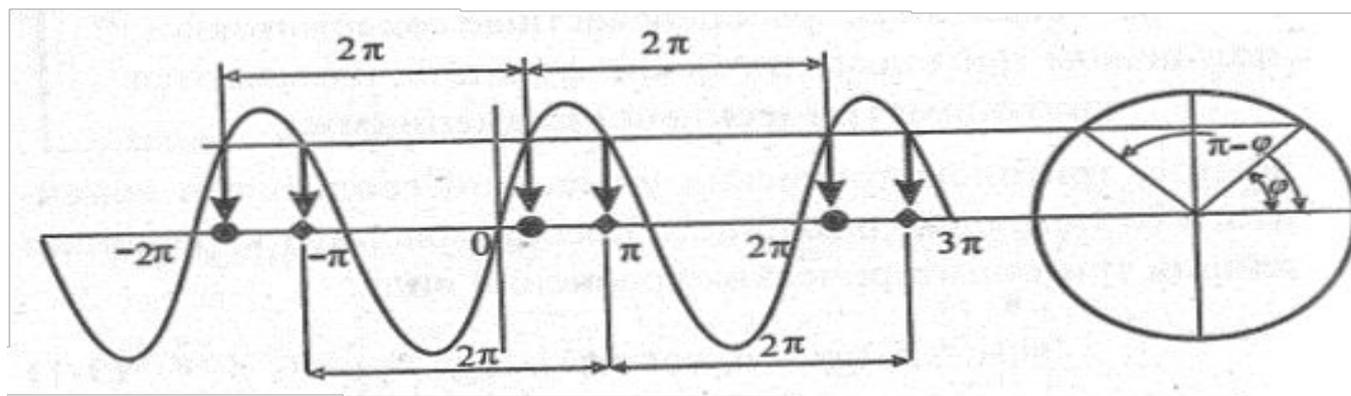
Далее, из-за периодичности функции $y = \sin x$, каждому значению a соответствует бесконечное множество решений. Поэтому все решения описываются формулами:

$$\begin{cases} x_1 = \arcsin a + 2\pi k \\ x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

или обобщенной формулой

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

На рисунке 1 члены первой последовательности отмечены кружками, а второй - квадратами.



Пример. Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решение. $x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \pi k, k \in Z \Rightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

Уравнение $\cos x = a$.

Данное уравнение имеет тогда и только тогда, когда

$$|a| \leq 1$$

Множество решений записывается в виде

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z$$

Заметим, что $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Пример. Решить уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

Решение. $x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k, k \in Z \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

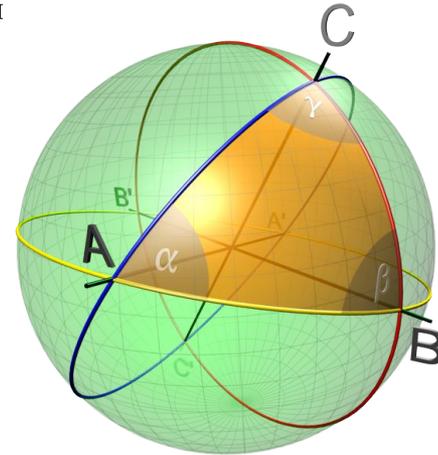
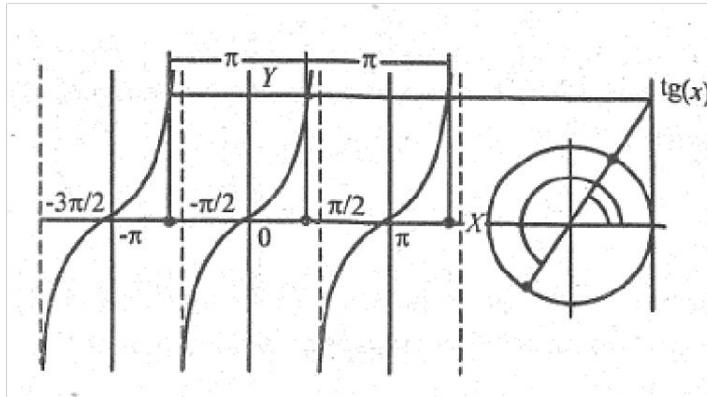
Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$



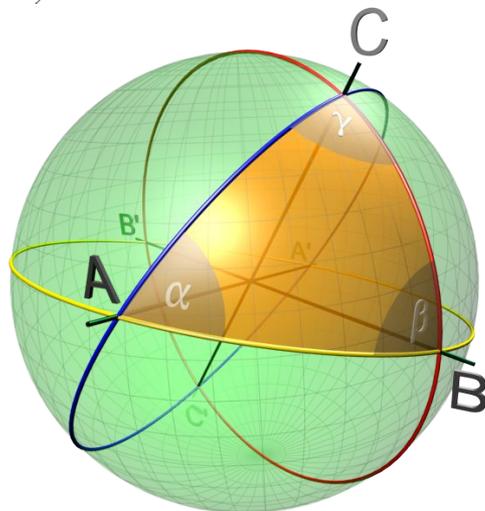
Уравнение $\text{tg}x = a$

Данное уравнение разрешимо при любом a . Все решения задаются формулой

$$x = \text{arctg}a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Заметим, что $\text{arctg}(-a) = -\text{arctg}a$.



Пример. Решить уравнение $\text{tg}x = \sqrt{3}$.

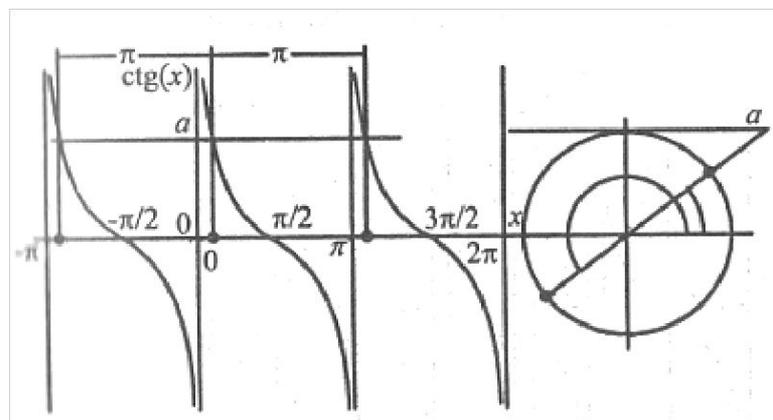
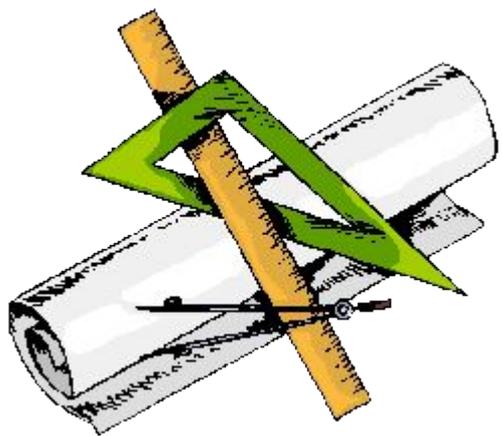
Решение. $x = \text{arctg}\sqrt{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Уравнение $\text{ctg}x = a$.

Данное уравнение разрешимо при любом a . Все решения задаются формулой

$$x = \text{arccctg}a + \pi k, k \in Z$$



Пример. Решить уравнение $\text{ctg}x = \sqrt{3}$.

Решение. $x = \text{arccctg}\sqrt{3} + \pi k, k \in Z \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

Основные методы решения

- Любое тригонометрическое уравнение в процессе решения с помощью надлежащих преобразований должно быть приведено к простейшим. Наиболее часто при решении тригонометрических уравнений применяются следующие методы:
 - разложение на множители;
 - способ замены (сведение к алгебраическим уравнениям);
 - сведение к уравнениям, однородным относительно \sin и \cos ;
 - преобразование суммы тригонометрических функций в произведение;
 - преобразование произведения тригонометрических функций в сумму;
 - использование формул понижения степени;
 - равенство одноименных тригонометрических функций;
 - равенство одноименных тригонометрических функций;
 - введение вспомогательного аргумента.

Способ замены

При решении уравнений этим методом необходимо знать формулы:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

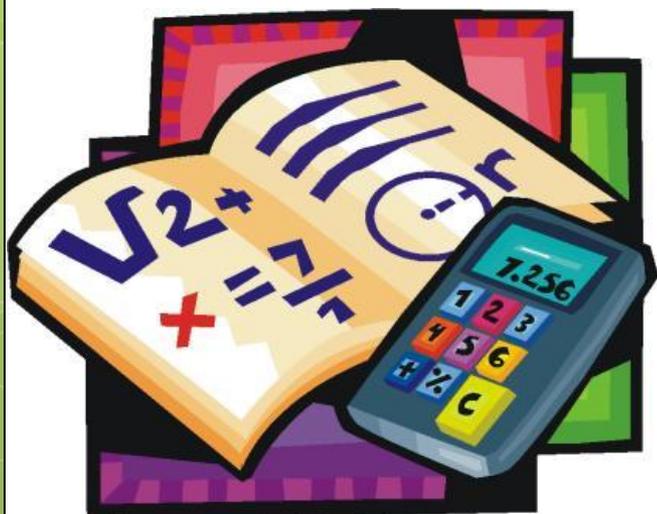
$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}; \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x};$$

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x; \quad 1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x;$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}; \quad \sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x};$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}; \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x;$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$



Пример 1. Решить уравнение $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$.

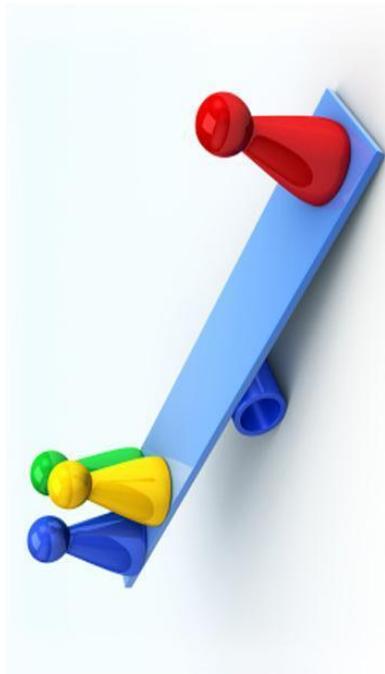
Решение. Это уравнение является квадратным относительно $\cos x$. Поэтому сделаем замену $\cos x = t$. В результате получим уравнение $t^2 + t - 2 = 0$. Его корни: $t_1 = 1, t_2 = -2$, то есть получаем уравнение $\cos x = 1$ или $\cos x = -2$. Первое уравнение дает $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Второе уравнение не имеет корней.

Ответ: $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 2 Решить уравнение $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$.

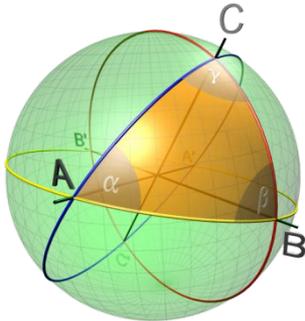
Решение. Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то уравнение можно представить в виде $6(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 7 = 0$; $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$. Сделаем замену $t = \sin x$. Получим квадратное уравнение $6t^2 - 5t + 1 = 0$, решая которое, имеем: $D = 25 - 6 \cdot 4 = 1, t_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12}$, то есть $t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{1}{3}$. Таким образом, получим два простейших уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = \frac{1}{3}$. Решая их, имеем $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ или $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$



Однородные уравнения

Уравнения:



$$a_0 \sin x + a_1 \cos x = 0,$$

$$a_0 \sin^2 x + a_1 \sin x \cos x + a_2 \cos^2 x = 0,$$

$$a_0 \sin^3 x + a_1 \sin^2 x \cos x + a_2 \sin x \cos^2 x + a_3 \cos^3 x = 0,$$

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cos^2 x + \dots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0$$

называются *однородными относительно $\sin x$ и $\cos x$* . Они обладают тем свойством, что сумма показаний степеней при $\sin x$ и $\cos x$ у всех членов уравнения одинакова. Делением на $\cos x, \cos^2 x, \dots, \cos^n x$ соответственно уравнения приводятся к алгебраическим уравнениям относительно $\operatorname{tg} x$. При этом, конечно, предполагается, что коэффициент $a_0 \neq 0$. В результате получаем равносильное уравнение, так как разделили на $\cos x \neq 0$ (если бы $\cos x = 0$, то из исходного уравнения следует, что и $\sin x = 0$, а это невозможно, так как $\sin x$ и $\cos x$ при одном и том же значении x в нуль не обращаются, ибо всегда $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

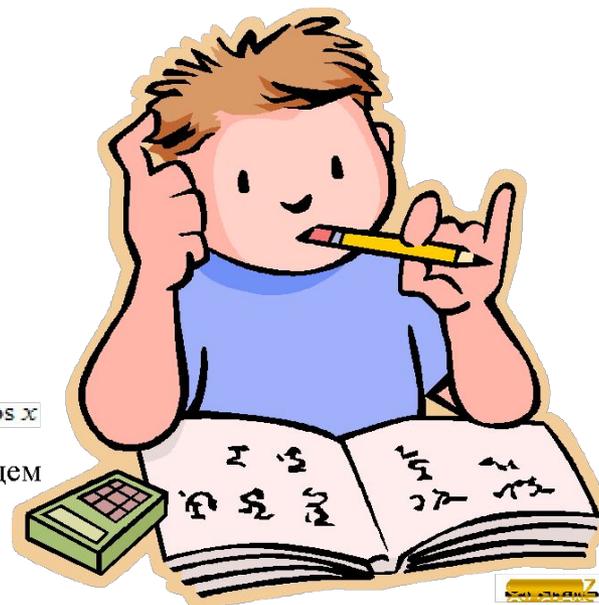
Уравнение $a_0 \sin^2 x + a_1 \sin x \cos x + a_2 \cos^2 x = b$ легко сводится к однородному, если правую часть представить в виде $b = b \cdot 1 = b(\sin^2 x + \cos^2 x)$. После очевидных преобразований получаем

$$(a_0 - b) \sin^2 x + a_1 \sin x \cos x + (a_2 - b) \cos^2 x = 0$$

Пример 1. Решить уравнение:

$$3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$$

Решение. Это уравнение является однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$. Поэтому, разделив его на $\cos^2 x$ ($\cos x \neq 0$), получим $3 \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 1 = 0$. Введем новую переменную $\operatorname{tg} x = t$ и решим квадратное уравнение $3t^2 - 2t - 1 = 0$.



Его корни $t_1 = 1, t_2 = -\frac{1}{3}$. Получили два простейших тригонометрических

уравнения $\operatorname{tg} x = 1, \operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}$. Решая их,

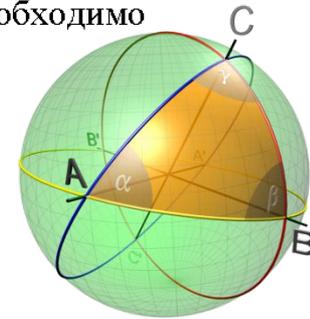
найдем: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$ или $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k, -\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$.

Разложение на множители

При решении уравнений этим методом нужно пользоваться известными способами разложения на множители алгебраических выражений. Необходимо также знать уже приведенные формулы и дополнительно:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{tg}x \pm \operatorname{tg}y}{1 \mp \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y}; & \sin 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x; \\ \cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x. \end{aligned}$$



Пример 1. Решить уравнение $\sin 2x - \cos x = 0$.

Решение. Применяя формулу синуса двойного угла, получим $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\cos x(2 \sin x - 1) = 0$. Полученное уравнение равносильно совокупности уравнений: $\cos x = 0$, $2 \sin x - 1 = 0$.

Решение 1-го уравнения: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Уравнение $2 \sin x - 1 = 0$ преобразуем к виду $\sin x = \frac{1}{2}$, имеющему решение $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k, (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

При решении уравнений данным
способом необходимо знать
формулы:



$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

Пример. Решить уравнение

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - \sin 2x = 0$$

Решение. По формулам приведения $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \sin 3x$.
Получаем уравнение $\sin 3x - \sin 2x = 0$.
Пользуясь выше приведенной формулой, преобразуем разность синусов в произведение:

$$\sin 3x - \sin 2x = 2 \sin \frac{3x - 2x}{2} \cos \frac{3x + 2x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2}$$

В результате имеем уравнение

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2} = 0$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0$$

$$\text{или } \cos \frac{5x}{2} = 0$$

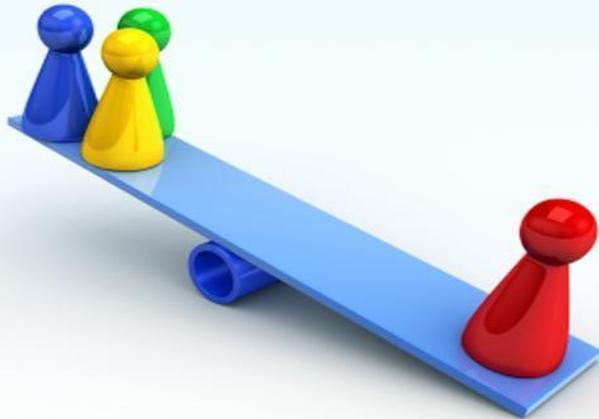
Решая эти уравнения, получим

$$x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

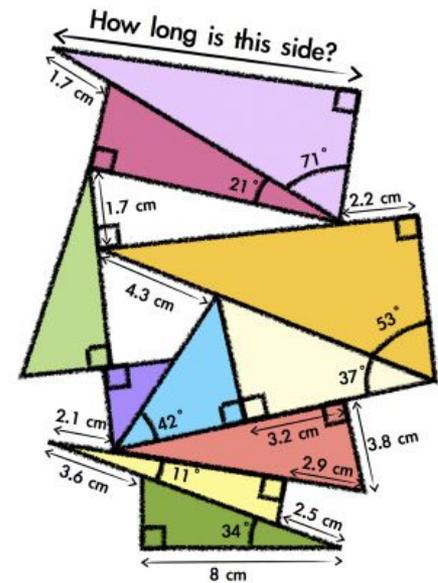
$$x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$2\pi k, \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}k, k \in \mathbb{Z}$$



Trigonometry Pile Up!



Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

При решении уравнений данным способом необходимо знать формулы:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,\end{aligned}$$

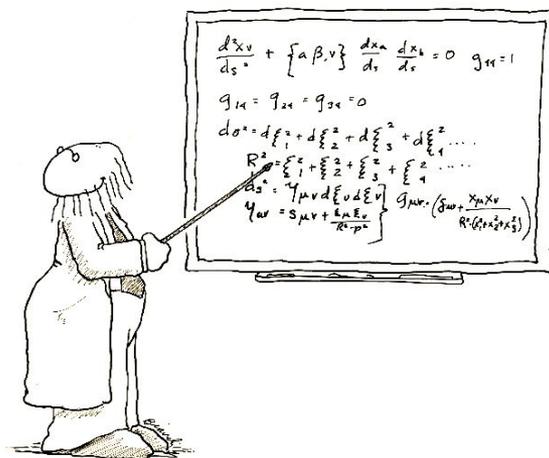
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}, \quad \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}.$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)].$$



Пример. Решить уравнение $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$.

Решение. Преобразуем по выше приведенным формулам левую и правую части уравнения. В результате получим:

$$\frac{1}{2}[\cos(2x - 6x) - \cos(2x + 6x)] = \frac{1}{2}[\cos(x - 3x) + \cos(x + 3x)],$$

иначе $\cos 4x - \cos 8x = \cos 2x + \cos 4x$, то есть $\cos 8x + \cos 2x = 0$. Преобразовывая теперь в произведение сумму косинусов, будем иметь $2\cos 5x \cos 3x = 0$, откуда

$$\cos 5x = 0, \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, \quad k \in Z \quad \text{или} \quad \cos 3x = 0, \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, \quad k \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$.

Использование формул понижения степени

При решении уравнений данным способом необходимо знать формулы:

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Пример. Решить уравнение:

$$\cos^2 3x + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + 5x \right) = \cos^2 7x + \cos^2 9x + \cos \frac{3\pi}{2}$$

Решение. Сразу заметим, что $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$, а $\sin \left(\frac{\pi}{2} + 5x \right) = \cos 5x$, и уравнение принимает вид $\cos^2 3x + \cos^2 5x = \cos^2 7x + \cos^2 9x$. Используя, выше приведенные формулы, перепишем его в виде

$$\frac{1}{2}(1 + \cos 6x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 10x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 14x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 18x),$$

то есть $\cos 6x + \cos 10x = \cos 14x + \cos 18x$. Преобразуем суммы косинусов в произведения, тогда получим

$$\begin{aligned} 2 \cos 8x \cos 2x &= 2 \cos 16x \cos 2x, \\ \cos 2x (\cos 16x - \cos 8x) &= 0. \end{aligned}$$



Равенство одноименных тригонометрических функций

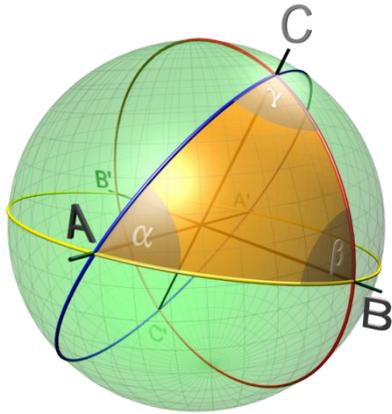
Данным методом решаются уравнения вида $\sin \alpha = \sin \beta, \cos \alpha = \cos \beta, \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$.

Теорема 1. Для того чтобы синусы двух углов были равны, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий

$$\begin{cases} \alpha + \beta = (2n+1)\pi \\ \alpha - \beta = 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Теорема 2. Для того чтобы косинусы двух углов были равны, необходимо и достаточно выполнения одного из условий

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2n\pi \\ \alpha - \beta = 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$



Теорема 3. Для того чтобы тангенсы двух углов были равны, необходимо и достаточно, одновременное выполнение двух условий

$$\begin{cases} \alpha \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad \beta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2} \\ \alpha - \beta = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Пример. Решить уравнение $\sin 3x = \sin 5x$.

Решение. На основании условий равенства двух синусов имеем:

$$\begin{cases} 5x - 3x = 2k\pi \\ 3x + 5x = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ ИЛИ } \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{8}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{8}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Введение вспомогательного аргумента

Метод основан на преобразовании выражения $a \sin x + b \cos x$, где a и b – постоянные, не обращающиеся в нуль одновременно.

Введем угол φ , положив

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Тогда:

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$$

где φ находится из уравнения $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$.

Пример. Решить уравнение $\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1$.

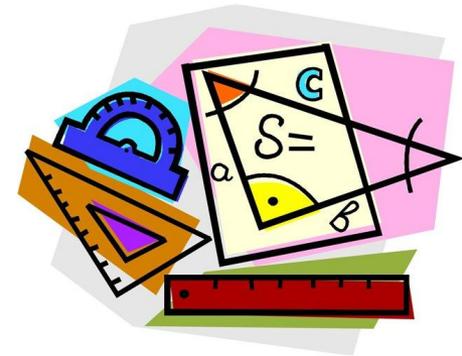
Решение. Так как $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$, то $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ уже являются соответственно косинусом и синусом определенного угла; ясно, что этот угол $\frac{\pi}{3}$. Таким образом, получаем

$$\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

Решая это уравнение, имеем $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Уравнение, рассмотренное в последнем примере, имеет вид $a\sin x + b\cos x = c$. Однако решить такие уравнения можно и другими методами.



Метод рационализации для уравнения вида

Известно, что если $|\alpha \neq (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}|$, то $|\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha|$ выражаются рационально через $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.



$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$
$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Вводим вспомогательное неизвестное так, чтобы после подстановки получилось рациональное уравнение относительно вспомогательного неизвестного.

Данное уравнение можно переписать в виде

$$a \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + b \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = c$$

Положим $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t$, тогда получим

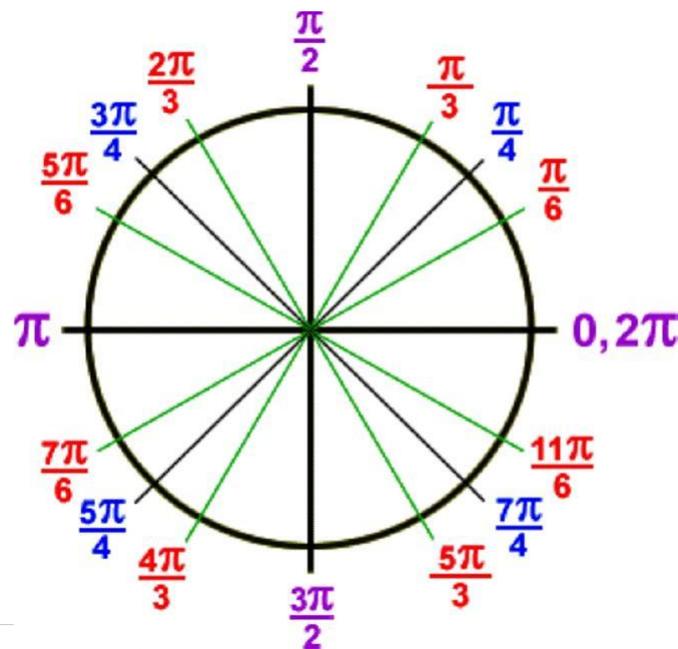
$$a \frac{2t}{1+t^2} + b \frac{1-t^2}{1+t^2} = c$$

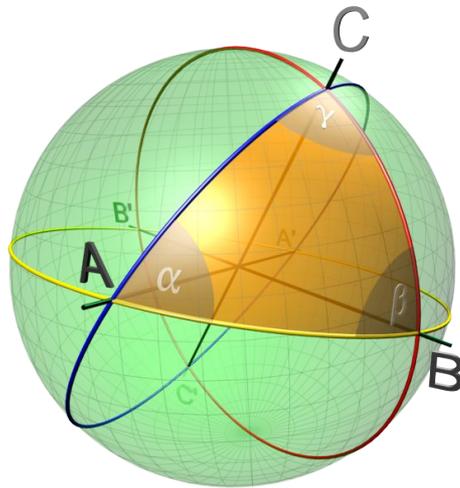
Решим данное уравнение и получим следующие ответы

1. если $a^2 + b^2 < c^2$, то у уравнения нет корней;

2. если $a^2 + b^2 \geq c^2, c \neq -b$, то $x = 2 \arctg \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$;

3. если $c \neq -b$, то $x = \begin{cases} (2n+1)\pi \\ -2 \arctg \frac{b}{a} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$.





Пример. Решить уравнение $3\sin x + 4\cos x = 3$.

Решение. $a=3, b=4, c=3, a^2 + b^2 > c^2$ - уравнение имеет решение.

$$3 \frac{2t}{1+t^2} + 4 \frac{1-t^2}{1+t^2} = 3 \Rightarrow 7t^2 - 6t - 1 = 0, t_{1,2} = \frac{3 \pm 4}{7}$$

1) $t_1 = 1, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + n\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$;

2) $t_2 = -\frac{1}{7}, \frac{x}{2} = -\operatorname{arctg} \frac{1}{7} + n\pi, x = -2\operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, x = -2\operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

| | |
|--|--|
| $\sin x = 0$ $x = \pi n$ | |
| $\sin x = -1$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ | |
| $\sin x = 1$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ | |
| $\sin x = a, a \leq 1$ $x = (-1)^k \cdot \operatorname{arcsin} a + \pi k$ $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$ | $[x = \operatorname{arcsin} a + 2\pi k$ $[x = \pi - \operatorname{arcsin} a + 2\pi k$ |
| $\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ | |
| $\cos x = -1$ $x = \pi + 2\pi n$ | |
| $\cos x = 1$ $x = 2\pi n$ | |
| $\cos x = a, a \leq 1$ $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$ $x = \pm \operatorname{arccos} a + \pi k$ | $[x = \operatorname{arccos} a + 2\pi k$ $[x = -\operatorname{arccos} a + 2\pi k$ |

Приведение к однородному для уравнения вида

Данное уравнение перепишем в виде

$$2a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + b \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = c \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right),$$

т.е. имеем однородное уравнение

$$(c + b) \sin^2 \frac{x}{2} - 2a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + (c - b) \cos^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Подведем итоги!

Долгое время тригонометрия носила чисто геометрический характер, т. е. факты, которые мы сейчас формулируем в терминах тригонометрических функций, формулировались и доказывались с помощью геометрических понятий и утверждений. Такою она была еще в средние века, хотя иногда в ней использовались и аналитические методы, особенно после появления логарифмов. Начиная с XVII в., тригонометрические функции начали применять к решению уравнений, задач механики, оптики, электричества, радиотехники, для описания колебательных процессов, распространения волн, движения различных механизмов, для изучения переменного электрического тока и т. д. Поэтому тригонометрические функции всесторонне и глубоко исследовались, и приобрели важное значение для всей математики.

В заключении:

- Тригонометрические формулы применяются практически во всех областях геометрии, физики, инженерного дела. Большое значение имеет техника триангуляции, позволяющая измерять расстояния до недалёких звезд в астрономии, между ориентирами в географии. Применяется также в таких отраслях как техника навигации; теория музыки; акустика; теория чисел; экономика, анализ финансовых рынков; электроника; теория вероятности; статистика и др.

