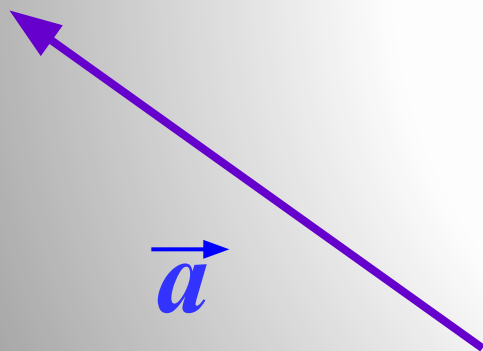
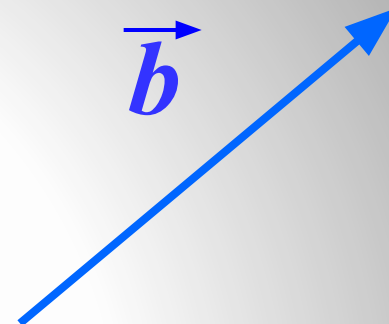
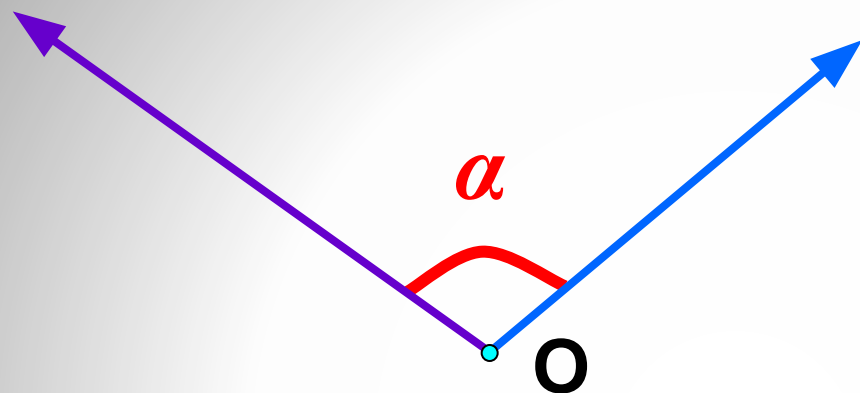


Скалярное произведение векторов

Текст изучить тему, записать в тетрадях
формулы, примеры, в конце пройти тест

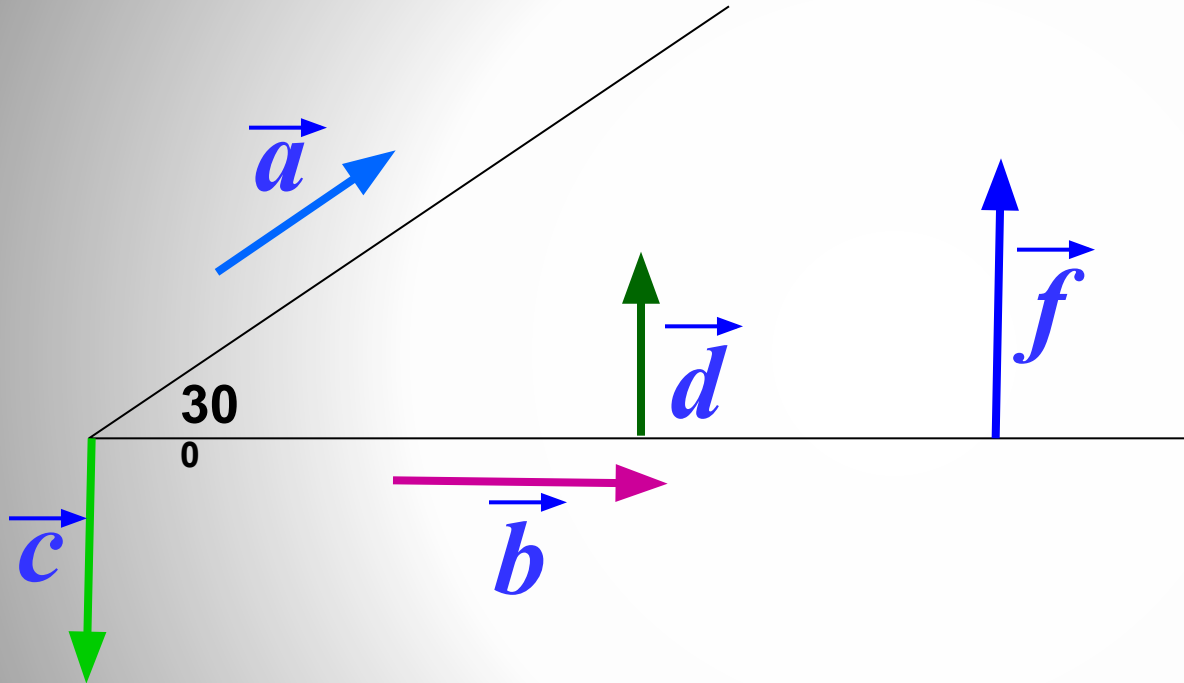
Угол между векторами



Угол между векторами \vec{a} и \vec{b}
равен α .

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = \alpha$$

Найдите угол между векторами



$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 30^\circ$$

$$\widehat{\vec{a} \vec{c}} = 120^\circ$$

$$\widehat{\vec{b} \vec{c}} = 90^\circ$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{c}} = 180^\circ$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{f}} = 0^\circ$$

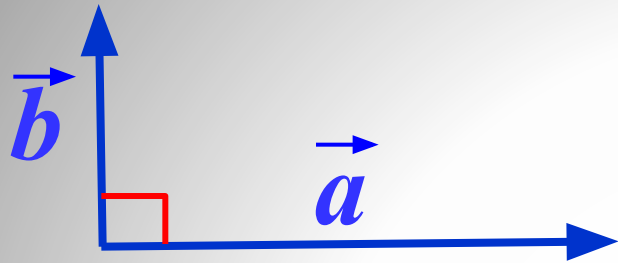
Определение

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).

Частный случай №1



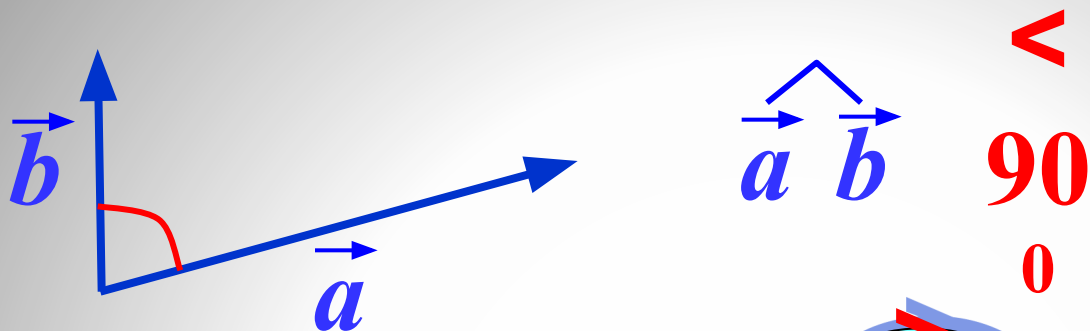
$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 90^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

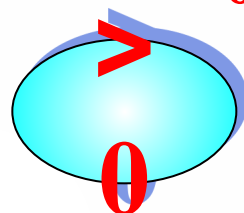
Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$

Частный случай №2



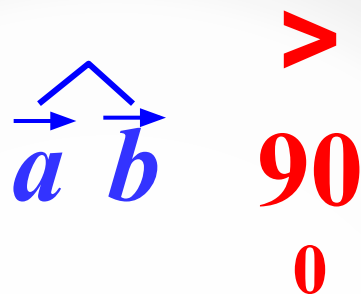
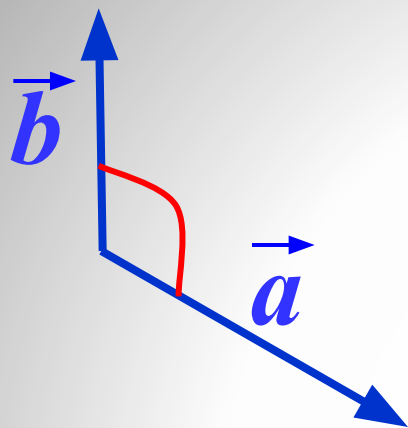
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$



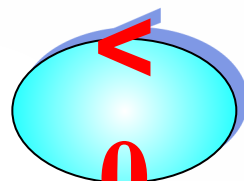
Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами **острый**.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \iff \vec{a} \vec{b} < 90^\circ$$

Частный случай №3



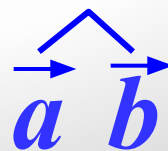
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$



<
0

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**.

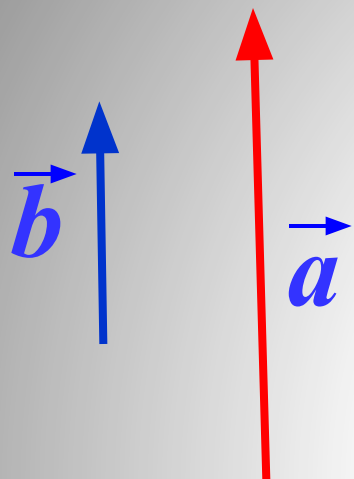
$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$$



>
90

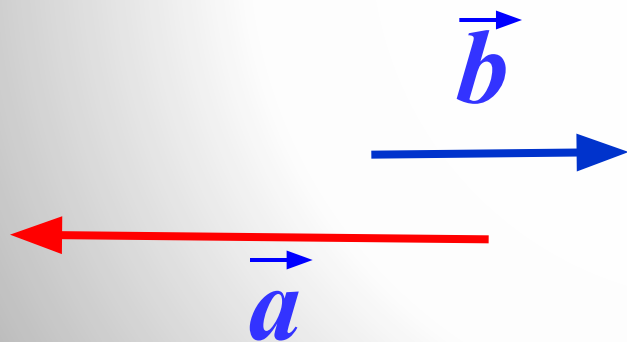
0

Частный случай №4



$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 0^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

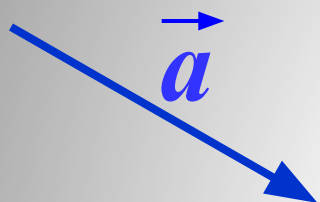


$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 180^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 180^\circ = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

Частный случай №5

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = 0^0$$



$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{a}| \cos \overset{\textcircled{1}}{0^0} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{a}|^2$$

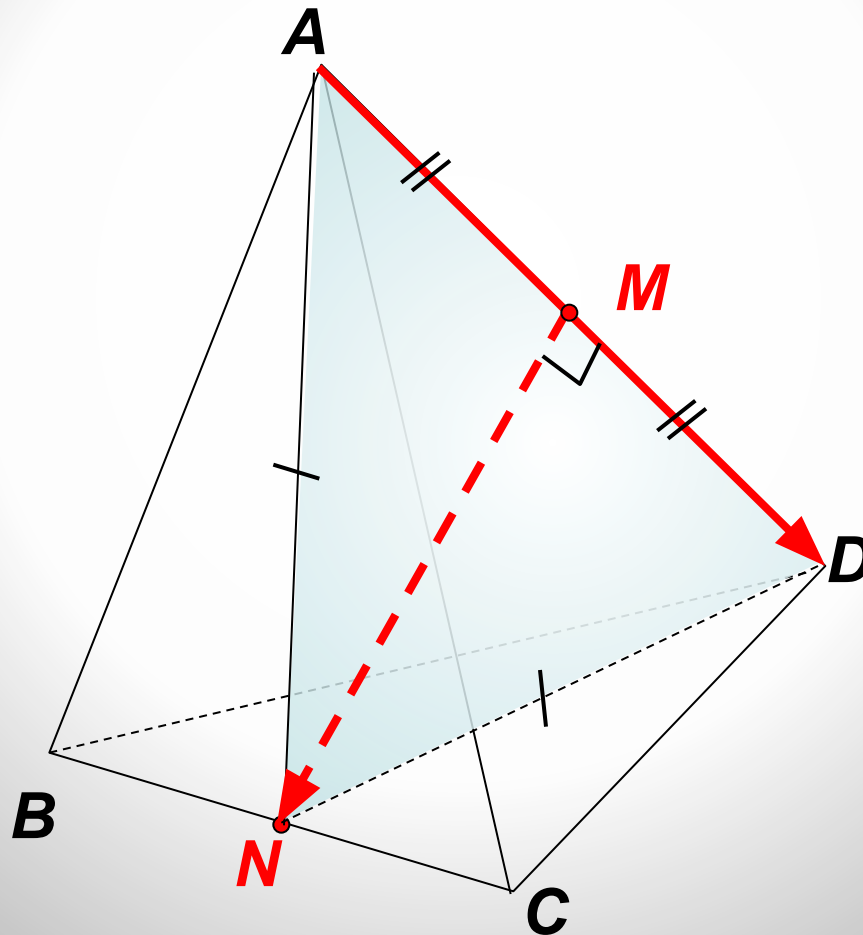
Скалярное произведение $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора \overrightarrow{a} и обозначается \overrightarrow{a}^2

Таким образом,
скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$$\overrightarrow{a}^2 = |\overrightarrow{a}|^2$$

Задача

Все ребра тетраэдра $ABCD$ равны друг другу. Точки M и N – середины ребер AD и BC . Докажите, что $\vec{MN} \cdot \vec{AD} = 0$



Формула для нахождения
скалярного произведения
через координаты векторов

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

$$\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Пример №1

Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{-6; 9; 5\} \qquad \vec{b} \{-1; 0; 7\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -6 \cdot (-1) + 9 \cdot 0 + 5 \cdot 7 = 41$$

Пример №2

Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{0; 0; 4\}$$

$$\vec{b} \{22; 1; 8\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \cdot 22 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 8 = 32$$

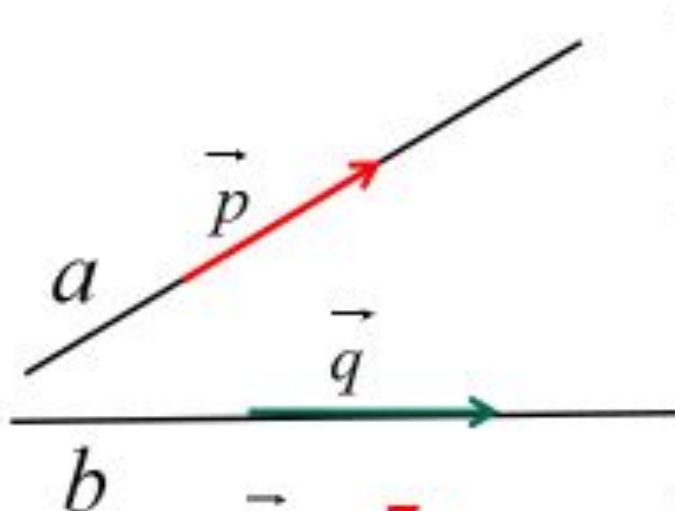
Косинус угла между ненулевыми векторами

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

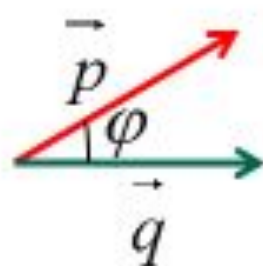
Угол между прямыми



\vec{p} - направляющий вектор прямой a

\vec{q} - направляющий вектор прямой b

φ - угол между прямыми



$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$

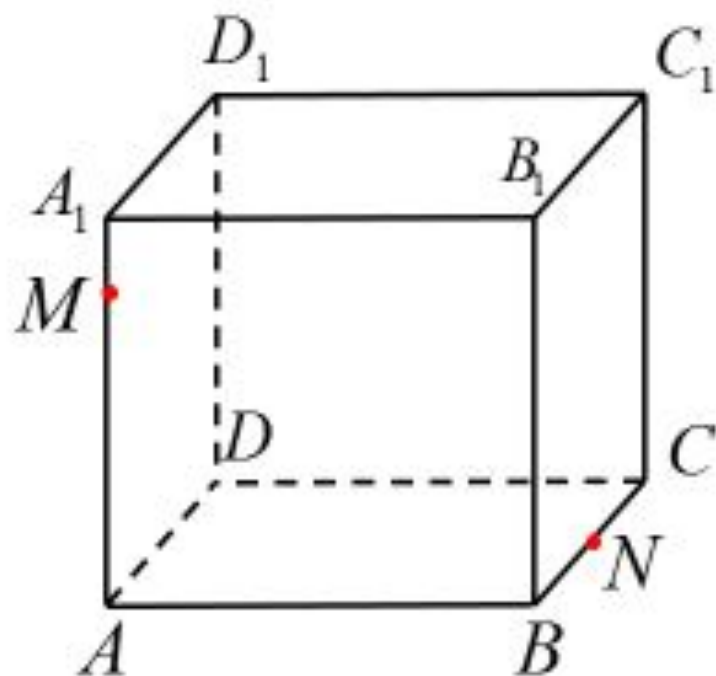
$$\cos \varphi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

№466(a)

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб

$M \in AA_1$ $AM : MA_1 = 3 : 1$

$BN = NC$



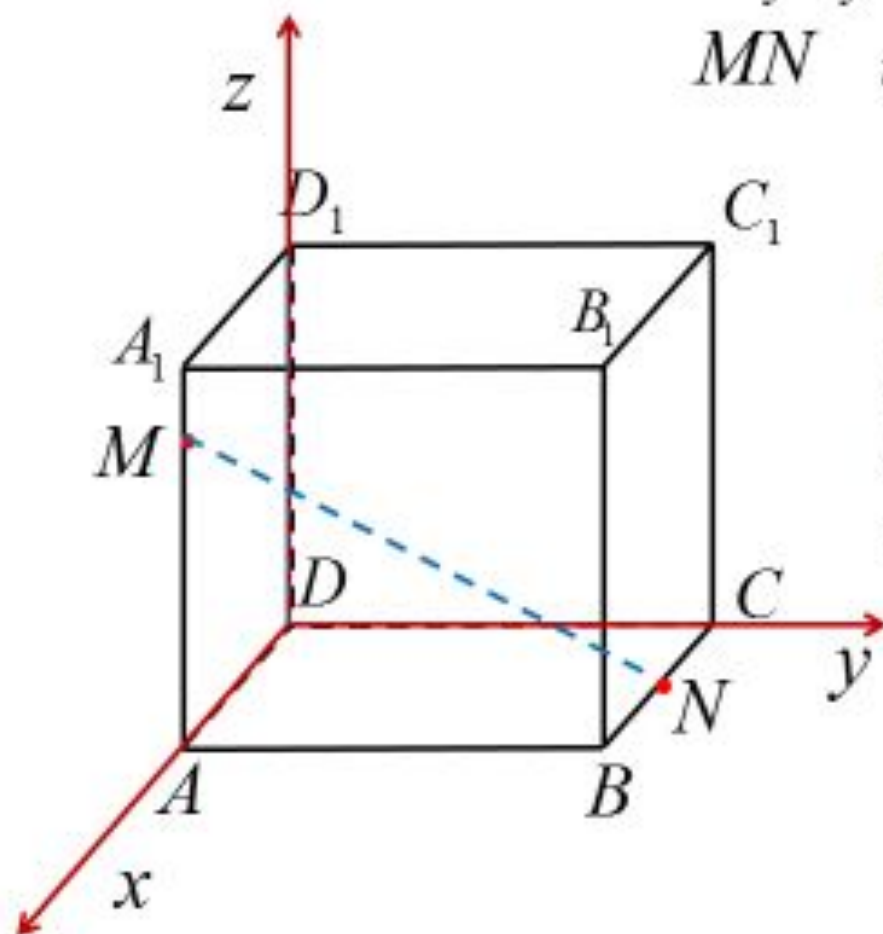
Вычислить косинус угла между
прямыми MN и DD_1

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб

$M \in AA_1$ $AM : MA_1 = 3 : 1$ $BN = NC$

Вычислить косинус угла между прямыми

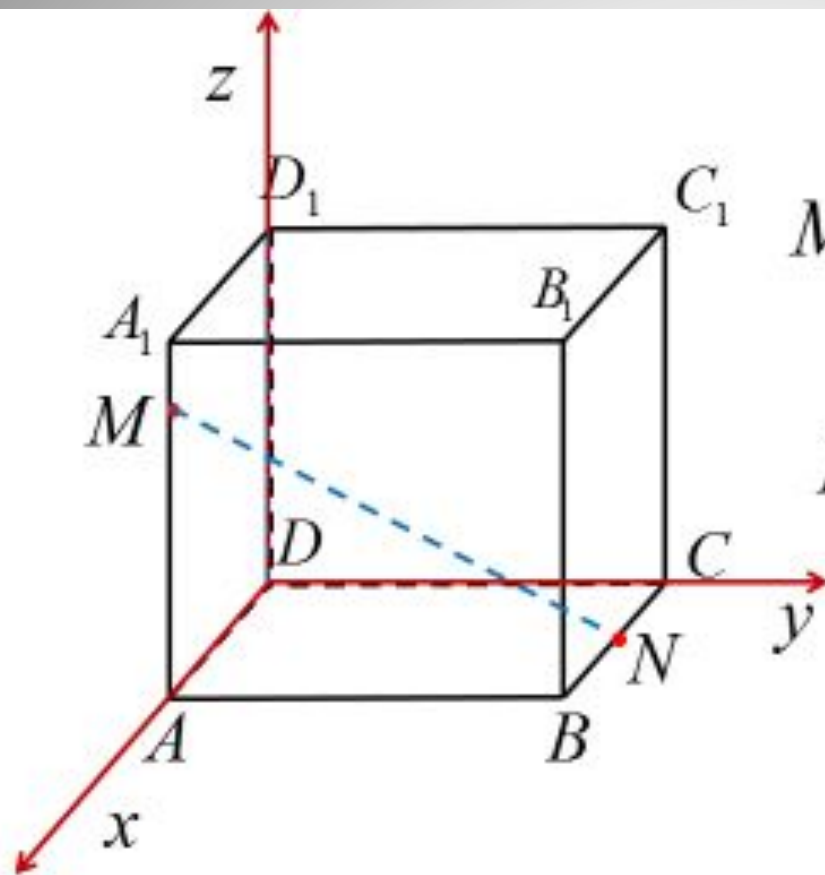
MN и DD_1



Решение:

Пусть ребро куба равно 1.

Введем прямоугольную систему координат.



$$M\left(1;0;\frac{3}{4}\right) \quad N\left(\frac{1}{2};1;0\right)$$

$$D(0;0;0) \quad D_1(0;0;1)$$

$$\overrightarrow{MN} \left\{ -\frac{1}{2}; 1; -\frac{3}{4} \right\}$$

$$\overrightarrow{DD_1} \{0;0;1\}$$

$$\overrightarrow{MN} \left\{ -\frac{1}{2}; 1; -\frac{3}{4} \right\} \quad \overrightarrow{DD_1} \{0; 0; 1\}$$

$$\cos \varphi = \frac{\left| -\frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot 0 + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 1 \right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

[ПРОЙТИ ТЕСТ](#)