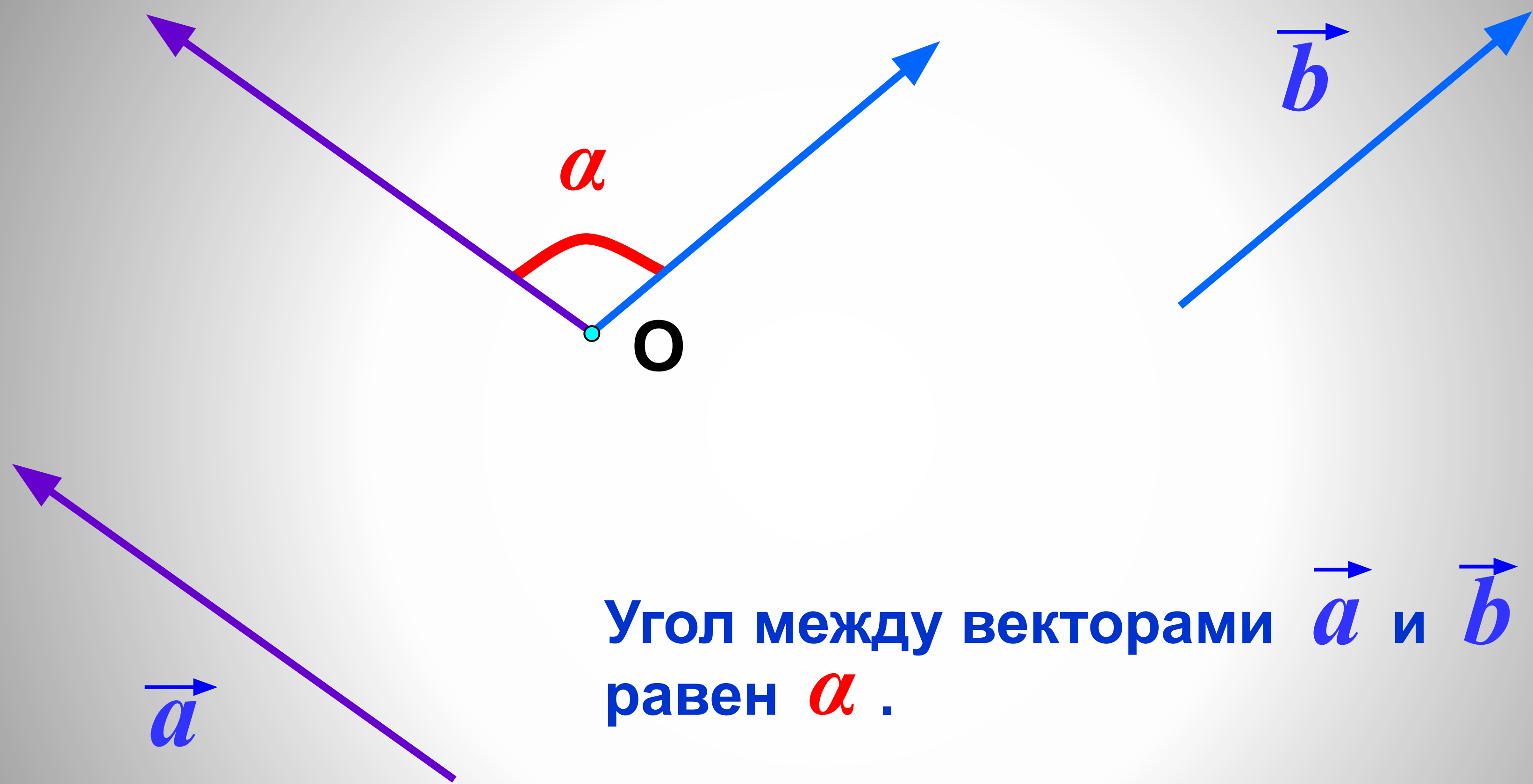
Скалярное произведение векторов

Текст изучить тему, записать в тетрадях формулы, примеры, в конце пройти тест

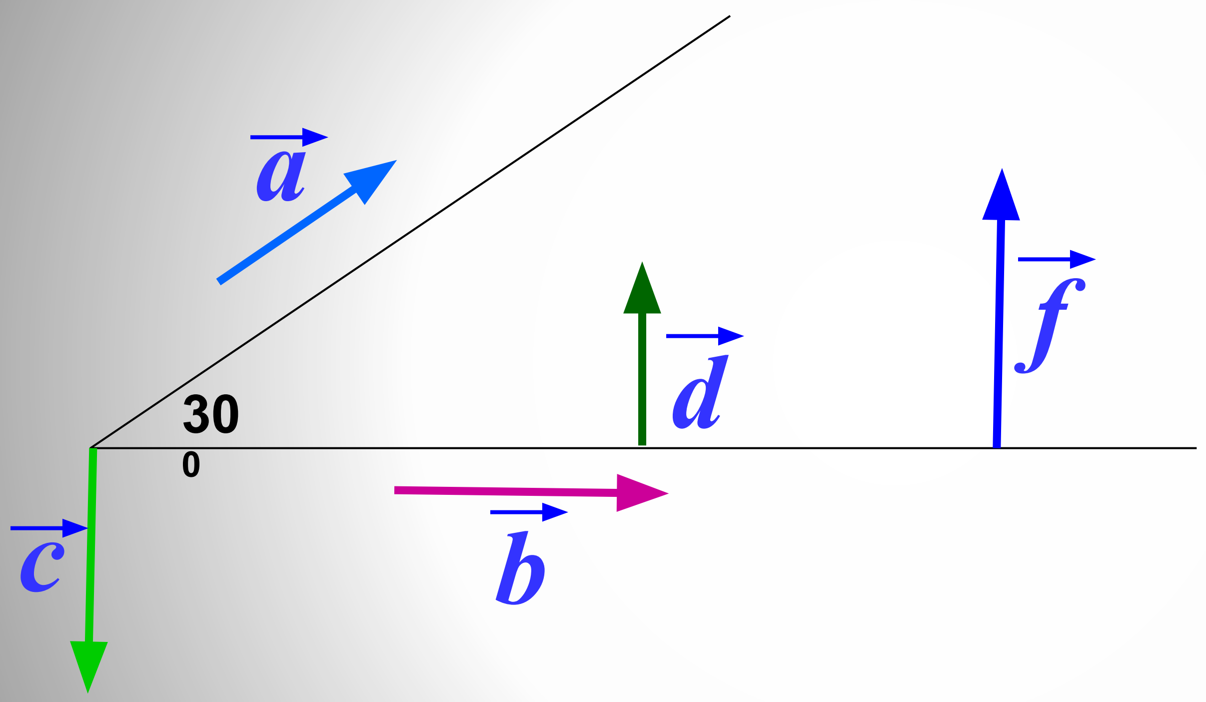
Угол между векторами



Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α .

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \alpha$$

Найдите угол между векторами



$\widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = 30^0$

$\widehat{\vec{a}\ \vec{c}} = 120^0$

$\widehat{\vec{b}\ \vec{c}} = 90^0$

$\widehat{\vec{d}\ \vec{c}} = 180^0$

$\widehat{\vec{d}\ \vec{f}} = 0^0$

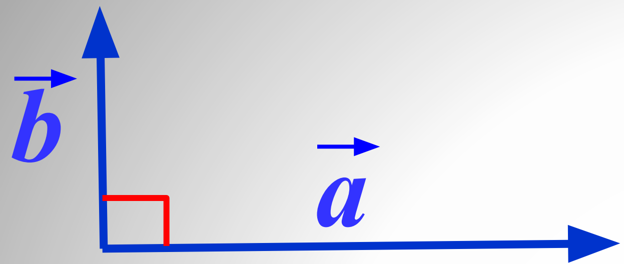
Определение

<u>Скалярным произведением</u> двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).

Частный случай №1



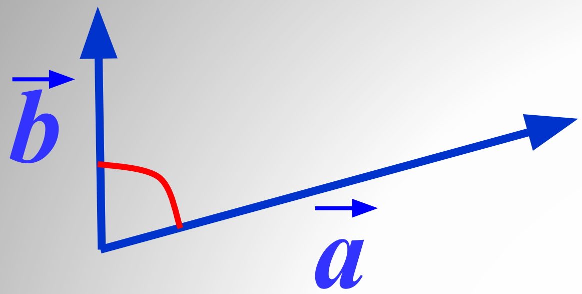
$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 90^0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 90^0 = 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

Частный случай №2



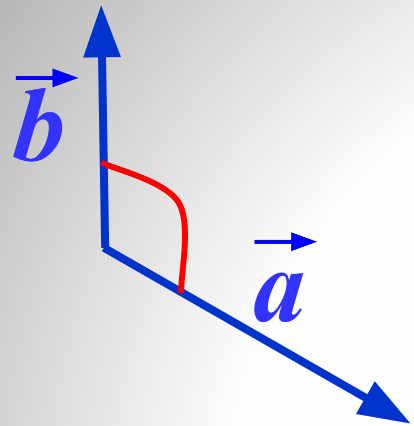
$\widehat{\vec a \, \vec b} < 90^0$

$\vec a \cdot \vec b = |\vec a| \cdot |\vec b| \cos \alpha$ > 0 > 0

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами **острый.**

$\vec a \cdot \vec b > 0 \Leftrightarrow \widehat{\vec a \, \vec b} < 90^0$

Частный случай №3



$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^0$$

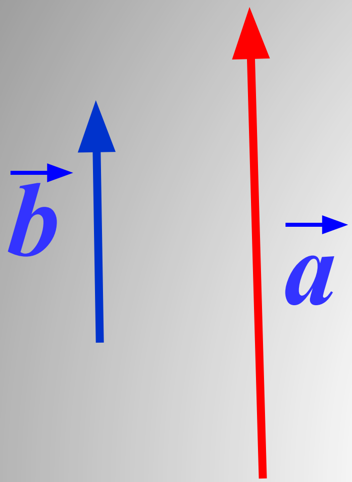
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha < 0$$

< 0

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^0$$

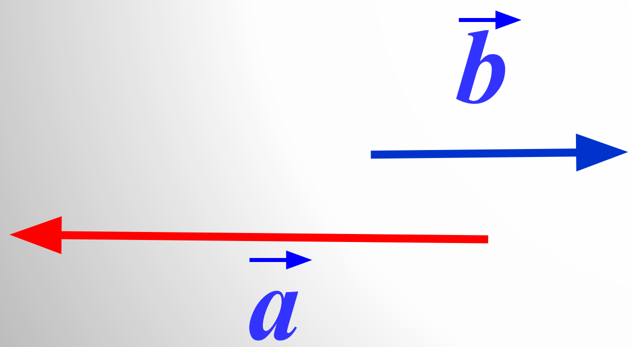
Частный случай №4



$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0^0$$

1

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 0^0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$



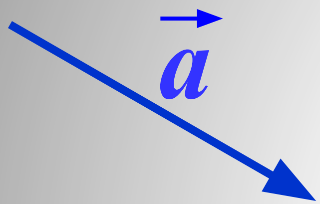
$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 180^0$$

-1

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 180^0 = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

Частный случай №5

$\widehat{\vec{a}\,\vec{a}} = 0^0$



$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\underbrace{\cos 0^0}_{1} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

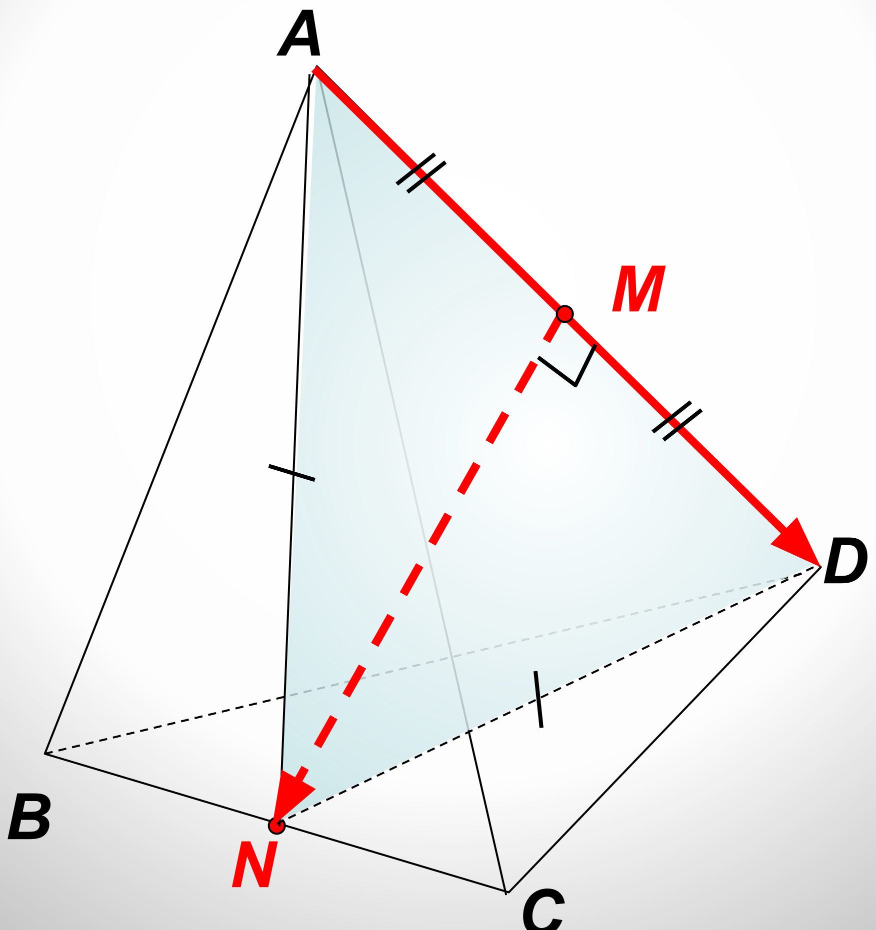
Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^{\,2}$

Таким образом,
скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$$

Задача

Все ребра тетраэдра ABCD равны друг другу. Точки M и N – середины ребер AD и BC. Докажите, что $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$



Формула для нахождения скалярного произведения через координаты векторов

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

Пример №1

Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{-6; 9; 5\}$ $\vec{b}\ \{-1; 0; 7\}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -6 \cdot (-1) + 9 \cdot 0 + 5 \cdot 7 = 41$$

Пример №2

Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{0;\ 0;\ 4\}$ $\vec{b}\ \{22;\ 1;\ 8\}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0\cdot 22 + 0\cdot 1 + 4\cdot 8 = 32$$

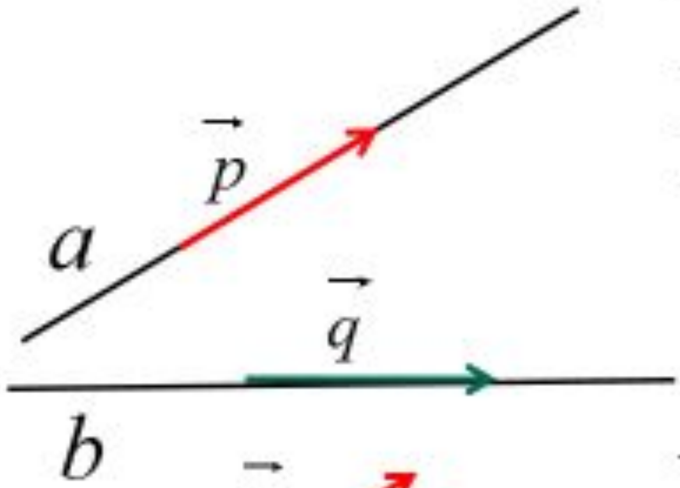
Косинус угла между ненулевыми векторами

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\} \qquad \vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

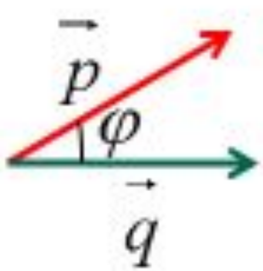
Угол между прямыми



$\vec{p}$ *- направляющий вектор прямой а*

$\vec{q}$ *- направляющий вектор прямой b*

φ *- угол между прямыми*



$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\quad$ $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$

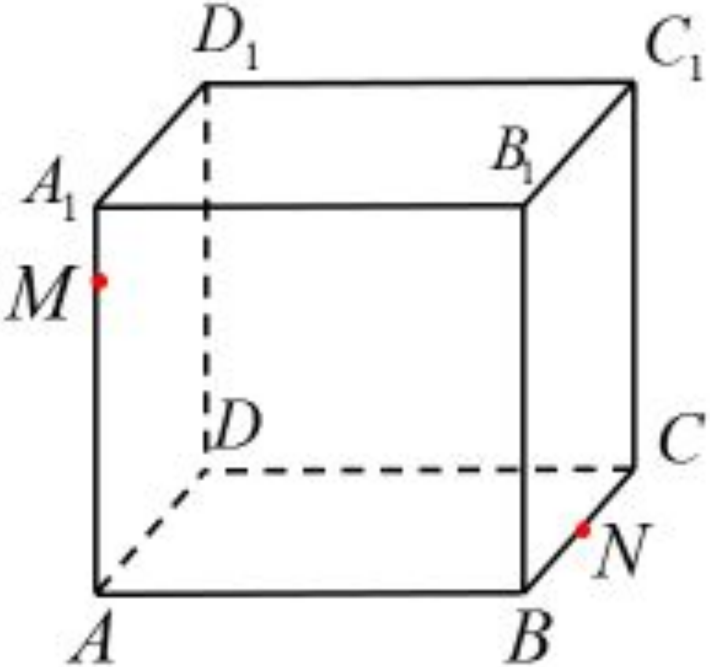
$$\cos\varphi = \frac{|\,x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\,|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

№466(а)

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1 - куб$

$M \in AA_1 \quad AM : MA_1 = 3:1$

$BN = NC$



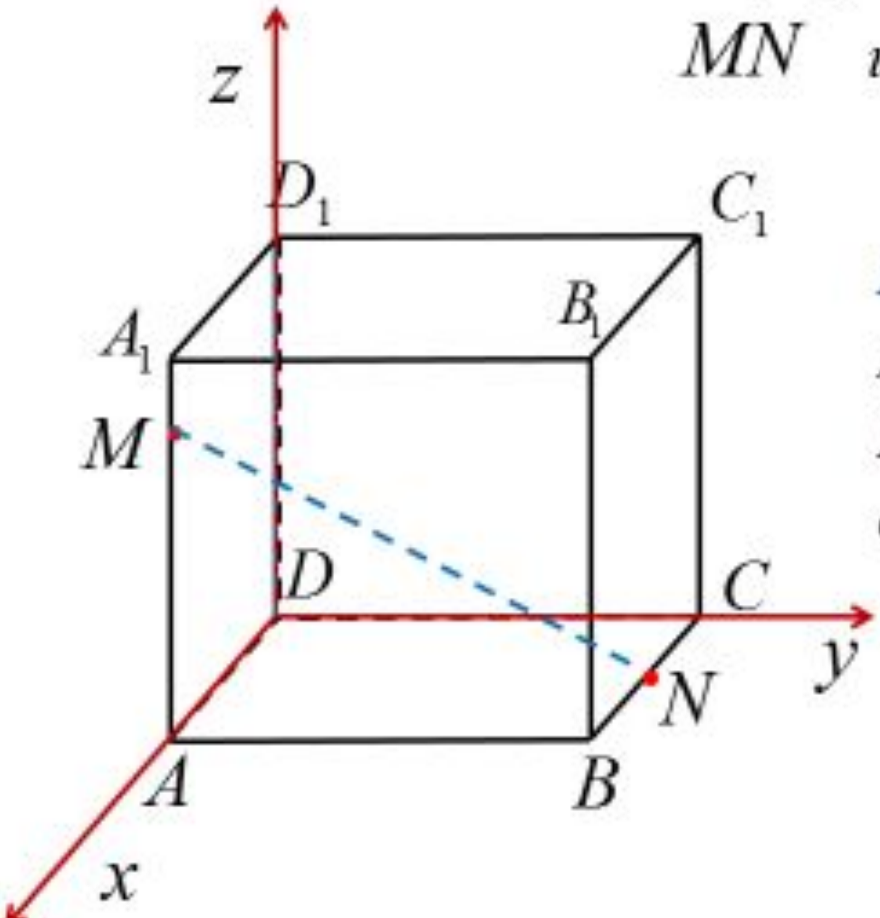
Вычислить косинус угла между прямыми MN *и* DD_1

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб

$M \in AA_1 \quad AM : MA_1 = 3:1 \quad BN = NC$

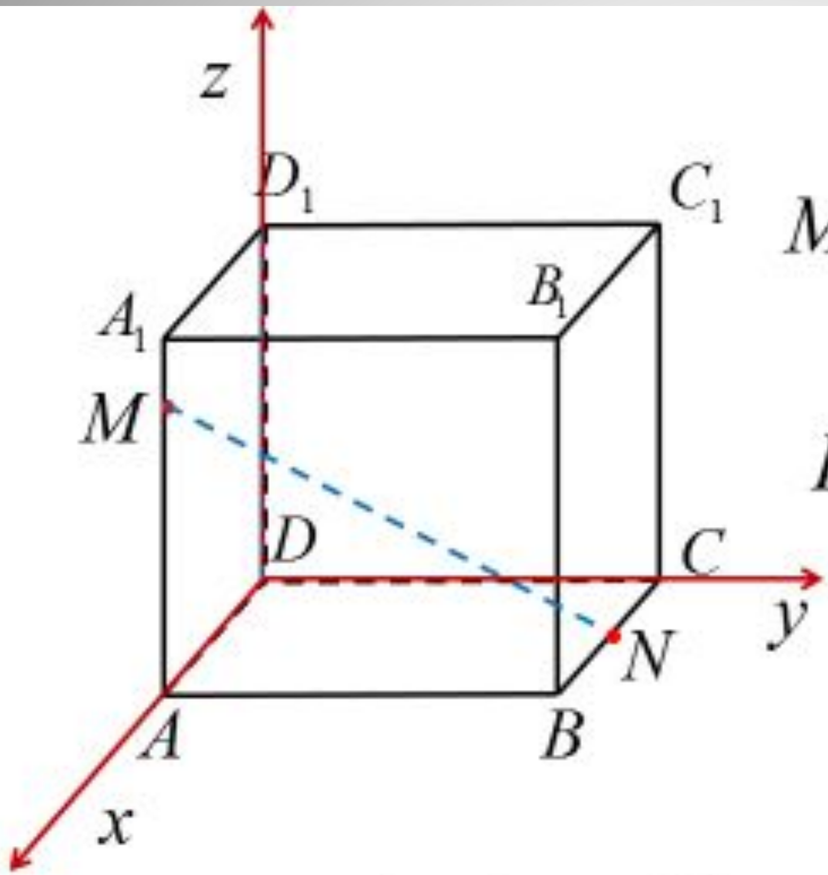
Вычислить косинус угла между прямыми

MN и DD_1



Решение:

Пусть ребро куба равно 1. Введем прямоугольную систему координат.



$M(1;0;\frac{3}{4})$ $N(\frac{1}{2};1;0)$

$D(0;0;0)$ $D_1(0;0;1)$

$\overrightarrow{MN}\left\{-\frac{1}{2};1;-\frac{3}{4}\right\}$ $\overrightarrow{DD_1}\{0;0;1\}$

$$\overrightarrow{MN}\left\{-\frac{1}{2};1;-\frac{3}{4}\right\} \qquad \overrightarrow{DD_1}\{0;0;1\}$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|-\frac{1}{2}\cdot 0 + 1\cdot 0 + \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 1\right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

ПРОЙТИ ТЕСТ