

Приклади розв'язання задач за
темами

“Механічні коливання і хвилі”
та

“Основи молекулярної фізики
та термодинаміки”

Тема Механіч ні коливан ня

Рівняння гармонічних коливань та його розв'язок:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (1a)$$

де ω_0 – власна частота коливань.

Періоди гармонічних коливань:

пружинного маятника масою m , коефіцієнтом пружності пружини k

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}, \quad (1б)$$

математичного маятника з довжиною l

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}, \quad (1в)$$

фізичного маятника з моментом інерції J відносно осі коливань і відстанню a від центра інерції тіла до точки підвісу

$$T = 2\pi\sqrt{J/(mga)}. \quad (1г)$$

Рівняння загасальних коливань та його розв'язок:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x = A(t) \cos(\omega t + \alpha), \quad (1д)$$

де β – коефіцієнт загасання, $A(t)$ – амплітуда, ω – частота загасальних коливань:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (1е)$$

Логарифмічний декремент загасання λ і добротність Q :

$$\lambda = \beta T, \quad Q = \pi/\lambda, \quad (1є)$$

де $T = 2\pi/\omega$ – період загасальних коливань.

Приклад 1.3.1. Написати рівняння гармонічного коливального руху пружинного маятника з амплітудою $A=5$ см, якщо за час $t=1$ хв він здійснює 150 коливань і початкова фаза коливань дорівнює $\varphi_0=\pi/3$.

Розв'язання. Гармонічне коливання описується рівнянням:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1)$$

Завдання «написати рівняння» означає, що треба загальне рівняння написати з конкретними числовими параметрами. Знайдемо циклічну частоту коливань:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (2)$$

Період коливань T – час, за який здійснюється одне повне коливання

$$T = \frac{t}{N}. \quad (3)$$

Зробимо заміну в (2), отримаємо:

$$\omega = \frac{2\pi N}{t}. \quad (4)$$

Підставивши чисельні значення величин у формулу (4), отримаємо $\omega = 5\pi$. При підстановці врахували, що 1 хв=60 с.

Замінивши літерні позначення в рівнянні (1) на їх чисельні значення, можна записати рівняння коливань:

$$x(t) = 5 \cos(5\pi t + \pi/3) \text{ (см)}. \quad (5)$$

Приклад 1.3.2. Через який час від початку руху точка, яка здійснює гармонічні коливання, зміститься від положення рівноваги на половину амплітуди? Період коливань $T=12$ с.

Розв'язання. Запишемо рівняння гармонічних коливань у вигляді

$$x = A \sin \omega t, \quad (1)$$

оскільки в початковий момент часу точка перебувала в положенні рівноваги. За умовою задачі $x(t) = A/2$. Зробимо заміну в рівнянні (1) і розв'яжемо отримане співвідношення відносно часу t .

$$\frac{A}{2} = A \sin \omega_0 t,$$

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2},$$

$$\omega_0 t = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6},$$

$$t = \frac{\pi}{6\omega_0}. \quad (2)$$

Циклічна частота коливань $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Зробивши заміну в (2), отримаємо:

$$t = \frac{T \cdot \pi}{6 \cdot 2\pi} = \frac{T}{12}. \quad (3)$$

Підставивши чисельне значення періоду T в рівняння (3), отримаємо $t=1$ с.

Приклад 1.3.3. Рівняння руху точки надано у вигляді $x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$ (см).

Знайти моменти часу t , в які досягаються максимальна швидкість і максимальне прискорення.

Розв'язання. Спочатку необхідно отримати рівняння, що описують зміну швидкості і прискорення з часом. Швидкість чисельно дорівнює першій похідній координати за часом:

$$v = \frac{dx}{dt} = -2 \cdot \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) = -\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right). \quad (1)$$

Швидкість прийме максимальне значення в ті моменти часу, коли буде виконуватися умова

$$\left| \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) \right| = 1. \quad (2)$$

Вирішимо рівняння (2) відносно часу t :

$$\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad (3)$$

де $n=0,1,2,3\dots$

Скоротивши рівняння (3) на π , отримаємо:

$$\frac{t}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2n+1}{2}.$$

Звідси випливає, що

$$t = 2n + \frac{1}{3}. \quad (4)$$

$$\text{або } t = \frac{1}{3}, 2\frac{1}{3}, 4\frac{1}{3}, \dots \text{ (с).}$$

Прискорення чисельно дорівнює першій похідній швидкості за часом:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{\pi^2}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right). \quad (5)$$

Прискорення прийме максимальне значення в ті моменти часу, коли буде виконуватися умова:

$$\left| \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) \right| = 1. \quad (6)$$

Розв'яжемо рівняння (6) відносно часу t :

$$\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) = n\pi, \quad (7)$$

де $n=0,1,2,3 \dots$

Скоротивши рівняння (7) на π , отримаємо:

$$\frac{t}{2} + \frac{1}{3} = n.$$

Звідси випливає, що

$$t = 2n - \frac{2}{3}. \quad (8)$$

$$\text{або } t = 1\frac{1}{3}, 3\frac{1}{3}, 5\frac{1}{3}, \dots$$

Приклад 1.1

Самостійно!

Точка, що здійснює гармонічні коливання, в деякий момент часу має зміщення $x = 4,0$ см, швидкість $v_x = 5,0$ см/с і прискорення $a_x = -0,80$ м/с². Визначити: 1) амплітуду A і період T коливань точки; 2) фазу φ коливань у момент часу, що розглядається; 3) максимальну швидкість v_m та прискорення a_m точки.

Розв'язання

$A - ?$ $T - ?$ $\varphi - ?$

$v_m - ?$ $a_m - ?$

$x = 4,0$ см;

$v_x = 5,0$ см/с;

$a_x = -0,80$ м/с².

Аналізуючи відомі та шукані величини, робимо висновок, що для розв'язання задачі потрібно використати кінематичне рівняння гармонічних коливань (1а) та визначення швидкості, прискорення,

фази.

Як відомо, зміщення за умови гармонічних коливань описується співвідношенням (1а):

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (1)$$

$$\varphi = \omega_0 t + \alpha \quad (2)$$

є фазою коливань.

Швидкість та прискорення знайдемо, використовуючи визначення цих величин та (1):

$$v_x = dx / dt = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (3)$$

$$a_x = dv_x / dt = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (4)$$

Із цих формул випливає, що максимальні значення швидкості та прискорення дорівнюють

$$v_m = A\omega_0, \quad a_m = A\omega_0^2. \quad (5)$$

Знайшовши амплітуду A і частоту ω_0 , можемо визначити за допомогою (5) v_m та a_m . Також беремо до уваги, що частота ω_0 та період коливань T пов'язані між собою як

$$T = 2\pi / \omega_0. \quad (6)$$

Як випливає з умови задачі та (1) – (4), для деякого моменту часу відомі зміщення, швидкість та прискорення точки:

$$x = A \cos \varphi, \quad v_x = -A\omega_0 \sin \varphi, \quad a_x = -A\omega_0^2 \cos \varphi. \quad (7)$$

Із цих трьох рівнянь знаходимо три невідомі величини: амплітуду A , частоту ω_0 та фазу коливань φ :

Самостійно!

$$\frac{a_x}{x} = \frac{-A\omega_0^2 \cos \varphi}{A \cos \varphi} = \omega_0^2, \quad \omega_0 = \sqrt{-\frac{a_x}{x}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{-\frac{x}{a_x}}; \quad (8)$$

$$\cos \varphi = x/A, \quad \sin \varphi = -v_x/(A\omega_0), \quad \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1,$$

$$(x/a_x)^2 + (v_x/(A\omega_0))^2 = 1,$$

$$A = \sqrt{(x)^2 + (v_x/\omega_0)^2} = \sqrt{(x)^2 - v_x^2 x/a_x}; \quad (9)$$

$$\varphi = \arccos(x/A) = \arccos(x/\sqrt{(x)^2 - v_x^2 x/a_x}). \quad (10)$$

Для знаходження максимальних значень швидкості та прискорення використаємо (5), (8) та (9):

$$v_m = A\omega_0 = \sqrt{(x)^2 - v_x^2 x/a_x} \cdot \sqrt{-a_x/x} = \sqrt{v_x^2 - x a_x}, \quad (11)$$

$$a_m = A\omega_0^2 = \sqrt{(x)^2 - v_x^2 x/a_x} \cdot (-a_x/x) = \sqrt{a_x^2 - a_x v_x^2/x}. \quad (12)$$

Таким чином, шукані величини A , T , φ , v_m та a_m визначаються формулами (8) – (12). Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул (8) – (12), в одиницях СІ й виконаємо обчислення: $T = 1,4$ с; $A = 4,2$ см; $\varphi = \pi/12$; $v_m = 0,19$ м/с; $a_m = 0,83$ м/с².

Приклад 1.3.4. Знайти амплітуду A і початкову фазу φ_0 гармонічного коливання, отриманого від додавання однаково спрямованих коливань, заданих рівняннями $x_1(t) = 4 \cos \pi t$ (см) і $x_2(t) = 3 \cos(\pi t + \pi/2)$ (см). Написати рівняння результуючого коливання. Побудувати векторну діаграму додавання амплітуд.

Розв'язання. Коливання відбуваються в одному напрямку і мають однакову частоту. У цьому випадку амплітуда результуючого коливання визначається за формулою:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}. \quad (1)$$

Із заданих рівнянь визначимо значення амплітуд і початкових фаз: $A_1=4$ см, $A_2=3$ см, $\varphi_{01}=0$, $\varphi_{02}=\pi/2$. Частота коливань, що додаються $\omega=\pi$.

Початкову фазу результуючого коливання можна визначити з умови:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}. \quad (2)$$

Підставивши чисельні значення величин у формули (1) і (2), отримаємо $A=5$ см, $\operatorname{tg} \varphi_0=0,75$, $\varphi_0 = \operatorname{arctg} 0,75 \approx 37^\circ = 0,20\pi$.

Результуюче коливання буде мати ту ж частоту, тобто $\omega=\pi$. Запишемо рівняння результуючого коливання:

$$x(t) = 5 \cos(\pi t + 0,20\pi) \text{ (см)}. \quad (3)$$

Приклад 1.3.6. Матеріальна точка бере участь одночасно в двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливаннях, що виражаються рівняннями:

$x = \cos \pi t$ (см) и $y = 2 \cos \frac{\pi}{2} t$ (см). Знайти рівняння траєкторії точки, визначити її швидкість у момент часу $t = 1/3$ с і напрямок руху.

Розв'язання. Для визначення траєкторії точки, що бере участь одночасно в двох взаємно перпендикулярних коливаннях, слід виключити час t з рівнянь коливань, що додаються. Для цього використовуємо наступне тригонометричне співвідношення:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}. \quad (1)$$

У нашому випадку $\alpha = \pi t$, тому:

$$y = 2 \cos \frac{\pi}{2} t = 2 \sqrt{\frac{1 + \cos \pi t}{2}}. \quad (2)$$

Оскільки $\cos \pi t = x$, то зробимо заміну:

$$y = 2 \sqrt{\frac{1 + x}{2}}. \quad (3)$$

Рівняння (3) можна привести до виду:

$$x = \frac{y^2}{2} - 1. \quad (4)$$

Приклад 1.3.8. Тягар масою m , що підвішений до пружини, за 1 хв здійснює 120 коливань. Знайти масу тягара, якщо відомо, що пружина під дією сили $F=9,8$ Н розтягується на $x=1,5$ см.

Розв'язання. Період коливань пружинного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (1)$$

де m – маса тягара, k – коефіцієнт жорсткості пружини.

Виразимо масу:

$$m = k\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2. \quad (2)$$

Коливання відбуваються під дією пружної сили, тому для знаходження k використовуємо закон Гука:

$$F = -kx \quad (3)$$

$$k = \left| -\frac{F}{x} \right|. \quad (4)$$

Період – це час, протягом якого відбувається одне коливання, тому

$$T = \frac{t}{N}. \quad (5)$$

де N – число коливань.

Підставимо (4) і (5) в (2):

$$m = \frac{F}{x} \cdot \left(\frac{t}{2\pi N} \right)^2. \quad (6)$$

Підставивши чисельні значення у формулу (6), отримаємо $m=4,1$ кг.

Приклад 1.3.7. Однорідна куляка підвішена на нитці, довжина якої дорівнює радіусу R кульки. У скільки разів період коливань T_1 цього маятника більше періоду коливань T_2 математичного маятника з такою ж відстанню від центра мас до точки підвісу?

Розв'язання. Куляка, що підвішена на нитці, довжина якої дорівнює радіусу R кульки, являє собою фізичний маятник (рис. 1.4). Період коливань фізичного маятника

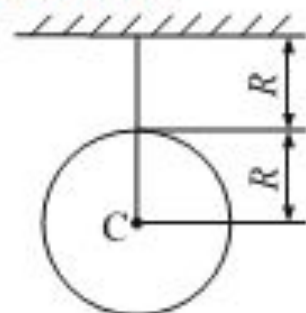


Рисунок 1.4

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}, \quad (1)$$

де J – момент інерції маятника відносно осі коливань,

m – маса маятника,

l – відстань від осі коливань до центра мас маятника.

За умовою задачі $l = 2R$. Момент інерції маятника відносно осі коливань знайдемо за теоремою Штейнера:

$$J = J_0 + ml^2, \quad (2)$$

де J_0 – момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас паралельно даній; l – відстань між осями.

Момент інерції кульки відносно осі, що проходить через центр мас паралельно даній

$$J_0 = \frac{2}{5}mR^2. \quad (3)$$

Тоді:

$$J = \frac{2}{5}mR^2 + m \cdot 4R^2 = 4,4mR^2. \quad (4)$$

Зробимо підстановку в (1), отримаємо:

Самостійно!

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{4,4mR^2}{mg2R}} = 2\pi \sqrt{\frac{2,2R}{g}}. \quad (5)$$

Період коливань математичного маятника

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}}, \quad (6)$$

де l_2 – довжина маятника. За умовою задачі $l_2 = l = 2R$.

Тоді

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}. \quad (7)$$

Знайдемо відношення періодів, розділивши (5) на (7). Зробивши скорочення, отримаємо:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{2,2R}{g}}}{2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}} = 1,05.$$

Приклад 1.3.10. Амплітуда загасаючих коливань математичного маятника за час $t_1=1$ хв зменшується вдвічі. У скільки разів зменшиться амплітуда за час $t_2=3$ хв?

Розв'язання. Амплітуда загасаючих коливань змінюється за законом:

$$A = A_0 e^{-\beta t} \quad (1)$$

де β – коефіцієнт загасання.

Амплітуда коливань в момент часу t_1 :

$$A_1 = A_0 e^{-\beta t_1} \quad (2)$$

З рівняння (2) знайдемо коефіцієнт загасання.

$$\frac{A_0}{A_1} = e^{\beta t_1}$$

Прологарифмуємо обидві частини рівняння, отримаємо:

$$\begin{aligned} \beta t_1 &= \ln \frac{A_0}{A_1}, \\ \beta &= \frac{1}{t_1} \ln \frac{A_0}{A_1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогічно можна записати рівняння для амплітуди в момент часу t_2 :

$$A_2 = A_0 e^{-\beta t_2}$$
$$\frac{A_0}{A_2} = e^{\beta t_2} \quad (4)$$

Підставимо в (4) вираз (3) для коефіцієнта загасання, отримаємо:

$$\frac{A_0}{A_2} = e^{\frac{t_2}{t_1} \ln \frac{A_0}{A_1}} = e^{\frac{t_2}{t_1} \ln 2} \quad (5)$$

Підставивши чисельні значення у формулу (5), отримаємо $\frac{A_0}{A_2} = 8$.

Приклад 1.3.11. Математичний маятник довжиною $l=24,7$ см здійснює загасаючі коливання. Через який час t енергія коливань маятника зменшиться в 9,4 рази? Логарифмічний декремент загасання $\lambda=0,01$.

Розв'язання. Енергія системи, що коливається, визначається рівнянням:

$$W = \frac{kA^2}{2}. \quad (1)$$

Якщо коливання загасаючі, то амплітуда зменшується за законом:

$$A = A_0 e^{-\beta t}. \quad (2)$$

Підставимо (2) в (1), отримаємо:

$$W = \frac{kA_0^2 e^{-2\beta t}}{2} = W_0 e^{-2\beta t}, \quad (3)$$

де $W_0 = \frac{kA_0^2}{2}$ – значення енергії в початковий момент часу.

Відношення W_0 до W в момент часу t дорівнюватиме

$$\frac{W_0}{W} = \frac{W_0}{W_0 e^{-2\beta t}} = e^{2\beta t}. \quad (4)$$

Коефіцієнт загасання пов'язаний з періодом і логарифмічним декрементом загасання співвідношенням:

$$\beta = \frac{\lambda}{T}. \quad (5)$$

Період коливань математичного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (6)$$

Підставимо рівняння (5) і (6) в (4), отримаємо:

$$\frac{W_0}{W} = e^{\frac{2\lambda}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}}.$$

Прологарифмуємо обидві частини рівняння і знайдемо час.

$$\ln \frac{W_0}{W} = \frac{\lambda t}{\pi} \sqrt{\frac{g}{l}},$$
$$t = \frac{\pi \ln \frac{W_0}{W}}{\lambda} \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (7)$$

Підставивши чисельні значення у формулу (7), отримаємо $t \approx 12$ с

Пружні хвилі

1. Процес поширення коливань у просторі називається хвилею. Плоска біжуча монохроматична хвиля, яка поширюється вздовж позитивного напрямку осі Ox , описується рівнянням:

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx) = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right), \quad (3.1)$$

де $\xi(x, t)$ – зміщення від положення рівноваги точки середовища з координатою x в момент часу t ;

v – швидкість поширення коливань в середовищі (фазова швидкість);

A – амплітуда хвилі;

ω – циклічна частота коливань;

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число, λ – довжина хвилі.

2. Довжина хвилі λ пов'язана з періодом T коливань і фазовою швидкістю v :

$$\lambda = vT. \quad (3.2)$$

Швидкість поперечних хвиль у твердому кристалічному середовищі

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (3.3)$$

де G – модуль зсуву.

ρ – густина середовища.

Швидкість поздовжніх хвиль у твердому кристалічному середовищі

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (3.4)$$

де E – модуль пружності;

ρ – густина середовища.

Приклад 3.3.2. Рівняння коливань джерела хвиль має вигляд $\xi(0,t) = \cos 2\pi t$ (см). Знайти зміщення від положення рівноваги, швидкість і прискорення точки, що знаходиться на відстані $x=20$ м від джерела коливань, для моменту часу $t=1$ с після початку коливань. Швидкість поширення коливань дорівнює $v_{\phi}=100$ м/с.

Розв'язання. При поширенні незгасаючих коливань уздовж деякого напрямку виникає плоска монохроматична хвиля, яка описується рівнянням

$$\xi(x,t) = A \cos(\omega t - kx), \quad (1)$$

де A – амплітуда хвилі, ω – циклічна частота, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число.

Порівнюючи рівняння (1) з рівнянням коливань джерела хвиль, визначимо амплітуду коливань і їх циклічну частоту:

$$A=1 \text{ см}, \omega=2\pi \text{ рад/с}.$$

Період коливань T і циклічна частота ω зв'язані співвідношенням

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (2)$$

тому довжина хвилі

$$\lambda = v_{\phi} T = v_{\phi} \frac{2\pi}{\omega}. \quad (3)$$

Тоді хвильове число можна виразити таким чином:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\omega}{v_{\phi} 2\pi} = \frac{\omega}{v_{\phi}}. \quad (4)$$

Підставивши чисельні значення величин у формулу (4), знайдемо хвильове число

$$k=0,02 \pi \text{ (1/м)}.$$

Запишемо рівняння хвилі з числовими коефіцієнтами:

$$\xi(x,t) = \cos(2\pi t - 0,02\pi x) \text{ (см)}. \quad (5)$$

Швидкість v точки, що коливається, за визначенням дорівнює похідній зміщення за часом:

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -2\pi \sin(2\pi t - 0,02\pi x) \text{ (см/с)}. \quad (6)$$

Прискорення a точки, що коливається, за визначенням дорівнює першій похідній швидкості за часом

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} = -4\pi^2 \cos(2\pi t - 0,02\pi x) \text{ (см/с}^2\text{)}. \quad (7)$$

Підставивши чисельні значення величин у формули (5), (6) і (7), знайдемо зміщення $\xi(x,t)$ точки від положення рівноваги, її швидкість v і прискорення a :

$$\xi(x,t) = 0,31 \text{ см}, \quad v = -5,97 \text{ см/с}, \quad a = -12,2 \text{ см/с}^2.$$

Молекулярна фізика

Приклад 1.1. Визначити кількість речовини, що міститься в 1 літрі води.

$$V = 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$A_r(\text{H}) = 1$$

$$A_r(\text{O}) = 16$$

$$\rho = 1 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

ν - ?

Розв'язання.

Кількість речовини, тобто кількість молів води, що міститься в одному 1л, обчислюємо за формулою (1.7):

$$\nu = \frac{m}{M}$$

Масу води m визначаємо за її густиною ρ та об'ємом V :

$$m = \rho V.$$

Тоді

$$\nu = \frac{\rho V}{M}$$

Молярну масу води знаходимо за її відносною молекулярною масою, яка дорівнює

$$M_r(\text{H}_2\text{O}) = 2 \cdot A_r(\text{H}) + A_r(\text{O}) = 2 \cdot 1 + 16 = 18 \text{ а.о.м.}$$

Згідно (1.5) $M = M_r \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$

$$\nu = \frac{1 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{18 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}} = 55,6 \text{ моль}$$

ІДЕАЛЬНИЙ ГАЗ. ПАРАМЕТРИ ТА РІВНЯННЯ СТАНУ ІДЕАЛЬНОГО ГАЗУ

Приклад 2.1. Знайти густину кисню при нормальних умовах.

$$\begin{array}{l} p \approx 10^5 \text{ Па} \\ T = 0^\circ \text{ C} = 273 \text{ К} \\ R = 8,31 \text{ Дж / (моль} \cdot \text{К)} \\ M = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.} \\ \hline \rho - ? \end{array}$$

Розв'язання

При нормальних умовах $P = 760 \text{ мм.рт.ст.}$,
 $T = 0^\circ \text{ C}$.

Застосуємо рівняння Менделєєва –
Клапейрона (2.9)

$$pV = \frac{m}{M}RT, \quad (1)$$

де p – тиск газу, V – об'єм газу; m – маса газу; M – молярна маса газу; R – універсальна газова стала; T – термодинамічна температура. Густина речовини $\rho = \frac{m}{V}$. (2)

Розв'язуємо сумісно (1) і (2). Для цього з (2) виразимо m і підставимо в (1):

$$pV = \frac{\rho V RT}{M}, \quad \text{або} \quad p = \frac{\rho RT}{M}.$$

Звідки $\rho = \frac{pM}{RT}$.

$$\rho = \frac{10^5 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 273} = 1,41 \left(\text{кг / м}^3 \right).$$

Приклад 2.3. У балоні об'ємом 5л міститься гелій під тиском 2МПа при температурі 127°С. Після того, як з балону взяли деяку масу гелію, температура у балоні зменшилась на 10 градусів, а тиск – до 1,5 МПа. Яку масу гелію було взято з балону?

$$\begin{aligned} V &= 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \\ p_1 &= 2 \cdot 10^6 \text{ Па} \\ p_2 &= 1,5 \cdot 10^6 \text{ Па} \\ R &= 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)} \\ T_1 &= 400 \text{ К} \\ T_2 &= 390 \text{ К} \\ M &= 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.} \end{aligned}$$

$m - ?$

Розв'язання

Записуємо рівняння Менделєєва – Клапейрона (2.9) для початкового і кінцевого станів газу у балоні.

$$p_1 V = \frac{m_1}{M} R T_1; \quad (1) \quad p_2 V = \frac{m_2}{M} R T_2, \quad (2)$$

де p_1 , m_1 , T_1 – тиск, маса, термодинамічна температура у початковому стані; p_2 , m_2 , T_2 – відповідні величини у кінцевому стані; V – об'єм балону; M – молярна маса гелію; R –

універсальна газова стала.

З (1) і (2) виразимо m_1 і m_2 :

$$m_1 = \frac{p_1 V M}{R T_1}; \quad m_2 = \frac{p_2 V M}{R T_2};$$

Тоді

$$m_1 - m_2 = \frac{p_1 V M}{R T_1} - \frac{p_2 V M}{R T_2} = \frac{V M}{R} \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right)$$

$$m_1 - m_2 = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{8,31} \left(\frac{2 \cdot 10^6}{400} - \frac{1,5 \cdot 10^6}{390} \right) = 0,00277 \text{ кг} = 2,77 \text{ г}$$

Приклад 2.4. У посудині об'ємом $V=25\text{л}$ міститься $m_1=100\text{г}$ гелію і $m_2=140\text{г}$ азоту при температурі $t=27^\circ\text{C}$. Знайти тиск у посудині.

$$V=2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$$

$$m_1=0,10 \text{ кг}$$

$$m_2=0,14 \text{ кг}$$

$$M_1=4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$M_2=28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$T=300 \text{ К}$$

$$p=?$$

Розв'язання

Скористаємося законом Дальтона (2.12), згідно з яким тиск у суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків.

$$p = p_1 + p_2, \quad (1)$$

де
$$p_1 = \frac{m_1}{M_1} \frac{RT}{V} \quad \text{і} \quad p_2 = \frac{m_2}{M_2} \frac{RT}{V}. \quad (2)$$

Тут M_1 і M_2 - молярні маси гелію і азоту

відповідно.

Підставимо (2) в (1):

$$p = \frac{m_1}{M_1} \frac{RT}{V} + \frac{m_2}{M_2} \frac{RT}{V} = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) \frac{RT}{V}. \quad (3)$$

$$p = \left(\frac{100 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}} + \frac{140 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} \right) \frac{8,31 \cdot (27 + 273)}{25 \cdot 10^{-3}} = 2,99 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

Перевірка одиниці вимірювання:

$$[p] = \frac{\text{кг}}{\text{кг/моль}} \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}$$

Відповідь: $p=2,99 \text{ МПа}$.

ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ГАЗІВ

Приклад 3.1. Середня квадратична швидкість руху молекул деякого газу $v_{\text{кв}} = 800 \text{ м/с}$. Знайти його густину ρ , якщо тиск p у балоні 380 мм рт.ст.

$$\begin{array}{l|l} p = 380 \text{ мм рт.ст.} & \\ v_{\text{кв}} = 800 \text{ м/с} & \\ \hline \rho = ? & \end{array}$$

Розв'язання
Середня квадратична швидкість теплового руху молекул газу за формулою (3.14) дорівнює

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}, \quad (1)$$

де $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$; T – абсолютна температура; M – молярна маса газу.

Звідки
$$v_{\text{кв}}^2 = \frac{3RT}{M}. \quad (2)$$

Порівняємо з рівнянням Менделєєва-Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT \quad (3)$$

З (2) виразимо $\frac{RT}{M} = \frac{v_{\text{кв}}^2}{3}$ і підставимо в (3):

$$pV = \frac{mv_{\text{кв}}^2}{3}, \text{ або } p = \frac{m}{V} \cdot \frac{v_{\text{кв}}^2}{3} \quad (4)$$

За означенням густина $\rho = m/V$, тому з (4)
$$p = \frac{3\rho}{v_{\text{кв}}^2}. \quad (5)$$

Переведемо тиск у одиницю вимірювання в СІ:

$$p = 380 \text{ мм рт. ст.} \times 133 = 0,5 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Підстановка у (5) числових даних дає
$$\rho = \frac{3 \cdot 0,5 \cdot 10^5}{(800)^2} = 0,23 \text{ кг/м}^3.$$

Приклад 3.7. Пилінки масою $m = 10^{-21}$ кг розподілені в повітрі. Визначити товщину шару повітря, в межах якого концентрація пилинок відрізняється не більше, ніж на 1%. Температура T повітря є однаковою і дорівнює 300К.

Розв'язання

$$\left. \begin{array}{l} m = 10^{-21} \text{ кг} \\ \frac{\Delta n}{n} = 0,01 \\ T = 300 \text{ К} \end{array} \right| \Delta h = ?$$

Розподілу пилинок можна описати формулою

Больцмана (3.17): $n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$. (1)

Оскільки $\frac{\Delta n}{n}$ є малим, зміну концентрації замінюємо диференціалом dn , який знаходимо із формули (1):

$$dn = -n_0 \frac{mg}{kT} e^{-\frac{mgh}{kT}} dh.$$

$n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} = n$, тому $dn = -n \frac{mg}{kT} dh$. Звідки виражаємо зміну висоти, що

відповідає шуканому шару повітря: $dh = -\frac{kT}{mg} \cdot \frac{dn}{n}$. (2)

Знак мінус показує, що при зростанні координати відповідає зменшення концентрації. В даному випадку він несуттєвий і може не ураховуватися. Замінюємо в виразі (2) диференціали на Δh та Δn . Тоді

$$\Delta h = -\frac{kT}{mg} \cdot \frac{\Delta n}{n}. \quad (3)$$

$$\Delta h = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 0,01}{10^{-21} \cdot 9,8} = 4,23 \cdot 10^{-3} \text{ (м)}$$

ОСНОВИ ТЕРМОДИНАМІКИ. ПЕРШИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ

Приклад 5.7. Вуглекислий газ масою $m=66\text{г}$, який має температуру $t=7^\circ\text{C}$, ізотермічно розширюється так, що його об'єм збільшується вдвічі. Яку роботу виконує при цьому газ?

$$m=66 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$T=280\text{K}$$

$$V_2 / V_1 = 2$$

$$M(\text{CO}_2) = 44 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{K)}$$

A - ?

Розв'язання

87

Роботу, яку виконує газ, знайдемо, скориставшись формулою (5.14):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (1)$$

Оскільки під час ізотермічного процесу тиск p змінюється, виразимо тиск через об'єм газу з рівняння Менделєєва – Клапейрона (2.9): $pV = \nu RT$, звідки

$$p = \frac{\nu RT}{V} \quad (2)$$

Підставимо (2) у (1) і виконаємо інтегрування:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right). \quad (3)$$

Зважаючи на те, що $\nu = m/M$, маємо

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right).$$

$$A = \frac{66 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31 \cdot 280}{44 \cdot 10^{-3}} \cdot \ln 2 = 2,41 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 2,41 \text{ кДж}.$$

Приклад 5.8. При ізобаричному нагріванні $m = 6\text{г}$ водню з початковою температурою $t_1 = 27^\circ\text{C}$, його об'єм зріс у два рази ($V_2 = 2V_1$). Знайти: 1) роботу A газу; 2) зміну внутрішньої енергії ΔU газу; 3) кількість теплоти Q , яку надано газу.

$$T_1 = 300\text{K}$$

$$V_2 = 2V_1$$

$$m = 6 \cdot 10^{-3}\text{кг}$$

$$M = 2 \cdot 10^{-3}\text{кг/моль}$$

$$R = 8,31\text{Дж/(моль}\cdot\text{K)}$$

$$A; \Delta U; Q - ?$$

Розв'язання

1). Робота газу при ізобаричному нагріванні (5.15):

$$A = p(V_2 - V_1).$$

Скористаємося рівнянням Менделєєва – Клапейрона, записавши його двічі: для початкового і кінцевого станів.

$$pV_1 = \frac{m}{M}RT_1 \quad (1)$$

$$pV_2 = \frac{m}{M}RT_2 \quad (2)$$

З (2) віднімаємо (1)

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1),$$

або

$$A = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1). \quad (3)$$

Різницю температур можна знайти з (2.26):

При $P = \text{const}$ $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$; за умовою задачі $\frac{V_2}{V_1} = 2$, тому $\frac{T_2}{T_1} = 2$. Тобто

$$T_2 = 2T_1 = 2 \cdot (27 + 273) = 600 \text{ K}.$$

$$\text{Тоді } T_2 - T_1 = 600 \text{ K} - 300 \text{ K} = 300 \text{ K}.$$

$$\text{Робота газу } A = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 300 = 7,48 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 7,48 \text{ кДж}.$$

2). Внутрішня енергія газу визначається за формулою (2.23).

$$U = \nu \frac{i}{2} RT,$$

$$\text{Тоді зміна внутрішньої енергії} \quad \Delta U = \nu \frac{i}{2} R \Delta T, \quad (4)$$

де i – кількість ступенів свободи; для водню H_2 (двохатомна молекула) $i=5$.

Обчислення:

$$\Delta U = \frac{6 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 8,31 \cdot (600 - 300)}{2 \cdot 10^{-3}} = 18,68 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 18,68 \text{ кДж}.$$

3) Згідно з першим законом термодинаміки (5.2)

$$Q = \Delta U + A$$

Тому

$$Q = 18,68 + 7,48 = 26,16 \text{ кДж}.$$

Приклад 5.8. У циліндрі під поршнем знаходиться 1 моль азоту при температурі $t_1 = 27^\circ\text{C}$. Азот починає адіабатично розширюватись,

збільшивши свій об'єм у 5 разів, далі його ізотермічно стискають до початкового об'єму. Знайти 1) температуру азоту T_2 наприкінці адіабатичного розширення; 2) роботу A_1 при адіабатичному розширенні; 3) роботу A_2 при ізотермічному стисканні та повну роботу A , яку виконав газ. Побудувати p - V – діаграму процесу.

$T_1 = 300\text{K}$ $V_2 = 5V_1$ $\nu = 1$ моль $R = 8,31\text{Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})$ $i = 5$	Розв'язання 1) Температура і об'єм газу при адіабатичному розширенні зв'язані рівнянням (5.18): $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}. \quad (1)$ Із рівняння адіабати (1) виражаємо T_2 :
$T_2; A_1; A_2; A$ -?	

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}, \quad (2)$$

де коефіцієнт Пуассона γ за формулою (5.11) дорівнює:

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5+2}{5} = 1,4 \quad (\text{для 2-атомного газу } i=5).$$

Підстановка значень у формулу (2) дає

$$T_2 = 300 \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^{1,4-1} = 300 \cdot 0,525 = 157\text{K}$$

2) Робота A_1 при адіабатичному розширенні газу може бути обчислена за формулою (5.17):

$$A_1 = -\nu C_V \Delta T = -\nu \frac{i}{2} R (T_2 - T_1).$$

$$A_1 = -1 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,31 \cdot (157 - 300) = 2970 \text{ Дж}.$$

3) Роботу A_2 газу при ізотермічному поширенні надає формула (5.16)

$$A_2 = \nu R T_2 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right).$$

$$A_2 = 1 \cdot 8,31 \cdot 157 \cdot \ln \left(\frac{1}{5} \right) = -2100 \text{ Дж}.$$

Сумарна робота $A = A_1 + A_2$.

$$A = 2,97 \text{ кДж} - 2,10 \text{ кДж} = 0,87 \text{ кДж}.$$

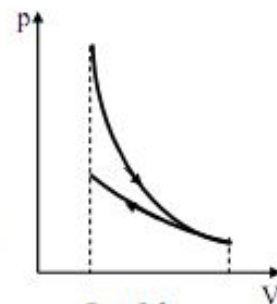


Рис.5.3.

ОСНОВИ ТЕРМОДИНАМІКИ. ДРУГИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ. ЕНТРОПІЯ СИСТЕМИ

Приклад 6.1. Ідеальна теплова машина працює за циклом Карно. Температура нагрівника $T_1=400$ К, холодильника $T_2=300$ К. За кожен цикл машина отримує від нагрівника кількість теплоти $Q_1=2,1$ кДж. Визначити 1) коефіцієнт корисної дії машини η і корисну роботу A , яку виконує машина за один цикл. 2) Яким буде холодильний коефіцієнт цієї машини, якщо вона буде здійснювати той самий цикл у зворотному напрямку?

Розв'язання

$T_1=400$ К	
$T_2=300$ К	
$Q_1=2,1$ кДж.	
$\eta, A - ?$	

1) Коефіцієнт корисної дії можна визначити або за формулою (6.4)

$$\eta = \frac{A}{Q_1}, \quad (1)$$

або (для циклу Карно) за формулою (6.6)

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (2)$$

Спочатку за формулою (2) знайдемо коефіцієнт корисної дії

$$\eta = \frac{400 - 300}{400} = 0,25 = 25\%.$$

Потім за формулою (1) знайдемо роботу A .

$$A = \eta Q_1 = 0,25 \cdot 2,1 \cdot 10^3 = 525 \text{ Дж.}$$

2) У зворотному циклі робоче тіло буде відбирати у холодильника кількість теплоти Q_2 і віддавати нагрівнику кількість теплоти Q_1 . Робота, яку виконує робоче тіло в зворотному циклі буде від'ємною: $A' = -A$.

Холодильний коефіцієнт (6.7) запишемо у виді $\eta_x = \frac{|Q_2|}{|A|}$ (3), де Q_2

виразимо через Q_1 та A : $|Q_2| = Q_1 - |A|$.

Тоді з урахуванням виразу (1) для ККД теплової машини отримуємо:

$$\eta_x = \frac{Q_1 - |A|}{|A|} = \frac{1}{\eta} - 1.$$

Обчислення дає: $\eta_x = \frac{1}{0,25} - 1 = 3$.

Приклад 6.4. $m=10\text{г}$ водню ізобарично нагрівають від $t_1 = 27^\circ\text{C}$ до $t_2 = 327^\circ\text{C}$. Знайти зміну ентропії газу ΔS у цьому процесі.

Розв'язання

$$m=0,010\text{кг}$$

$$t_1 = 27^\circ\text{C}$$

$$t_2 = 327^\circ\text{C}$$

$$i=5$$

$$R=8,31\text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$$

$$\Delta S = ?$$

Згідно з (6.10) зміна ентропії визначається формулою

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}, \quad (1)$$

де S_2 і S_1 – значення ентропії відповідно у кінцевому і у початковому станах; δQ – кількість теплоти, яку отримує газ у елементарному процесі; T – термодинамічна температура, при якій відбувалась теплопередача.

При ізобаричному процесі

$$\delta Q = C_p \nu dT, \quad (2)$$

де C_p – молярна теплоємність водню при ізобаричному нагріванні; ν – кількість речовини; dT – збільшення температури.

У свою чергу

$$C_p = \frac{i+2}{2} R, \quad (3)$$

де i – ступені свободи молекул (для водню H_2 $i=5$); R – газова стала.
 $R=8,31\text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$.

$$v = \frac{m}{M}, \quad (4)$$

де m – маса газу; M – молярна маса газу. Для водню $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Підставимо (2), (3), (4) у (1) і виконаємо інтегрування:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{i+2}{2} \cdot R \cdot \frac{m}{M} \cdot \frac{dT}{T} = \frac{(i+2)R \cdot m}{2M} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{(i+2)R \cdot m}{2M} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right).$$

Виразимо температури T_1 і T_2 у кельвінах (К):

$$T_1 = 27^\circ \text{C} + 273 = 300 \text{ К}; \quad T_2 = 327 + 273 = 600 \text{ К}.$$

Обчислення.

$$\Delta S = \frac{(5+2) \cdot 8,31 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \ln \frac{600}{300} = 100 \text{ Дж/К}.$$