# Приклади розв'язання задач за темами
# “Механічні коливання і хвилі”
# та
# “Основи молекулярної фізики та термодинаміки”

Тема Механічні коливання

*Рівняння гармонічних коливань та його розв'язок:*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x = A\cos(\omega_0 t + \alpha), \qquad (1а)$$

*де* $\omega_0$ *– власна частота коливань.*

*Періоди гармонічних коливань:*

*пружинного маятника масою m, коефіцієнтом пружності пружини k*

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}, \qquad (1б)$$

*математичного маятника з довжиною l*

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}, \qquad (1в)$$

*фізичного маятника з моментом інерції J відносно осі коливань і відстанню a від центра інерції тіла до точки підвісу*

$$T = 2\pi\sqrt{J/(mga)}. \qquad (1г)$$

*Рівняння загасальних коливань та його розв'язок:*

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x = A(t)\cos(\omega t + \alpha), \qquad (1д)$$

*де* $\beta$ *– коефіцієнт загасання,* $A(t)$ *– амплітуда,* $\omega$ *– частота загасальних коливань:*

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \qquad (1е)$$

*Логарифмічний декремент загасання* $\lambda$ *і добротність Q:*

$$\lambda = \beta T, \quad Q = \pi/\lambda, \qquad (1є)$$

*де* $T = 2\pi/\omega$ *– період загасальних коливань.*

**Приклад 1.3.1.** Написати рівняння гармонічного коливального руху пружинного маятника з амплітудою $A$=5 см, якщо за час $t$=1 хв він здійснює 150 коливань і початкова фаза коливань дорівнює $\varphi_0=\pi/3$.

*Розв'язання.* Гармонічне коливання описується рівнянням:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{1}$$

Завдання «написати рівняння» означає, що треба загальне рівняння написати з конкретними числовими параметрами. Знайдемо циклічну частоту коливань:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{2}$$

Період коливань $T$ – час, за який здійснюється одне повне коливання

$$T = \frac{t}{N}. \tag{3}$$

Зробимо заміну в (2), отримаємо:

$$\omega = \frac{2\pi N}{t}. \tag{4}$$

Підставивши чисельні значення величин у формулу (4), отримаємо $\omega = 5\pi$. При підстановці врахували, що 1 хв=60 с.

Замінивши літерні позначення в рівнянні (1) на їх чисельні значення, можна записати рівняння коливань:

$$x(t) = 5\cos(5\pi t + \pi/3) \text{ (см)}. \tag{5}$$

**Приклад 1.3.2.** Через який час від початку руху точка, яка здійснює гармонічні коливання, зміститься від положення рівноваги на половину амплітуди? Період коливань $T$=12 с.

*Розв'язання.* Запишемо рівняння гармонічних коливань у вигляді

$$x = A\sin\omega t\,, \tag{1}$$

оскільки в початковий момент часу точка перебувала в положенні рівноваги.
За умовою задачі $x(t) = A/2$. Зробимо заміну в рівнянні (1) і розв'яжемо отримане співвідношення відносно часу $t$.

$$\frac{A}{2} = A\sin\omega_0 t\,,$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2},$$

$$\omega_0 t = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6},$$

$$t = \frac{\pi}{6\omega_0}. \tag{2}$$

Циклічна частота коливань $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$. Зробивши заміну в (2), отримаємо:

$$t = \frac{T\cdot\pi}{6\cdot 2\pi} = \frac{T}{12}. \tag{3}$$

Підставивши чисельне значення періоду $T$ в рівняння (3), отримаємо $t$=1 с.

**Приклад 1.3.3.** Рівняння руху точки надано у вигляді $x = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$ (см). Знайти моменти часу $t$, в які досягаються максимальна швидкість і максимальне прискорення.

*Розв'язання.* Спочатку необхідно отримати рівняння, що описують зміну швидкості і прискорення з часом. Швидкість чисельно дорівнює першій похідній координати за часом:

$$v = \frac{dx}{dt} = -2 \cdot \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) = -\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right). \qquad (1)$$

Швидкість прийме максимальне значення в ті моменти часу, коли буде виконуватися умова

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)\right| = 1. \qquad (2)$$

Вирішимо рівняння (2) відносно часу $t$:

$$\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \qquad (3)$$

де $n$=0,1,2,3…

Скоротивши рівняння (3) на $\pi$, отримаємо:

$$\frac{t}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2n+1}{2}.$$

Звідси випливає, що

$$t=2n+\frac{1}{3}. \qquad (4)$$

$$\text{або} \quad t=\frac{1}{3}, 2\frac{1}{3}, 4\frac{1}{3}.... \text{ (с).}$$

Прискорення чисельно дорівнює першій похідній швидкості за часом:

$$a=\frac{dv}{dt}=-\frac{\pi^2}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}\right). \qquad (5)$$

Прискорення прийме максимальне значення в ті моменти часу, коли буде виконуватися умова:

$$\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}\right)\right|=1. \qquad (6)$$

Розв'яжемо рівняння (6) відносно часу $t$:

$$\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}\right)=n\pi, \qquad (7)$$

де $n$=0,1,2,3…

Скоротивши рівняння (7) на $\pi$, отримаємо:

$$\frac{t}{2}+\frac{1}{3}=n.$$

Звідси випливає, що

$$t=2n-\frac{2}{3}. \qquad (8)$$

$$\text{або} \quad t=1\frac{1}{3}, 3\frac{1}{3}, 5\frac{1}{3}....$$

Самостійно!

***Приклад 1.1***

Точка, що здійснює гармонічні коливання, в деякий момент часу має зміщення $x = 4{,}0$ см, швидкість $\upsilon_x = 5{,}0$ см/с і прискорення $a_x = -0{,}80$ м/с$^2$. Визначити: 1) амплітуду $A$ і період $T$ коливань точки; 2) фазу $\varphi$ коливань у момент часу, що розглядається; 3) максимальну швидкість $\upsilon_m$ та прискорення $a_m$ точки.

***Розв'язання***

| | |
|---|---|
| $A$ – ? $T$ -? $\varphi$ – ? $\upsilon_m$ – ? $a_m$ – ? | Аналізуючи відомі та шукані величини, робимо висновок, що для розв'язання задачі потрібно використати кінематичне рівняння гармонічних коливань (1а) та визначення швидкості, прискорення, фази. |
| $x = 4{,}0$ см; $\upsilon_x = 5{,}0$ см/с; $a_x = -0{,}80$ м/с$^2$. | |

Як відомо, зміщення за умови гармонічних коливань описується співвідношенням (1а):

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha), \qquad (1)$$

Самостійно!

$$\varphi = \omega_0 t + \alpha \qquad (2)$$

є фазою коливань.

Швидкість та прискорення знайдемо, використовуючи визначення цих величин та (1):

$$\upsilon_x = dx / dt = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha), \qquad (3)$$

$$a_x = d\upsilon_x / dt = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha). \qquad (4)$$

Із цих формул випливає, що максимальні значення швидкості та прискорення дорівнюють

$$\upsilon_m = A\omega_0, \; a_m = A\omega_0^2. \qquad (5)$$

Знайшовши амплітуду $A$ і частоту $\omega_0$, можемо визначити за допомогою (5) $\upsilon_m$ та $a_m$. Також беремо до уваги, що частота $\omega_0$ та період коливань $T$ пов'язані між собою як

$$T = 2\pi / \omega_0. \qquad (6)$$

Як випливає з умови задачі та (1) – (4), для деякого моменту часу відомі зміщення, швидкість та прискорення точки:

$$x = A\cos\varphi, \; \upsilon_x = -A\omega_0 \sin\varphi, \; a_x = -A\omega_0^2 \cos\varphi. \qquad (7)$$

Із цих трьох рівнянь знаходимо три невідомі величини: амплітуду $A$, частоту $\omega_0$ та фазу коливань $\varphi$:

Самостійно!

$$\frac{a_x}{x} = \frac{-A\omega_0^2 \cos\varphi}{A\cos\varphi} = \omega_0^2,\ \omega_0 = \sqrt{-\frac{a_x}{x}},\ T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{-\frac{x}{a_x}}; \quad (8)$$

$$\cos\varphi = x/A,\ \sin\varphi = -\upsilon_x/(A\omega_0),\ \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,$$

$$(x/a_x)^2 + (\upsilon_x/(A\omega_0))^2 = 1,$$

$$A = \sqrt{(x)^2 + (\upsilon_x/\omega_0)^2} = \sqrt{(x)^2 - \upsilon_x{}^2 x/a_x}; \quad (9)$$

$$\varphi = \arccos(x/A) = \arccos(x/\sqrt{(x)^2 - \upsilon_x^2 x/a_x}). \quad (10)$$

Для знаходження максимальних значень швидкості та прискорення використаємо (5), (8) та (9):

$$\upsilon_m = A\omega_0 = \sqrt{(x)^2 - \upsilon_x^2 x/a_x} \cdot \sqrt{-a_x/x} = \sqrt{\upsilon_x^2 - xa_x}, \quad (11)$$

$$a_m = A\omega_0^2 = \sqrt{(x)^2 - \upsilon_x^2 x/a_x} \cdot (-a_x/x) = \sqrt{a_x^2 - a_x\upsilon_x^2/x}. \quad (12)$$

Таким чином, шукані величини $A$, $T$, $\varphi$, $\upsilon_m$ та $a_m$ визначаються формулами (8) – (12). Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул (8) – (12), в одиницях СІ й виконаємо обчислення: $T = 1{,}4$ с; $A = 4{,}2$ см; $\varphi = \pi/12$; $\upsilon_m = 0{,}19$ м/с; $a_m = 0{,}83$ м/с$^2$.

**Приклад 1.3.4.** Знайти амплітуду $A$ і початкову фазу $\varphi_0$ гармонічного коливання, отриманого від додавання однаково спрямованих коливань, заданих рівняннями $x_1(t) = 4\cos\pi t$ (см) и $x_2(t) = 3\cos(\pi t + \pi/2)$ (см). Написати рівняння результуючого коливання. Побудувати векторну діаграму додавання амплітуд.

*Розв'язання.* Коливання відбуваються в одному напрямку і мають однакову частоту. У цьому випадку амплітуда результуючого коливання визначається за формулою:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}. \qquad (1)$$

Із заданих рівнянь визначаємо значення амплітуд і початкових фаз: $A_1$=4 см, $A_2$=3 см, $\varphi_{01}$=0, $\varphi_{02}$=$\pi/2$. Частота коливань, що додаються $\omega$=$\pi$.

Початкову фазу результуючого коливання можна визначити з умови:

$$\mathrm{tg}\,\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_{01} + A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01} + A_2\cos\varphi_{02}}. \qquad (2)$$

Підставивши чисельні значення величин у формули (1) і (2), отримаємо $A$=5 см, $\mathrm{tg}\varphi_0$=0,75, $\varphi_0 = \mathrm{arctg}\,0{,}75 \approx 37^\circ = 0{,}20\pi$.

Результуюче коливання буде мати ту ж частоту, тобто $\omega$=$\pi$. Запишемо рівняння результуючого коливання:

$$x(t) = 5\cos(\pi t + 0{,}20\pi)\ (\text{см}). \qquad (3)$$

**Приклад 1.3.6.** Матеріальна точка бере участь одночасно в двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливаннях, що виражаються рівняннями:

$x = \cos \pi t$ (см) и $y = 2\cos\frac{\pi}{2}t$ (см). Знайти рівняння траєкторії точки, визначити її швидкість у момент часу $t$=1/3 с і напрямок руху.

*Розв'язання.* Для визначення траєкторії точки, що бере участь одночасно в двох взаємно перпендикулярних коливаннях, слід виключити час t з рівнянь коливань, що додаються. Для цього використовуємо наступне тригонометричне співвідношення:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}. \qquad (1)$$

У нашому випадку $\alpha = \pi t$, тому:

$$y = 2\cos\frac{\pi}{2}t = 2\sqrt{\frac{1+\cos\pi t}{2}}. \qquad (2)$$

Оскільки $\cos\pi t = x$, то зробимо заміну:

$$y = 2\sqrt{\frac{1+x}{2}}. \qquad (3)$$

Рівняння (3) можна привести до виду:

$$x = \frac{y^2}{2} - 1. \qquad (4)$$

**Приклад 1.3.8.** Тягар масою $m$, що підвішений до пружини, за 1 хв здійснює 120 коливань. Знайти масу тягаря, якщо відомо, що пружина під дією сили $F$=9,8 Н розтягується на $x$=1,5 см.

*Розв'язання.* Період коливань пружинного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad (1)$$

де $m$ – маса тягаря, $k$ – коефіцієнт жорсткості пружини.
Виразимо масу:

$$m = k\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2. \qquad (2)$$

Коливання відбуваються під дією пружної сили, тому для знаходження $k$ використовуємо закон Гука:

$$F = -kx \qquad (3)$$

$$k = \left|-\frac{F}{x}\right|. \qquad (4)$$

Період – це час, протягом якого відбувається одне коливання, тому

$$T = \frac{t}{N}. \qquad (5)$$

де $N$ – число коливань.
Підставимо (4) і (5) в (2):

$$m = \frac{F}{x}\cdot\left(\frac{t}{2\pi N}\right)^2. \qquad (6)$$

Підставивши чисельні значення у формулу (6), отримаємо $m$=4,1 кг.

Самостійно!

**Приклад 1.3.7.** Однорідна кулька підвішена на нитці, довжина якої дорівнює радіусу $R$ кульки. У скільки разів період коливань $T_1$ цього маятника більше періоду коливань $T_2$ математичного маятника з такою ж відстанню від центра мас до точки підвісу?

*Розв'язання.* Кулька, що підвішена на нитці, довжина якої дорівнює радіусу $R$ кульки, являє собою фізичний маятник (рис. 1.4). Період коливань фізичного маятника

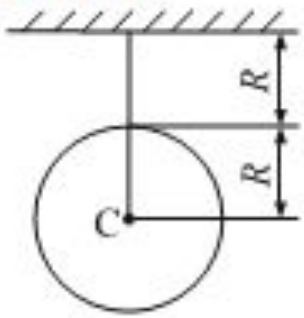

Рисунок 1.4

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}, \qquad (1)$$

де $J$ – момент інерції маятника відносно осі коливань,
$m$ – маса маятника,
$l$ – відстань від осі коливань до центра мас маятника.

За умовою задачі $l = 2R$. Момент інерції маятника відносно осі коливань знайдемо за теоремою Штейнера:

$$J = J_0 + ml^2, \qquad (2)$$

де $J_0$ – момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас паралельно даній; $l$ – відстань між осями.

Момент інерції кульки відносно осі, що проходить через центр мас паралельно даній

$$J_0 = \frac{2}{5}mR^2. \qquad (3)$$

Тоді:

$$J = \frac{2}{5}mR^2 + m \cdot 4R^2 = 4{,}4mR^2. \qquad (4)$$

Самостійно!

Зробимо підстановку в (1), отримаємо:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{4,4mR^2}{mg\,2R}} = 2\pi\sqrt{\frac{2,2R}{g}}. \qquad (5)$$

Період коливань математичного маятника

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}, \qquad (6)$$

де $l_2$ – довжина маятника. За умовою задачі $l_2 = l = 2R$.
Тоді

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}. \qquad (7)$$

Знайдемо відношення періодів, розділивши (5) на (7). Зробивши скорочення, отримаємо:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi}{2\pi}\sqrt{\frac{2,2R}{g}\cdot\frac{g}{2R}} = 1,05.$$

**Приклад 1.3.10.** Амплітуда загасаючих коливань математичного маятника за час $t_1$=1 хв зменшується вдвічі. У скільки разів зменшиться амплітуда за час $t_2$=3 хв?

*Розв'язання.* Амплітуда загасаючих коливань змінюється за законом:

$$A = A_0 e^{-\beta t} \qquad (1)$$

де β – коефіцієнт загасання.
Амплітуда коливань в момент часу $t_1$:

$$A_1 = A_0 e^{-\beta t_1} \qquad (2)$$

З рівняння (2) знайдемо коефіцієнт загасання.

$$\frac{A_0}{A_1} = e^{\beta t_1}$$

Прологаріфмуємо обидві частини рівняння, отримаємо:

$$\beta t_1 = \ln\frac{A_0}{A_1},$$

$$\beta = \frac{1}{t_1}\ln\frac{A_0}{A_1}. \qquad (3)$$

Аналогічно можна записати рівняння для амплітуди в момент часу $t_2$:

$$A_2 = A_0 e^{-\beta t_2}$$

$$\frac{A_0}{A_2} = e^{\beta t_2} \qquad (4)$$

Підставимо в (4) вираз (3) для коефіцієнта загасання. отримаємо:

$$\frac{A_0}{A_2} = e^{\frac{t_2}{t_1}\ln\frac{A_0}{A_1}} = e^{\frac{t_2}{t_1}\ln 2}. \qquad (5)$$

Підставивши чисельні значення у формулу (5), отримаємо $\frac{A_0}{A_2} = 8$.

**Приклад 1.3.11.** Математичний маятник довжиною $l$=24,7 см здійснює загасаючі коливання. Через який час $t$ енергія коливань маятника зменшиться в 9,4 рази? Логарифмічний декремент загасання $\lambda$=0,01.

*Розв'язання.* Енергія системи, що коливається, визначається рівнянням:

$$W = \frac{kA^2}{2}. \qquad (1)$$

Якщо коливання згасаючі, то амплітуда зменшується за законом:

$$A = A_0 e^{-\beta t}. \qquad (2)$$

Підставимо (2) в (1), отримаємо:

$$W = \frac{kA_0^2 e^{-2\beta t}}{2} = W_0 e^{-2\beta t}, \qquad (3)$$

де $W_0 = \frac{kA_0^2}{2}$ – значення енергії в початковий момент часу.

Відношення $W_0$ до $W$ в момент часу t дорівнюватиме

$$\frac{W_0}{W} = \frac{W_0}{W_0 e^{-2\beta t}} = e^{2\beta t}. \qquad (4)$$

Коефіцієнт загасання пов'язаний з періодом і логарифмічним декрементом загасання співвідношенням:

$$\beta = \frac{\lambda}{T}. \qquad (5)$$

Період коливань математичного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (6)$$

Підставимо рівняння (5) і (6) в (4), отримаємо:

$$\frac{W_0}{W} = e^{\frac{2\lambda t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}}.$$

Прологарифмуємо обидві частини рівняння і знайдемо час.

$$\ln\frac{W_0}{W} = \frac{\lambda t}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

$$t = \frac{\pi \ln\frac{W_0}{W}}{\lambda}\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (7)$$

Підставивши чисельні значення у формулу (7), отримаємо $t$=112 с

## *Пружні хвилі*

1. Процес поширення коливань у просторі називається хвилею. Плоска біжуча монохроматична хвиля, яка поширюється вздовж позитивного напрямку осі $0x$, описується рівнянням:

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right), \qquad (3.1)$$

де $\xi(x,t)$ – зміщення від положення рівноваги точки середовища з координатою $x$ в момент часу $t$;

$v$ – швидкість поширення коливань в середовищі (фазова швидкість);

$A$ – амплітуда хвилі;

$\omega$ – циклічна частота коливань;

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число, $\lambda$ – довжина хвилі.

2. Довжина хвилі $\lambda$ пов'язана з періодом $T$ коливань і фазовою швидкістю $v$:

$$\lambda = vT. \qquad (3.2)$$

Швидкість поперечних хвиль у твердому кристалічному середовищі

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \qquad (3.3)$$

де $G$ – модуль зсуву.

$\rho$ – густина середовища.

Швидкість поздовжніх хвиль у твердому кристалічному середовищі

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \qquad (3.4)$$

де $E$ – модуль пружності;

$\rho$ – густина середовища.

**Приклад 3.3.2.** Рівняння коливань джерела хвиль має вигляд $\xi(0,t)=\cos 2\pi t$ (см). Знайти зміщення від положення рівноваги, швидкість і прискорення точки, що знаходиться на відстані $x$=20 м від джерела коливань, для моменту часу $t$=1 с після початку коливань. Швидкість поширення коливань дорівнює $v_ф$=100 м/с.

*Розв'язання.* При поширенні незгасаючих коливань уздовж деякого напряму виникає плоска монохроматична хвиля, яка описується рівнянням

$$\xi(x,t)=A\cos(\omega t-kx), \qquad (1)$$

де $A$ – амплітуда хвилі, $\omega$ – циклічна частота, $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число.

Порівнюючи рівняння (1) з рівнянням коливань джерела хвиль, визначимо амплітуду коливань і їх циклічну частоту:

$$A=1 \text{ см}, \ \omega=2\pi \text{ рад/с}.$$

Період коливань $T$ і циклічна частота $\omega$ зв'язані співвідношенням

$$T=\frac{2\pi}{\omega}, \qquad (2)$$

тому довжина хвилі

$$\lambda=v_ф T=v_ф\frac{2\pi}{\omega}. \qquad (3)$$

Тоді хвильове число можна виразити таким чином:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\omega}{v_ф 2\pi} = \frac{\omega}{v_ф}. \qquad (4)$$

Підставивши чисельні значення величин у формулу (4), знайдемо хвильове число

$$k = 0{,}02\pi \text{ (1/м)}.$$

Запишемо рівняння хвилі з числовими коефіцієнтами:

$$\xi(x,t) = \cos(2\pi t - 0{,}02\pi x) \text{ (см)}. \qquad (5)$$

Швидкість $v$ точки, що коливається, за визначенням дорівнює похідній зміщення за часом:

$$v = \frac{\partial\xi}{\partial t} = -2\pi\sin(2\pi t - 0{,}02\pi x) \text{ (см/с)}. \qquad (6)$$

Прискорення $a$ точки, що коливається, за визначенням дорівнює першої похідній швидкості за часом

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} = -4\pi^2\cos(2\pi t - 0{,}02\pi x) \text{ (см/с}^2\text{)}. \qquad (7)$$

Підставивши чисельні значення величин у формули (5), (6) і (7), знайдемо зміщення $\xi(x,t)$ точки від положення рівноваги, її швидкість $v$ і прискорення $a$:

$$\xi(x,t) = 0{,}31 \text{ см}, \qquad v = -5{,}97 \text{ см/с}, \qquad a = -12{,}2 \text{ см/с}^2.$$

# Молекулярна фізика

**Приклад 1.1.** Визначити кількість речовини , що міститься в 1літрі води.

$V = 10^{-3} м^3$

$A_r(H) = 1$

$A_r(O) = 16$

$\rho = 1 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}$

---

$\nu$ - ?

Розв'язання.

Кількість речовини, тобто кількість молів води, що міститься в одному 1л, обчислюємо за формулою (1.7):

$$\nu = \frac{m}{M}.$$

Масу води m визначаємо за її густиною ρ та об'ємом V:

$$m = \rho V.$$

Тоді

$$\nu = \frac{\rho V}{M}$$

Молярну масу води знаходимо за її відносною молекулярною масою, яка дорівнює

$$M_r(H_2O) = 2 \cdot A_r(H) + A_r(O) = 2 \cdot 1 + 16 = 18 \text{ а.о.м.}$$

Згідно (1.5) $M = M_r \cdot 10^{-3}$ кг/моль = $18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

$$\nu = \frac{1 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3} \cdot 10^{-3} м^{-3}}{18 \cdot 10^{-3} \frac{кг}{моль}} = 55{,}6 \text{ моль}$$

# ІДЕАЛЬНИЙ ГАЗ.
# ПАРАМЕТРИ ТА РІВНЯННЯ СТАНУ ІДЕАЛЬНОГО ГАЗУ

**Приклад 2.1.** Знайти густину кисню при нормальних умовах.

$p \approx 10^5$ Па
$T = 0°$ C $= 273$К
$R = 8{,}31$ Дж / (моль · К)
$M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

---

$\rho$- ?

Розв'язання

При нормальних умовах P = 760мм.рт.ст., T = 0° C.

Застосуємо рівняння Менделєєва – Клапейрона (2.9)

$$pV = \frac{m}{M}RT, \qquad (1)$$

де p – тиск газу, V – об'єм газу; m – маса газу; M – молярна маса газу; R – універсальна газова стала; T – термодинамічна температура. Густина речовини $\rho = \frac{m}{V}$. (2)

Розв'язуємо сумісно (1) і (2). Для цього з (2) виразимо m і підставимо в (1):

$$pV = \frac{\rho V RT}{M}, \quad \text{або} \quad p = \frac{\rho RT}{M}.$$

Звідки $\rho = \frac{pM}{RT}$.

$$\rho = \frac{10^5 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 273} = 1{,}41\left(\text{кг /м}^3\right).$$

**Приклад 2.3.** У балоні об'ємом 5л міститься гелій під тиском 2МПа при температурі 127°С. Після того, як з балону взяли деяку масу гелію, температура у балоні зменшилась на 10 градусів, а тиск – до 1,5 МПа. Яку масу гелію було взято з балону?

$V = 5 \cdot 10^{-3} м^3$
$p_1 = 2 \cdot 10^6$ Па
$p_2 = 1{,}5 \cdot 10^6$ Па
$R = 8{,}31$ Дж/(моль·К)
$T_1 = 400K$
$T_2 = 390K$
$M = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

m - ?

Розв'язання

Записуємо рівняння Менделєєва – Клапейрона (2.9) для початкового і кінцевого станів газу у балоні.

$$p_1 V = \frac{m_1}{M} R T_1; \ (1) \qquad p_2 V = \frac{m_2}{M} R T_2, \ (2)$$

де $p_1$, $m_1$, $T_1$ – тиск, маса, термодинамічна температура у початковому стані; $p_2$, $m_2$, $T_2$ – відповідні величини у кінцевому стані; V – об'єм балону; M – молярна маса гелію; R – універсальна газова стала.

З (1) і (2) виразимо $m_1$ і $m_2$:

$$m_1 = \frac{p_1 V M}{R T_1}; \qquad m_2 = \frac{p_2 V M}{R T_2};$$

Тоді
$$m_1 - m_2 = \frac{p_1 V M}{R T_1} - \frac{p_2 V M}{R T_2} = \frac{VM}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right)$$

$$m_1 - m_2 = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{8{,}31}\left(\frac{2 \cdot 10^6}{400} - \frac{1{,}5 \cdot 10^6}{390}\right) = 0{,}00277 кг = 2{,}77 г$$

**Приклад 2.4.** У посудині об'ємом V=25л міститься $m_1$=100г гелію і $m_2$ =140г азоту при температурі t =27°С. Знайти тиск у посудині.

$V = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ м$^3$
$m_1 = 0{,}10$ кг
$m_2 = 0{,}14$ кг
$M_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$M_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$T = 300$ К

p-?

Розв'язання

Скористаємося законом Дальтона (2.12), згідно з яким тиск у суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків.

$$p = p_1 + p_2, \qquad (1)$$

де
$$p_1 = \frac{m_1}{M_1}\frac{RT}{V} \text{ і } p_2 = \frac{m_2}{M_2}\frac{RT}{V}. \qquad (2)$$

Тут $M_1$ і $M_2$- молярні маси гелію і азоту відповідно.

Підставимо (2) в (1):

$$p = \frac{m_1}{M_1}\frac{RT}{V} + \frac{m_2}{M_2}\frac{RT}{V} = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)\frac{RT}{V}. \qquad (3)$$

$$p = \left(\frac{100 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}} + \frac{140 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}}\right)\frac{8{,}31 \cdot (27 + 273)}{25 \cdot 10^{-3}} = 2{,}99 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

Перевірка одиниці вимірювання:

$$[p] = \frac{\text{кг}}{\text{кг/моль}}\frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}$$

Відповідь:p=2,99 МПа.

# ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ГАЗІВ

**Приклад 3.1.** Середня квадратична швидкість руху молекул деякого газу $v_{кв}$=800м/с. Знайти його густину ρ, якщо тиск p у балоні 380мм рт.ст.

p = 380мм рт.ст.
$v_{кв}$=800м/с

ρ - ?

Розв'язання

Середня квадратична швидкість теплового руху молекул газу за формулою (3.14) дорівнює

$$v_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}, \qquad (1)$$

де $R = 8{,}31 Дж/(моль \cdot К)$; T – абсолютна температура; M – молярна маса газу.

Звідки
$$v_{кв}^2 = \frac{3RT}{M}. \qquad (2)$$

Порівняємо з рівнянням Менделєєва-Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT \qquad (3)$$

З (2) виразимо $\frac{RT}{M} = \frac{v_{кв}^2}{3}$ і підставимо в (3):

$$pV = \frac{mv_{кв}^2}{3}, \text{ або } p = \frac{m}{V} \cdot \frac{v_{кв}^2}{3} \qquad (4)$$

За означенням густина ρ= m/V, тому з (4) $\rho = \frac{3p}{v_{кв}^2}$. (5)

Переведемо тиск у одиницю вимірювання в СІ:

$$p = 380 \text{ мм рт. ст.} \times 133 = 0{,}5 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Підстановка у (5) числових даних дає $\rho = \frac{3 \cdot 0{,}5 \cdot 10^5}{(800)^2} = 0{,}23 \text{ кг/м}^3$.

**Приклад 3.7.** Пилинки масою $m = 10^{-21}$ кг розподілені в повітрі. Визначити товщину шару повітря, в межах якого концентрація пилинок відрізняється не більше, ніж на 1%. Температура T повітря є однаковою і дорівнює 300К.

$m = 10^{-21}$ кг
$\frac{\Delta n}{n} = 0,01$
$T = 300$К

$\Delta h$ -?

Розв'язання

Розподілу пилинок можна описати формулою Больцмана (3.17): $n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$. (1)

Оскільки $\frac{\Delta n}{n}$ є малим, зміну концентрації замінюємо диференціалом $dn$, який знаходимо із формули (1):

$$dn = -n_0 \frac{mg}{kT} e^{-\frac{mgh}{kT}} dh.$$

$n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} = n$, тому $dn = -n \frac{mg}{kT} dh$. Звідки виражаємо зміну висоти, що відповідає шуканому шару повітря: $dh = -\frac{kT}{mg} \cdot \frac{dn}{n}$. (2)

Знак мінус показує, що при зростанню координати відповідає зменшення концентрації. В даному випадку він несуттєвий і може не ураховуватися. Замінюємо в виразі (2) диференціали на $\Delta h$ та $\Delta n$. Тоді

$$\Delta h = -\frac{kT}{mg} \cdot \frac{\Delta n}{n}. \qquad (3)$$

$$\Delta h = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 0,01}{10^{-21} \cdot 9,8} = 4,23 \cdot 10^{-3} \text{ (м)}$$

**Приклад 5.7.** Вуглекислий газ масою m=66г, який має температуру $t = 7^\circ C$, ізотермічно розширюється так, що його об'єм збільшується вдвічі. Яку роботу виконує при цьому газ?

$m = 66 \cdot 10^{-3}$ кг
$T = 280K$
$V_2 / V_1 = 2$
$M(CO_2) = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$R = 8{,}31$ Дж/(моль·К)

A - ?

Розв'язання



Роботу, яку виконує газ, знайдемо, скориставшись формулою (5.14):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \qquad (1)$$

Оскільки під час ізотермічного процесу тиск p змінюється, виразимо тиск через об'єм газу з рівняння Менделєєва – Клапейрона (2.9): $pV = \nu RT$, звідки

$$p = \frac{\nu RT}{V} \qquad (2)$$

Підставимо (2) у (1) і виконаємо інтегрування:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right). \qquad (3)$$

Зважаючи на те, що $\nu = m/M$, маємо

$$A = \frac{m}{M} RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

$$A = \frac{66 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31 \cdot 280}{44 \cdot 10^{-3}} \cdot \ln 2 = 2{,}41 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 2{,}41 \text{ кДж}.$$

**Приклад 5.8.** При ізобаричному нагріванні m = 6г водню з початковою температурою $t_1 = 27^\circ C$, його об'єм зріс у два рази ($V_2 = 2V_1$). Знайти: 1)роботу A газу; 2) зміну внутрішньої енергії $\Delta U$ газу; 3) кількість теплоти Q, яку надано газу.

$T_1 = 300K$
$V_2 = 2V_1$
$m = 6 \cdot 10^{-3}$ кг
$M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$R = 8{,}31$ Дж/(моль·К)

A; $\Delta U$; Q - ?

Розв'язання

1). Робота газу при ізобаричному нагріванні (5.15):

$$A = p(V_2 - V_1).$$

Скористаємося рівнянням Менделєєва – Клапейрона, записавши його двічі: для початкового і кінцевого станів.

$$PV_1 = \frac{m}{M} RT_1 \qquad (1)$$

$$PV_2 = \frac{m}{M} RT_2 \qquad (2)$$

З (2) віднімаємо (1)

$$P(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1),$$

або

$$A = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1). \qquad (3)$$

Різницю температур можна знайти з (2.26):

При P = const $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$; за умовою задачі $\frac{V_2}{V_1} = 2$, тому $\frac{T_2}{T_1} = 2$. Тобто

$T_2 = 2T_1 = 2 \cdot (27 + 233) = 600\,K$.

Тоді $T_2 - T_1 = 600\,K - 300\,K = 300\,K$.

Робота газу $A = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 \cdot 300 = 7{,}48 \cdot 10^3$ Дж =7,48 кДж.

2). Внутрішня енергія газу визначається за формулою (2.23).

$$U = \nu \frac{i}{2} RT,$$

Тоді зміна внутрішньої енергії $\Delta U = \nu \frac{i}{2} R \Delta T$, (4)

де i – кількість ступенів свободи; для водню $H_2$ (двохатомна молекула) i=5.

Обчислення:

$$\Delta U = \frac{6 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 8{,}31 \cdot (600 - 300)}{2 \cdot 10^{-3}} = 18{,}68 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 18{,}68 \text{ кДж}.$$

3) Згідно з першим законом термодинаміки (5.2)

$$Q = \Delta U + A$$

Тому $Q = 18{,}68 + 7{,}48 = 26{,}16$ кДж.

**Приклад 5.8.** У циліндрі під поршнем знаходиться 1 моль азоту при температурі $t_1 = 27^\circ C$. Азот починає адіабатично розширюватись, збільшивши свій об'єм у 5 разів, далі його ізотермічно стискають до початкового об'єму. Знайти 1) температуру азоту $T_2$ наприкінці адіабатичного розширення; 2) роботу $A_1$ при адіабатичному розширенні 3) роботу $A_2$ при ізотермічному стисканні та повну роботу A, яку виконає газ. Побудувати p-V – діаграму процесу.

| | |
|---|---|
| $T_1 = 300K$<br>$V_2 = 5V_1$<br>$\nu = 1$ моль<br>$R = 8{,}31$ Дж/(моль·K)<br>$i=5$ | Розв'язання |
| $T_2$; $A_1$; $A_2$; A -? | |

1) Температура і об'єм газу при адіабатичному розширенні зв'язані рівнянням (5.18):

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}. \qquad (1)$$

Із рівняння адіабати (1) виражаємо $T_2$ :

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}, \qquad (2)$$

де коефіцієнт Пуассона $\gamma$ за формулою (5.11) дорівнює:

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5+2}{5} = 1{,}4 \quad \text{(для 2-атомного газу i=5).}$$

Підстановка значень у формулу (2) дає

$$T_2 = 300\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{1,4-1} = 300\cdot 0{,}525 = 157K$$

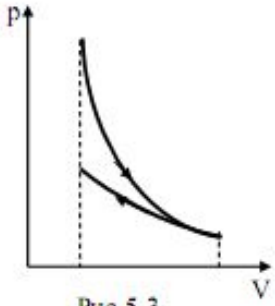

Рис.5.3.

2) Робота $A_1$ при адіабатичному розширенні газу може бути обчислена за формулою (5.17):

$$A_1 = -\nu C_v \Delta T = -\nu\frac{i}{2}R\left(T_2 - T_1\right).$$

$$A_1 = -1\cdot\frac{5}{2}\cdot 8{,}31\cdot\left(157-300\right) = 2970 \text{ Дж.}$$

3) Роботу $A_2$ газу при ізотермічному поширенні надає формула (5.16)

$$A_2 = \nu RT_2\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

$$A_2 = 1\cdot 8{,}31\cdot 157\cdot\ln\left(\frac{1}{5}\right) = -2100 \text{Дж.}$$

Сумарна робота $A = A_1 + A_2$.

A = 2,97 кДж – 2,10 кДж = 0,87 кДж.

# ОСНОВИ ТЕРМОДИНАМІКИ. ДРУГИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ. ЕНТРОПІЯ СИСТЕМИ

**Приклад 6.1.** Ідеальна теплова машина працює за циклом Карно. Температура нагрівника $T_1$=400 К, холодильника $T_2$=300 К. За кожен цикл машина отримує від нагрівника кількість теплоти $Q_1$=2,1 кДж. Визначити 1)коефіцієнт корисної дії машини $\eta$ і корисну роботу А, яку виконує машина за один цикл. 2) Яким буде холодильний коефіцієнт цієї машини, якщо вона буде здійснювати той самий цикл у зворотному напряму?

Розв'язання

| | |
|---|---|
| $T_1$=400 К<br>$T_2$=300 К<br>$Q_1$=2,1 кДж. | 1) Коефіцієнт корисної дії можна визначити або за формулою (6.4) |
| $\eta$, А - ? | |

$$\eta = \frac{A}{Q_1}, \qquad (1)$$

або (для циклу Карно) за формулою (6.6)

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \qquad (2)$$

Спочатку за формулою (2) знайдемо коефіцієнт корисної дії

$$\eta = \frac{400 - 300}{400} = 0,25 = 25\%.$$

Потім за формулою (1) знайдемо роботу А.

$$A = \eta Q_1 = 0,25 \cdot 2,1 \cdot 10^3 = 525 \text{ Дж}.$$

2) У зворотному циклі робоче тіло буде відбирати у холодильника кількість теплоти $Q_2$ і віддавати нагрівнику кількість теплоти $Q_1$. Робота, яку виконує робоче тіло в зворотному циклі буде від'ємною: $A' = -A$.

Холодильний коефіцієнт (6.7) запишемо у виді $\eta_x = \frac{|Q_2|}{|A|}$ (3), де $Q_2$ виразимо через $Q_1$ та A: $|Q_2| = Q_1 - |A|$.

Тоді з урахуванням виразу (1) для ККД теплової машини отримуємо:

$$\eta_x = \frac{Q_1 - |A|}{|A|} = \frac{1}{\eta} - 1.$$

Обчислення дає: $\eta_x = \frac{1}{0,25} - 1 = 3.$

**Приклад 6.4.** m=10г водню ізобарично нагрівають від $t_1 = 27^\circ C$ до $t_2 = 327^\circ C$. Знайти зміну ентропії газу $\Delta S$ у цьому процесі.

Розв'язання

| | |
|---|---|
| m=0,010кг<br>$t_1 = 27^\circ C$<br>$t_2 = 327^\circ C$<br>i=5<br>R=8,31 Дж/(моль · К) | Згідно з (6.10) зміна ентропії визначається формулою |
| $\Delta S$ - ? | |

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}, \qquad (1)$$

де $S_2$ і $S_1$ – значення ентропії відповідно у кінцевому і у початковому станах; $\delta Q$ – кількість теплоти, яку отримує газ у елементарному процесі; T – термодинамічна температура, при якій відбувалась теплопередача.

При ізобаричному процесі

$$\delta Q = C_P \nu dT, \qquad (2)$$

де $C_P$ – молярна теплоємність водню при ізобаричному нагріванні; $\gamma$ – кількість речовини; dT – збільшення температури.

У свою чергу

$$C_P = \frac{i+2}{2} R, \qquad (3)$$

де i – ступені свободи молекул (для водню $H_2$ i=5); R – газова стала. R=8,31 Дж/(моль · К).

$$\nu = \frac{m}{M}, \qquad (4)$$

де m – маса газу; M– молярна маса газу. Для водню $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Підставимо (2), (3), (4) у (1) і виконаємо інтегрування:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{i+2}{2} \cdot R \cdot \frac{m}{M} \cdot \frac{dT}{T} = \frac{(i+2)R \cdot m}{2M} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{(i+2)R \cdot m}{2M} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right).$$

Виразимо температури $T_1$ і $T_2$ у кельвінах (К):

$$T_1 = 27^\circ C + 273 = 300 \text{ К}; \; T_2 = 327 + 273 = 600 \text{ К}.$$

Обчислення.

$$\Delta S = \frac{(5+2) \cdot 8{,}31 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \ln \frac{600}{300} = 100 \text{ Дж/К}.$$