# ИЗМЕНЕНИЯ В КИМ ЕГЭ 2022 ГОДА В СРАВНЕНИИ С КИМ 2021 ГОДА

1. Удалены задания 1 и 2, проверяющие умение использовать приобретённые знания и умения в практической и повседневной жизни, задание 3, проверяющее умение выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами.
2. Добавлены задание 9, проверяющее умение выполнять действия с функциями, и задание 10, проверяющее умение моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий.

3. Внесено изменение в систему оценивания: максимальный балл за выполнение задания повышенного уровня 13, проверяющего умение выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами, стал равен 3; максимальный балл за выполнение задания повышенного уровня 15, проверяющего умение использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, стал равен 2.
4. Количество заданий уменьшилось с 19 до 18, максимальный балл за выполнение всей работы стал равным 31.

## СООТВЕТСТВИЯ НОМЕРОВ ЗАДАЧ В КИМ 2022 И КИМ 2021

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **2022** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| **2021** | 5 | 4 | 6 | 9 | 8 | 7 | 10 | 11 | — | — | 12 | 13 | 14 | 15 | 17 | 16 | 18 | 19 |

# Теория

**Факториалом** натурального числа $n$ называется результат произведения $n \cdot (n-1) \ldots 2 \cdot 1$. Факториал числа $n$ обозначается как $n!$.

**Перестановкой** $n$ элементов называется любой способ расставить их в определённом порядке. Количество перестановок длины $n$ равно $n!$

**Размещением** из $n$ элементов по $k$ называют любой выбор $k$ элементов, взятых в определённом порядке из $n$ элементов. Число размещений из $n$ элементов по $k$ обозначают $A_n^k$. Справедлива формула:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**Сочетанием** из $n$ элементов по $k$ называют любой выбор $k$ элементов, взятых из $n$ элементов (без учёта порядка). Число сочетаний из $n$ элементов по $k$ обозначают $C_n^k$. Справедлива формула:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

**Схема Бернулли.** Предположим, проводится серия из $n$ идентичных независимых экспериментов. В каждом из них вероятность наступления случайного события $A$ равна $p$. Тогда вероятность того, что в указанной серии экспериментов событие $A$ наступит ровно $k$ раз ($k \leqslant n$), вычисляется по формуле

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

## Условная вероятность

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ если } P(B) \neq 0$$

## Формула полной вероятности

Пусть результате эксперимента обязательно наступает ровно одно из событий $H_1, H_2, \ldots, H_m$ (гипотезы), причём вероятность каждого из них не равна 0.

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \ldots + P(A|H_m)P(H_m)$$

## Формула Байеса

$$P(H_k|A) = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{P(A)}, \text{ где } P(A) \neq 0$$


Определите количество элементов множества (**n**), из которого выбирается **k** элементов
Порядок выбранных элементов важен
НЕТ
ДА
Среди выбранных элементов есть повторения?
Выбираем все n элементов?
НЕТ
ДА
НЕТ
ДА
**Сочетания**
$C_n^k = \frac{n!}{k! * (n-k)!}$
**Сочетания с повторениями**
$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k! * (n-1)!}$
Среди выбранных элементов есть повторения?
Среди выбранных элементов есть повторения?
НЕТ
ДА
НЕТ
ДА
**Размещения**
$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
**Размещения с повторениями**
$\overline{A}_n^k = n^k$
**Перестановки**
$P_n = n!$
**Перестановки с повторениями**
$\overline{P}_n(k_1, \ldots, k_l) = \frac{n!}{k_1! * \ldots * k_l!}$

**10** Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?

# Решение 1

Шесть очков в сумме за три броска могло выпасть в следующих случаях:

1) $(1; 1; 4)$, $(1; 4; 1)$, $(4; 1; 1)$;

2) $(1; 2; 3)$, $(1; 3; 2)$, $(2; 1; 3)$, $(2; 3; 1)$, $(3; 1; 2)$, $(3; 2; 1)$;

3) $(2; 2; 2)$.

Всего 10 равновозможных случаев. Событию «хотя бы раз выпало 3 очка» благоприятны 6 из них.

Искомая вероятность равна $\frac{6}{10} = 0{,}6$.

# Решение 2

Пусть $A$ — событие «за три броска в сумме выпало 6 очков»;

$B$ — событие «за три броска хотя бы раз выпало 3 очка».

Тогда $A \cap B$ — событие «за три броска в сумме выпало 6 очков и хотя бы раз выпало 3 очка»;

$B \mid A$ — событие «за три броска хотя бы раз выпало 3 очка при условии, что в сумме выпало 6 очков», его вероятность надо найти.

По классическому определению вероятности $P(A) = \frac{10}{6^3} = \frac{10}{216}$,

$$P(A \cap B) = \frac{6}{6^3} = \frac{6}{216}.$$

Тогда $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{6}{216}}{\frac{10}{216}} = \dfrac{6}{10} = 0{,}6.$

**10** В городе 48% взрослого населения – мужчины. Пенсионеры составляют 12,6% взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 15%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

## Решение 1

Пусть всего в городе $n$ жителей. Тогда в городе:

$0{,}48n$ мужчин;
$0{,}52n$ женщин;
$0{,}126n$ пенсионеров;
$0{,}15 \cdot 0{,}52n$ женщин-пенсионеров.

Пусть $x$ — доля пенсионеров среди мужчин.

Тогда в городе $x \cdot 0{,}48n$ мужчин-пенсионеров.

Получим уравнение $0{,}15 \cdot 0{,}52n + x \cdot 0{,}48n = 0{,}126n$.

$52 \cdot 1{,}5 + 480x = 126;$ $x = \dfrac{126 - 78}{480} = \dfrac{48}{480} = 0{,}1.$

Согласно классическому определению вероятности, вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером» равна 0,1.

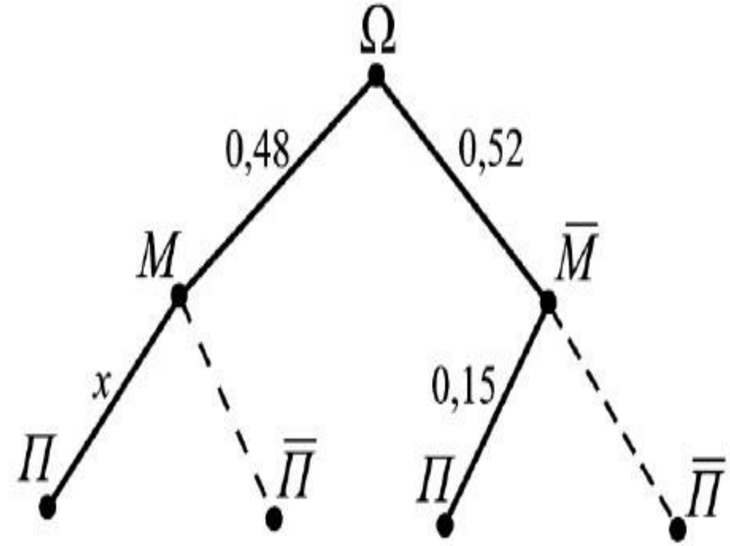
# Решение 2

Пусть $M$ — событие «наугад выбранный взрослый является мужчиной», $P(M) = 0{,}48$;

$\overline{M}$ — событие «наугад выбранный взрослый является женщиной», $P(\overline{M}) = 1 - 0{,}48 = 0{,}52$;

$\Pi$ — событие «наугад выбранный взрослый является пенсионером», $P(\Pi) = 0{,}126$;

$\Omega$ — событие «наугад выбираем взрослого».




Из рисунка получаем $P(\Pi) = 0{,}48x + 0{,}52 \cdot 0{,}15 = 0{,}126$;

$$x = \frac{0{,}126 - 0{,}52 \cdot 0{,}15}{0{,}48} = 0{,}1.$$

# Решение 3

Пусть $H_1$ — событие «наугад выбранный взрослый является мужчиной», $P(H_1) = 0{,}48$;

$H_2$ — событие «наугад выбранный взрослый является женщиной», $P(H_2) = 1 - 0{,}48 = 0{,}52$;

$A$ — событие «наугад выбранный взрослый является пенсионером», $P(A) = 0{,}126$.

Тогда $A \mid H_1$ — событие «наугад выбранный мужчина является пенсионером», его вероятность нужно найти;

$A \mid H_2$ — событие «наугад выбранная женщина является пенсионером», его вероятность $P(A \mid H_2) = 0{,}15$;

Запишем формулу полной вероятности $P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2)$

и подставим в неё известные вероятности $0{,}126 = 0{,}48 \cdot P(A \mid H_1) + 0{,}52 \cdot 0{,}15$;

$$P(A \mid H_1) = \frac{0{,}126 - 0{,}52 \cdot 0{,}15}{0{,}48} = 0{,}1.$$

**Задача.** В ящике лежат гелевые ручки: 8 синих, 6 красных и 2 зелёных. Надя достаёт случайным образом две ручки. Какова вероятность, что она достанет одну синюю и одну красную ручки?

## Решение

Будем считать все ручки различными. Результатом эксперимента является неупорядоченная пара ручек, которые достала Надя. Всего есть $C_{16}^2 = \dfrac{16!}{14! \cdot 2!} = \dfrac{16 \cdot 15}{2!} = 120$ равновозможных способов выбрать две ручки. Пару из синей и красной ручки можно составить $6 \cdot 8 = 48$ способами. Следовательно, искомая вероятность равна $\dfrac{48}{120} = 0{,}4$.

**Задача.** Петя бросает симметричную монету 26 раз. Во сколько раз вероятность события «решка выпадет ровно 7 раз» превосходит вероятность события «решка выпадет ровно 5 раз»?

## Решение

Вероятность того, что решка выпадет ровно 7 раз в серии испытаний из 26 бросков (используем схему Бернулли), равна $C_{26}^{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7} = \frac{26!}{7! \cdot 19!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{26}$.

Вероятность того, что решка выпадет ровно 5 раз в серии испытаний из 26 бросков (используем схему Бернулли), равна $C_{26}^{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{21} = \frac{26!}{5! \cdot 21!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{26}$.

Искомое отношение равно $\dfrac{\frac{26!}{7! \cdot 19!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{26}}{\frac{26!}{5! \cdot 21!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{26}} = \frac{5! \cdot 21!}{7! \cdot 19!} = \frac{5!}{7!} \cdot \frac{21!}{19!} = \frac{1}{6 \cdot 7} \cdot \frac{21 \cdot 20}{1} = 10.$

Стрелок Алексей стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события «Алексей поразит ровно четыре мишени» больше вероятности события «Алексей поразит ровно три мишени»?

## Решение

Не попадёт в цель за 2 выстрела с вероятностью $0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$.

Попадёт в цель за 2 выстрела с вероятностью $1 - 0{,}16 = 0{,}84$.

$A$ — «Алексей поразит ровно 4 мишени»

$$P(A) = C_5^4 \cdot (0{,}84)^4 \cdot (0{,}16)^1$$

$B$ — «Алексей поразит ровно 3 мишени». $P(B) = C_5^3 \cdot (0{,}84)^3 \cdot (0{,}16)^2$

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{C_5^4 \cdot (0{,}84)^4 \cdot (0{,}16)^1}{C_5^3 \cdot (0{,}84)^3 \cdot (0{,}16)^2} = \frac{\frac{5!}{4!1!} \cdot (0{,}84)^1}{\frac{5!}{3!2!} \cdot (0{,}16)^1} = 2{,}625$$

**Задача.** Ковбой Билл попадает в муху на стене с вероятностью 0,8, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Билл стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,25. На столе лежит 5 револьверов, из них только 2 пристрелянных. Ковбой Билл видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Билл попадёт в муху.

Пусть $H_1$ — «ковбой выбрал пристрелянный револьвер»,

$H_2$ — «ковбой выбрал непристрелянный револьвер»,

$A$ — «ковбой попал в муху».

Тогда

$P(H_1) = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$ (вероятность схватить один из двух пристрелянных револьеров),

$P(H_2) = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$ (вероятность схватить один из трёх непристрелянных револьеров).

По условию $P(A|H_1) = 0{,}8, \quad P(A|H_2) = 0{,}25.$

$$P(A) = P(A|H_1)(H_1) + P(A|H_2)(H_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}25 \cdot 0{,}6 = 0{,}47.$$

**Задача.** В ресторане администратор предлагает гостям сыграть в следующую игру: гость бросает одновременно две игральные кости. Если он бросит комбинацию 3 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплимент от повара: мини-пиццу. Какова вероятность получить комплимент от повара? Ответ округлите до сотых.

**Решение 1**

Рассмотрим две гипотезы:

$H_1$ — при первом броске выпала нужная комбинация и

$H_2$ — при первом броске не выпала нужная комбинация.

$P(H_1) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, так как из 36 упорядоченных пар ровно две удовлетворяют требованию: $(3;\ 6)$ и $(6;\ 3)$.

$P(H_2) = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$.

Событие $A$ — «клиент получил комплимент от повара в результате этой игры».

$P(A|H_1) = 1, \quad P(A|H_2) = \frac{1}{18}$.

$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2)$.

$$P(A) = 1 \cdot \frac{1}{18} + \frac{1}{18} \cdot \frac{17}{18} = \frac{35}{324} = 0{,}108\ldots \approx 0{,}11.$$

# Решение 2

Найдём вероятность противоположного события — в обеих попытках нужная комбинация не выпала.

При одной попытке вероятность выпадения нужной комбинации равна $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$,

так как из 36 упорядоченных пар, ровно две удовлетворяют требованию: (3; 6) и (6; 3).

Вероятность невыпадения нужной комбинации равна $1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$.

Оба раза нужная комбинация не выпала с вероятностью $\frac{17}{18} \cdot \frac{17}{18} = \frac{289}{324}$.

Искомая вероятность равна $1 - \frac{289}{324} = \frac{35}{324} = 0{,}108\ldots \approx 0{,}11$.

Семён бросал игральную кость до тех пор, пока сумма очков не превысила число 10. Найдите вероятность того, что потребовалось ровно 2 броска. Ответ округлите до сотых.

**Решение 1**

Пусть $H_i$ — событие, заключающееся в том, что при первом броске выпало $i$ очков.

Тогда $P(H_i) = \frac{1}{6}$ для любого целого $i$ от 1 до 6.

Пусть событие $A$ — «сумма очков превысила 10 при втором броске».

$$P(A) = P(A \mid H_1)P(H_1) + P(A \mid H_2)P(H_2) + P(A \mid H_3)P(H_3) + \ldots + P(A \mid H_6)P(H_6) =$$
$$= P(A \mid H_1) \cdot \frac{1}{6} + P(A \mid H_2) \cdot \frac{1}{6} + P(A \mid H_3) \cdot \frac{1}{6} + \ldots + P(A \mid H_6) \cdot \frac{1}{6}.$$

$P(A \mid H_5) = \frac{1}{6}$ (если при первом броске выпало 5 очков, то при втором броске должно выпасть 6 очков — единственный вариант из шести).

$P(A \mid H_6) = \frac{2}{6}$ (если при первом броске выпало 6 очков, то при втором броске должно выпасть 5 или 6 очков — два варианта из шести).

$P(A \mid H_i) = 0$ при $i \leqslant 4$ (если при первом броске выпало 4 очка или меньше, то сумма очков за первые два броска не превысит 10, то есть событие $A$ при таких условиях невозможно).

Отсюда $P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} = 0{,}083\ldots \approx 0{,}08.$

## Решение 2

За один бросок невозможно выбросить более 10 очков.

Значит, надо найти вероятность того, что сумма очков за два броска превысит 10.

В результате двух бросков наступает один из 36 равновозможных исходов (каждый исход представляет собой упорядоченную пару, в которой на первом месте стоит число выпавших очков при первом броске, а на втором — число очков при втором броске).

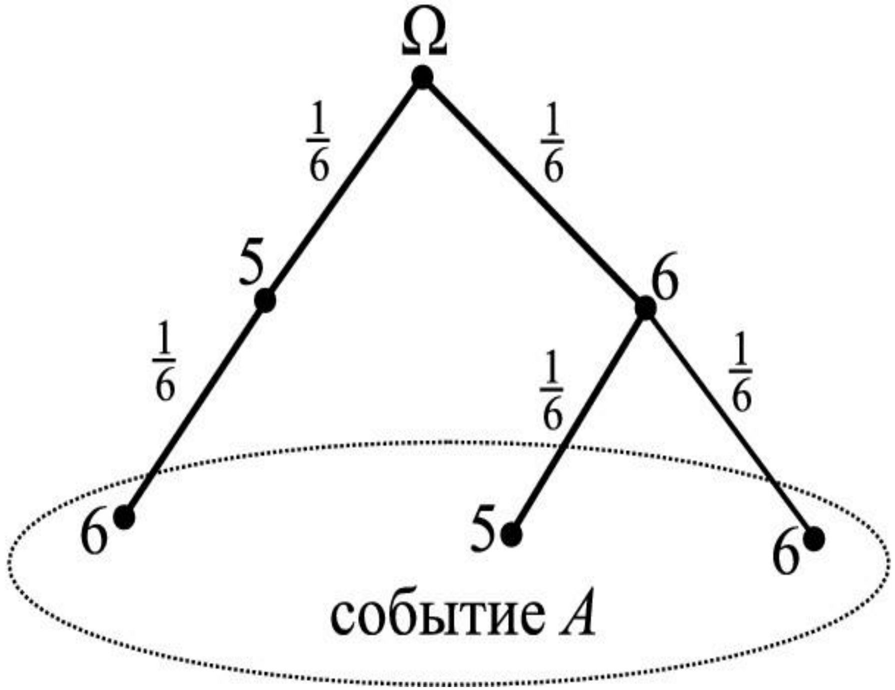
Ровно 3 исхода благоприятствуют событию «сумма выпавших очков за два броска превысила 10» — это исходы (5; 6), (6; 5), (6; 6).

Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0{,}083\ldots \approx 0{,}08$.

# Решение 3

Пусть $A$ — событие «сумма очков превысила 10 при втором броске».

Изобразим фрагмент дерева вероятности.




Из рисунка получаем $P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \approx 0{,}08.$

**Задача.** В ящике 8 фломастеров: 5 красных и 3 зелёных. Катя вытаскивает фломастеры по очереди. Какова вероятность, что в первый раз зелёный фломастер она вытащит четвёртым по счёту? Ответ округлите до сотых.

## Решение

Вероятность того, что первым Катя вытащит красный фломастер, равна $\frac{5}{8}$.

Если это событие наступит, то вероятность вытащить снова красный фломастер станет равна $\frac{4}{7}$.

Аналогично вероятность вытащить третий красный фломастер при условии того, что первые два — красные, равна $\frac{3}{6}$.

Вероятность того, что первые три вытащенных фломастера — красные, равна $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{28}$.

Если первые три вытащенных фломастера — красные, то вероятность четвёртым зелёный равна $\frac{3}{5}$.

Искомая вероятность равна $\frac{5}{28} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{28} = 0{,}107\ldots \approx 0{,}11$.

**Задача.** При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 88 % случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 92 % случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 11 % пациентов некоторой поликлиники, направленных на тестирование. При обследовании пациента А. врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент А. действительно имеет это заболевание?

## Решение 1

Пусть эксперимент заключается в выборе одного случайного пациента, направленного на анализ.

$A$ — «у наудачу взятого пациента тест дал положительный результат». По условию $P(A) = 0{,}11$.

$H_1$ — «этот пациент болен», $H_2$ — «этот пациент не болен». $P(A|H_1) = 0{,}88$, $P(A|H_2) = 1 - 0{,}92 = 0{,}08$.

$P(H_1) = x$, $P(H_2) = 1 - x$. $P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = 0{,}88x + 0{,}08(1 - x)$.

Получим уравнение $0{,}88x + 0{,}08(1 - x) = 0{,}11$; $x = \dfrac{3}{80}$.

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}88 \cdot \dfrac{3}{80}}{0{,}11} = 0{,}3.$$

# Решение 2

Пусть эксперимент заключается в выборе одного случайного пациента,

1. Пусть $A$ — событие «у наудачу выбранного пациента тест дал положительный результат», $P(A) = 0{,}11$;

$H_1$ — событие «этот пациент болен»;

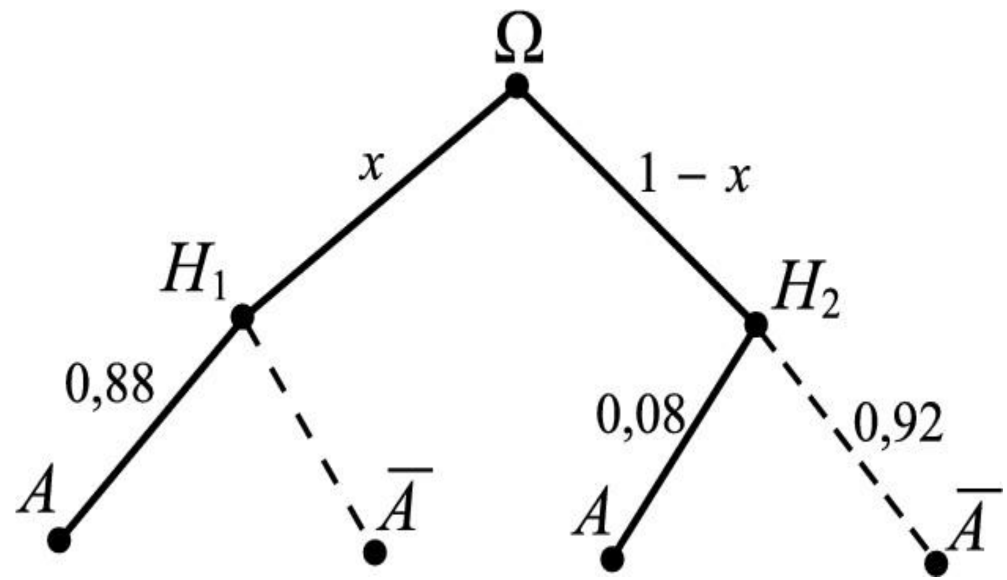
$H_2$ — событие «этот пациент не болен».

Пусть $P(H_1) = x$, тогда $P(H_2) = 1 - x$.

Изобразим эксперимент графически деревом вероятностей:

Из рисунка получаем $P(A) = 0{,}88x + 0{,}08(1 - x) = 0{,}11$;

$x = \dfrac{3}{80}, P(H_1) = \dfrac{3}{80}$.



2. Необходимо найти $P(H_1 \mid A) = \dfrac{P(H_1 \cap A)}{P(A)}$.

Пусть всего направлено на тестирование $n$ пациентов.

Тогда: $0{,}11n$ пациентов получили положительный результат теста; $\dfrac{3}{80}n$ пациентов больны;

$0{,}88 \cdot \dfrac{3}{80}n = 0{,}033n$ больных пациентов, тест которых положительный.

Тогда по классическому определению вероятности $P(H_1 \cap A) = \dfrac{0{,}033n}{n} = 0{,}033$.

Таким образом, $P(H_1 \mid A) = \dfrac{P(H_1 \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}033}{0{,}11} = 0{,}3$.

## Решение 3

Пусть всего направлено на тестирование $n$ пациентов, из них $k$ больных и $(n-k)$ не больных.

Тогда: $0{,}11n$ — пациентов с положительным тестом;
$0{,}88k$ — больных с положительным тестом;
$0{,}92(n-k)$ — не больных с отрицательным тестом;
$0{,}08(n-k)$ — не больных с положительным тестом.


Получим уравнение $0{,}88k + 0{,}08(n-k) = 0{,}11n$;

$$0{,}88\frac{k}{n} + 0{,}08(1-\frac{k}{n}) = 0{,}11.$$

Отсюда $\frac{k}{n} = \frac{3}{80}$, $k = \frac{3}{80}n$.

Тогда больных с положительным тестом $0{,}88k = 0{,}88 \cdot \frac{3}{80}n = 0{,}033n$.

Искомая вероятность того, что наугад выбранный пациент с положительным тестом действительно болен

$$P = \frac{0{,}033n}{0{,}11n} = 0{,}3.$$

**Задача.** Турнир по футболу проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует чётное число команд, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если число команд нечётно, то с помощью жребия выбираются случайные игровые пары, а одна команда остаётся без пары и не участвует в туре. Проигравшая в каждой паре команда (в случае ничьей проводятся серии пенальти до победы одного из участников) выбывает из турнира, а победители и команда без пары, если она есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся две команды, которые играют между собой финальный тур, то есть последний матч, который выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует 20 команд, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждой команды равна 0,5. Среди игроков две команды из Ставрополя «Факел» и «Пламя». Определите вероятность того, что каком-то туре им придётся сыграть друг с другом.

## Решение

Рассмотрим два события:

$A$ — «Команда „Факел“ прекратила участие в турнире, проиграв „Пламени“»;

$B$ — «Команда „Пламя“ прекратила участие в турнире, проиграв „Факелу“».

Эти два события несовместны. Искомая вероятность равна $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Найдём $P(A)$. Рассмотрим две гипотезы:
$H_1$ — «„Факел“ выиграл турнир»,
$H_2$ — «„Факел“ не выиграл турнир» (эти гипотезы являются противоположными событиями).

$P(H_1) = \frac{1}{20}$, так как каждая из 20 команд-участников имеет по условию равные шансы на победу в турнире.

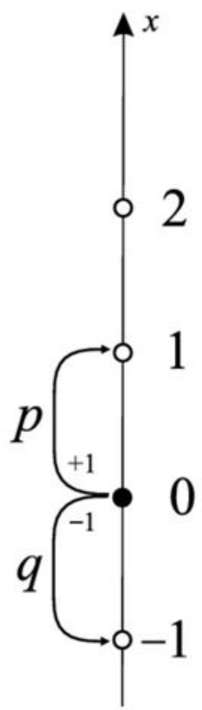
Отсюда $P(H_2) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$.

$P(A|H_1) = 0 \quad P(A|H_2) = \frac{1}{19}$ („Факел“ мог проиграть любой из 19 команд, а проиграл „Пламени“)

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = 0 + \frac{1}{19} \cdot \frac{19}{20} = \frac{1}{20}.$$

$P(B) = P(A) = \frac{1}{20}$. Искомая вероятность равна $\frac{1}{20} + \frac{1}{20} = 0{,}1$.

**10** Первый член последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p = 0{,}8$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1 - p$ на единицу меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен $-1$?




Пусть $P_0$ — вероятность попасть в точку $-1$, если вначале мы находимся в точке 0.

Так как из точки 0 можно пойти вверх с вероятностью $p$ или вниз с вероятностью $q = 1 - p$ и эти события несовместны, то

$$P_0 = q + p \cdot P_1,$$

где $P_1$ — вероятност[illegible]чку $-1$, находясь в точке 1.

Так как $P_0$ — это фактически вероятность из данной начальной точки достигнуть точку на единицу ниже, то $P_1 = P_0 \cdot P_0 = P_0^2$.

Получим квадратное уравнение

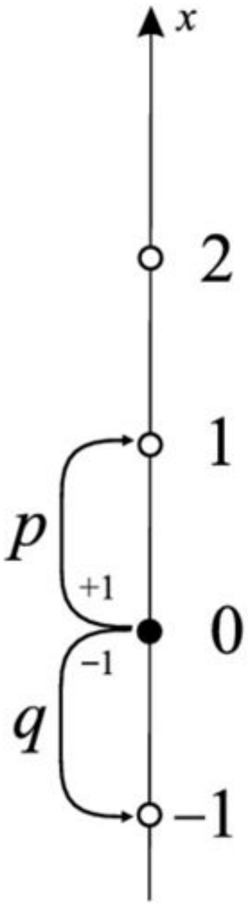
$$P_0 = q + p \cdot P_0^2.$$

Перепишем уравнение в виде $p \cdot P_0^2 - P_0 + q = 0$,
его дискриминант $D = 1 - 4pq = 1 - 4(1-q)q = 4q^2 - 4q + 1 = (2q-1)^2$.

Тогда $P_0 = \dfrac{1 \pm (2q-1)}{2p}$.

Отсюда

$$P_0 = \frac{1 + 2q - 1}{2p} = \frac{q}{p} \quad \text{или} \quad P_0 = \frac{1 - (2q-1)}{2p} = \frac{2(1-q)}{2p} = 1.$$




Отсюда

$$P_0 = \frac{1 + 2q - 1}{2p} = \frac{q}{p} \quad \text{или} \quad P_0 = \frac{1 - (2q - 1)}{2p} = \frac{2(1 - q)}{2p} = 1.$$

При $q \geqslant p$ так как $P_0 \leqslant 1$, то $P_0 = 1$.

Пусть $P_i$ — вероятность достигнуть точку $-1$ находясь в точке $i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Так как $P_0$ — это вероятность из данной начальной точки достигнуть точку на единицу ниже, то $P_1 = P_0^2, P_2 = P_0^3, \ldots$ Таким образом, $P_0, P_1, P_2, \ldots$ — это геометрическая прогрессия со знаменателем $P_0$.

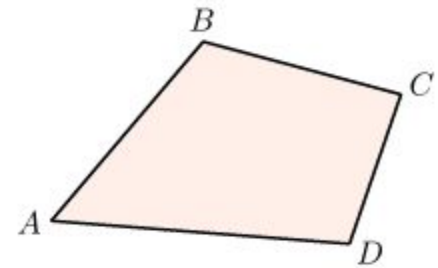
Если $q < p$ (то есть вероятность приблизиться к $-1$ меньше, чем вероятность отдалиться от неё), то интуитивно понятно, что чем дальше мы находимся от $-1$ в точке $i$, тем вероятность достигнуть точки $-1$ меньше. Значит, $\{P_i\}$ — убывающая геометрическая прогрессия и $P_0 = \dfrac{q}{p} < 1$.

В нашем случае $q < p$. Поэтому $P_0 = \dfrac{q}{p} = \dfrac{1 - 0{,}8}{0{,}8} = 0{,}25$.

# Задача

Илья решает задачу по геометрии, в которой дан четырёхугольник $ABCD$, причём $AB=5$, $BC=6$, $CD=4$, $AD=10$. В условии задачи сказано, что одна из вершин является центром некоторой окружности и Илья думает, какую вершину ему выбрать в качестве центра этой самой окружности.

Известно, что вероятность выбора каждой конкретной вершины пропорциональна сумме длин сторон четырёхугольника $ABCD$, проходящих через эту вершину. Какова вероятность того, что Илья выберет вершину $B$?




Через вершину $A$ проходят стороны $AB$ и $AD$, их сумма: $AB+AD=15$.
Через вершину $B$ проходят стороны $AB$ и $BC$, их сумма: $AB+BC=11$.
Через вершину $C$ проходят стороны $BC$ и $CD$, их сумма: $BC+CD=10$.
Через вершину $D$ проходят стороны $CD$ и $DA$, их сумма: $CD+DA=14$.
Обозначим вероятность выбора вершины $A$ через $P(A)$ (для остальных вершин аналогично). Тогда по условию имеем:

$$P(A)=15k, \qquad P(B)=11k, \qquad P(C)=10k, \qquad P(D)=14k,$$

но $P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1$, тогда $k=0,02$, откуда находим: $P(B)=0,22$.

**Ответ:** 0,22

Таня заметила, что в казино “Подкинем” используют неправильную игральную кость (т. е. не у всех граней вероятности выпадения одинаковы). При этом она установила, что вероятность выпадения чётного числа равна 0,6; вероятность выпадения числа, делящегося на 3, равна 0,3; вероятность того, что выпадет 1 или 5, равна 0,22. Найдите вероятность того, что на этой игральной кости выпадет число 3. Ответ округлите до сотых.

Вероятность выпадения числа $n$ обозначим через $P(\{n\})$, вероятность выпадения одного из чисел $m$ и $n$ обозначим через $P(\{m;n\})$, а вероятность выпадения одного из чисел $m$, $n$ и $k$ обозначим через $P(\{m;n;k\})$. Тогда

$$P(\{2;4;6\}) = 0,6 \qquad \Leftrightarrow \qquad P(\{1;3;5\}) = 1 - 0,6 = 0,4$$

При этом $P(\{1;5\}) = 0,22$, но ведь $P(\{1;3;5\}) - P(\{1;5\}) = P(\{3\})$, следовательно,

$$P(\{3\}) = 0,4 - 0,22 = 0,18.$$