Особенности решения задач 25 и 26 компьютерного ЕГЭ по информатике

К.Ю. Поляков

вебинар для учителей информатики г. Сочи
24 марта 2021 года

© К.Ю. Поляков, 2021

25. Пример

(***Демо-2021***) Напишите программу, которая ищет среди целых чисел, принадлежащих числовому отрезку [174457; 174505], числа, имеющие ровно **два различных натуральных делителя**, не считая единицы и самого числа. Для каждого найденного числа запишите эти два делителя в таблицу на экране с новой строки в порядке возрастания произведения этих двух делителей. Делители в строке таблицы также должны следовать в порядке возрастания.

25. Общий подход

1) Пишем решение «в лоб».
2) Если получили ответ, то СТОП.
3) Оптимизируем.
4) Переходим к шагу 2.

Не нужно оптимизировать без необходимости!

25. Решение

```
##
var startN:= 174457;
var endN:= 174505;
for var x:=startN to endN do begin
  var count:= 0;
  var divs:= |0, 0|;
  for var d:=2 to x-1 do
    if x.Divs(d) then begin
      count += 1;
      if count > 2 then break;
      divs[count-1]:= d;
    end;
  if count = 2 then
    Println( divs[0], divs[1] );
end;
```

```
var startN:= 174457000;
var endN:= 174505000;
```

? Как ускорить?

25. Ускорение

```
for var d:=2 to x div 2 do begin
   ...
end;
```

Сложность алгоритма не меняется!

$O(N^2)$

Делители в парах:

$$x = d \cdot g \ (d \le g) \Rightarrow \ d \le \sqrt{x}$$

Проблема: вещественное $\sqrt{x}$!

$$g = \frac{x}{d}$$

$$d \le \sqrt{x} \ \Rightarrow \ d^2 \le x$$

Проблема: полные квадраты!

$$d = g \quad \Rightarrow \text{один делитель}$$

25. Квадратный корень

```
##
var x := 100000000000;
while x < 1000000000000 do begin
  var sqrtX := sqrt(x);
  if x <> sqrtX*sqrtX then
    Println(x, x-sqrtX*sqrtX);
  x := x + 1;
end;
```

! Ошибка $\pm 1{,}53 \times 10^{-5}$!

? trunc? round? ceil?

25. Квадратный корень

```
for var d:=2 to round(sqrt(x)) do begin
   ...
end;
```

1) полный квадрат

$$\sqrt{25} \approx 5 - \varepsilon$$
$$\sqrt{25} \approx 5 + \varepsilon$$

round → 5

2) два множителя с разностью 1

$$\sqrt{30} \approx 5,477 - \varepsilon$$
$$\sqrt{30} \approx 5,477 + \varepsilon$$

round → 5

round здесь округлит к меньшему!

25. Квадратный корень

Без вещественных чисел:

$$d \le \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad d^2 \le x$$

```
var d:= 2;
while d*d <= x do begin
  ...
  d += 1;
end;
```

25. Список делителей

```
##
var startN := 174457;
var endN := 174505;
for var x:=startN to endN do begin
  var divs:= new List<integer>;
  for var d:=2 to round(sqrt(x)) do
    if x.Divs(d) then begin
      divs.Add(d);
      if d <> x div d then
        divs.Add(x div d);
      if divs.Count > 2 then break;
    end;
  if divs.Count = 2 then
    Println( divs[0], divs[1] );
end;
```

d*d <> x

25. Простые числа

```
function IsPrime(x: integer): boolean;
begin
  Result:= False;
  if x <= 1 then Exit;
  var d:= 2;
  while d*d <= x do begin
    if x.Divs(d) then Exit;
    d += 1;
  end;
  Result:= True;
end;
```

25. Список простых чисел

```
var primes := new List<integer>;
for var i:=1 to 1000000 do
  if IsPrime(i) then
    primes.Add(i);
Print( primes.Count );
```

Время 0,3 с!

25. Пример

(***Б.С. Михлин***) Напишите программу, которая ищет среди целых чисел, принадлежащих числовому отрезку [194441; 196500] **простые** числа, **оканчивающиеся на 93**.

25. Решение «в лоб»

```
var startN := 194441;
var endN := 196500;
for var x:=startN to endN do
  if (x mod 100 = 93) and
     IsPrime(x) then
    Println(x);
```

25. Оптимизация

```
var startN:= 194493 ;
var endN:= 196500;
var x:= startN;
while x <= endN do begin
   if IsPrime(x) then Println(x);
   x += 100;
end;
```

первое, которое оканчивается на 93

25. Пример

Рассматриваются целые числа, принадлежащих числовому отрезку [631632; 684934], которые представляют собой **произведение двух различных простых делителей**. Найдите такое из этих чисел, у которого два простых делителя больше всего отличаются друг от друга.

25. Решение «в лоб»

```
var startN:= 63163200;
var endN:= 68493400;
```

Как ускорить?

```
var startN := 631632;
var endN := 684934;
var maxDiff := 0;
var xMaxDiff := 0;
for var x:=startN to endN do
  for var d:=2 to round(sqrt(x))-1 do
    if x.Divs(d) and IsPrime(d) and
       IsPrime(x div d) and
       (x div d - d > maxDiff) then
      begin
        maxDiff := x div d - d;
        xMaxDiff := x;
      end;
Println( xMaxDiff, maxDiff );
```

25. Оптимизация

```
for var x:=startN to endN do
  for var d:=2 to round(sqrt(x))-1 do
    if x.Divs(d) then begin
      if IsPrime(x div d) and
          (x div d - d > maxDiff) then begin
        maxDiff := x div d - d;
        xMaxDiff := x;
      end;
      break;
    end;
```

~~IsPrime~~(d)
первый d всегда простой!

Пара «наименьший-наибольший» имеет наибольшую разность!

25. Используем только простые

Список возможных меньших простых делителей:

```
var primes := new List<integer>;
for var i:=1 to round(sqrt(endN)) do
  if IsPrime(i) then
    primes.Add(i);
```

25. Используем только простые

```
for var x:=startN to endN do
  foreach var d in primes do
    if x.Divs(d) then begin
      if IsPrime(x div d) and
         (x div d - d > maxDiff) then
        begin
        maxDiff := x div d - d;
        xMaxDiff := x;
      end;
      break;
    end;
```

```
var startN:= 63163200;
var endN:= 68493400;
```

! 16,7 с!

17. Пример

Назовём натуральное число подходящим, если ровно два из его делителей входят в список (7, 11, 13, 19). Найдите все подходящие числа, принадлежащих отрезку [20 000; 30 000]
В ответе запишите два целых числа: сначала количество, затем среднее арифметическое всех найденных чисел (только целую часть).

Проблемы:

1) ровно два из его делителей входят в список
2) среднее арифметическое всех найденных чисел (сумма может быть очень велика!)

17. Ровно два делителя

```
var startN := 20000;
var endN := 30000;
var count := 0;
for var x:=startN to endN do begin
  var divs := | integer(x mod 7 = 0),
                ord(x mod 11 = 0),
                ord(x.Divs(13)),
                1-sign(x mod 19) |;
  if divs.Sum = 2 then
    count += 1;
end;
Println( count );
```

можно по-разному!

? Как быть с суммой?

1) `int64`
2) `double`

25. Пример

(Статград) Найдите все натуральные числа, принадлежащие отрезку [289123456; 389123456] и имеющие ровно три нетривиальных делителя. Для каждого найденного числа запишите в ответе его наибольший нетривиальный делитель.

Проблемы:

долго считает…

25. Решение «в лоб»

```
var startN := 289123456;
var endN := 389123456;
for var x:=startN to endN do begin
  var divs := new List<integer>;
  for var d:=2 to x-1 do
    if x.Divs(d) then divs.Add(d);
  if divs.Count = 3 then
    Println( x );
end;
```

? Как ускорить?

25. Только квадраты

Три (нечётное число) нетривиальных делителя – полный квадрат!

```
var startN := 289123456;
var endN := 389123456;
for var sqrtX:=trunc(sqrt(startN)) to
                ceil(sqrt(endN)) do begin
  var x := sqrtX*sqrtX;
  var divs := new List<integer>;
  for var d:=2 to x-1 do
    if x.Divs(d) then divs.Add(d);
  if divs.Count = 3 then
    Println( x );
end;
```

? Как ускорить?

25. Основная теорема арифметики

Любое число единственным способом представляется в виде произведения простых чисел:

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots \ p_m^{k_m}$$

Число нетривиальных делителей:

$$\delta = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots \ (k_m + 1) - 2$$

Если δ = 3:

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots \ (k_m + 1) = 5$$

$$k_1 = 4, \ k_2 = k_3 = \ldots \ k_m = 0$$

25. Только четвёртые степени

```
var startN := 289123456;
var endN := 389123456;
for var qX:=trunc(sqrt(sqrt(startN))) to
              ceil(sqrt(sqrt(endN))) do begin
  if IsPrime(qX) then
    Println( qX*qX*qX*qX );
end;
```

0,016 с!

25. Готовые функции

(***Демо-2021***) Напишите программу, которая ищет среди целых чисел, принадлежащих числовому отрезку [174457; 174505], числа, имеющие ровно **два различных натуральных делителя**, не считая единицы и самого числа. Для каждого найденного числа запишите эти два делителя в таблицу на экране с новой строки в порядке возрастания произведения этих двух делителей. Делители в строке таблицы также должны следовать в порядке возрастания.

25. Модуль school

```
##
uses school;
for var x:=174457 to 174505 do begin
  var divs := x.Divisors;
  if divs.Count = 4 then
    Println( divs[1], divs[2] );
end;
```

25. Функциональный стиль

```
##
uses school;
(174457..174505)
    .Select( x->x.Divisors )
    .Where( x->x.Count = 4 )
    .Select( x->(x[1],x[2]) )
    .PrintLines;
```

`(174457..174505)` последовательность чисел

Презентации С.С. Михалковича:
http://www.pascalabc.net/downloads/Presentations/Tutorials/Sequences.pdf
http://www.pascalabc.net/downloads/Presentations/Tutorials/ProcFuncLambdas.pdf

25. Последовательность

```
function mySeq( a, b: integer ):
                    sequence of integer ;
begin
  while a <= b do begin
    yield a;
    a += 1;
  end;
end;
begin
  foreach var x in mySeq(10,20) do
    Print(x);
end.
```

```
10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
```

25. Функциональный стиль

```
(10..20).Select( x->x.Divisors ).PrintLines;
```

заменить каждый элемент последовательности на список его делителей

```
[1,2,5,10]
[1,11]
[1,2,3,4,6,12]
[1,13]
[1,2,7,14]
[1,3,5,15]
[1,2,4,8,16]
[1,17]
..
```

все делители 10

11

12

13

25. Функциональный стиль

```
(10..20).Select( x->x.Divisors )
        .Where( x->x.Count = 4).PrintLines;
```

отобрать те элементы списка, где количество делителей равно 4

```
[1,2,5,10]
[1,2,7,14]
[1,3,5,15]
```

10

14

15

25. Функциональный стиль

```
(10..20).Select( x->x.Divisors )
      .Where( x->x.Count = 4)
      .Select( x-> (x[1],x[2]) ).PrintLines;
```

заменить каждый элемент списка на пару (**кортеж**), состоящую из двух нетривиальных делителей

```
(2,5)
(2,7)
(3,5)
```

10
14
15

25. Пример

(***Б.С. Михлин***) Напишите программу, которая ищет среди целых чисел, принадлежащих числовому отрезку [194441; 196500] простые числа, **оканчивающиеся на 93.**

25. Функциональный стиль

```
##
uses school;
(194441..196500)
     .Where( x-> (x mod 100 = 93) and
                  x.IsPrime )
     .Println;
```

```
##
uses school;
( 194493 ..196500) .Step(100)
     .Where( x->x.IsPrime )
     .Println;
```

17. Пример

Назовём натуральное число подходящим, если ровно два из его делителей входят в список (7, 11, 13, 19). Найдите все подходящие числа, принадлежащих отрезку [20 000; 30 000]
В ответе запишите два целых числа: сначала количество, затем среднее арифметическое всех найденных чисел (только целую часть).

25. Функциональный стиль

```
##
uses school;
var selected :=
    (20000..30000)
    .Select( x->x.Divisors )
    .Select( x->(x.Last,
                 integer(7 in x)+
                 integer(11 in x)+
                 integer(13 in x)+
                 integer(19 in x)) )
    .Where( x-> x[1] = 2 )
    .Select( x->x[0] );
Println( selected.Count,
         trunc(selected.Average) );
```

ord(...)

25. Функциональный стиль

```
(70..91).Select( x->x.Divisors ).PrintLines;
```

заменить каждый элемент последовательности на список его делителей

все делители 70

```
[1,2,5,7,10,14,35,70]
[1,71]
[1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36,72]
[1,73]
[1,2,37,74]
[1,3,5,15,25,75]
[1,2,4,19,38,76]
..
```

25. Функциональный стиль

```
(70..91).Select( x->x.Divisors )
        .Select( x->(x.Last,
                     integer(7 in x)+
                     integer(11 in x)+
                     integer(13 in x)+
                     integer(19 in x) ) )
        .Println;
```

построить кортежи:

```
( число,
  количество делителей из [7,11,13,19])
```

```
(70,1) (71,0) (72,0) (73,0)
(74,0) (75,0) (76,1) (77,2)
..
```

25. Функциональный стиль

```
(70..91).Select( x->x.Divisors )
        .Select( x->(x.Last, ...) )
        .Where( x-> x[1] = 2 )
        .Println;
```

отобрать те, где количество делителей из списка (`x[1]`) равно 2:

```
(77,2) (91,2)
```

25. Функциональный стиль

```
(70..91).Select( x->x.Divisors )
        .Select( x->(x.Last, ...) )
        .Where( x-> x[1] = 2 )
        .Select( x->x[0] )
        .Println;
```

оставить только сами числа (**x[0]**)

77 91

вывести количество и среднее:

```
Println( selected.Count,
         selected.Average );
```

2 84

25. Функциональный стиль

```
##
var z:= (20000..30000)
     .Select( x->(x,
        |7,11,13,19|.Count(d->x.Divs(d)) )
     .Where( x-> x[1] = 2 )
     .Select( x->x[0] );
Println( z.Count, z.Average );
```

пары (число, кол-во делителей)

```
##
var z:= (20000..30000)
     .Where( x->|7,11,13,19|
                  .Count(d->x.Divs(d)) = 2 );
Println( z.Count, z.Average );
```

два прохода по последовательности

25. Пример

(Статград) Найдите все натуральные числа, принадлежащие отрезку [289123456; 389123456] и имеющие ровно три нетривиальных делителя. Для каждого найденного числа запишите в ответе его наибольший нетривиальный делитель.

25. Функциональный стиль

```
##
uses school;
(trunc(sqrt(sqrt(289123456)))..
 ceil(sqrt(sqrt(389123456))))
      .Where( x->x.IsPrime )
      .Select( x->x*x*x*x )
      .Println;
```

26. Сортировка

(***Демо-2021***) Раз в неделю создаёт архив файлов. Объём диска, может быть меньше, чем суммарный объём файлов. По заданной информации об объёме файлов пользователей и свободном объёме на архивном диске определите максимальное число пользователей, чьи файлы можно сохранить в архиве, а также максимальный размер имеющегося файла, который может быть сохранён в архиве, при условии, что сохранены файлы максимально возможного числа пользователей.

26. Решение в Excel

https://kpolyakov.spb.ru/download/ege26.doc

А. Сидоров:
www.youtube.com/watch?v=LwTZAHsno0k

26. Решение

```
##
Assign(input, '26.txt');
var (V, n) := ReadInteger2;
var a := ReadArrInteger(n); a.Sort;

var i:=0;
while (i <= a.High) and (V >= a[i]) do begin
  V -= a[i];
  i += 1;
end;
i.Println;

V += a[i-1];
while (i <= a.High) and (V >= a[i]) do
  i += 1;
a[i-1].Print;
```

26. Сортировка

```
##
var A := | 27, 19, 21, 33 |;
A.Sort;
A.Println;
```

< 0 ⇒ x < y
= 0 ⇒ x = y
> 0 ⇒ x > y

```
19 21 27 33
```

```
A.Sort( (x,y)-> x mod 10-y mod 10 );
A.Println;
```

```
21 33 27 19
```

```
A.Sort( (x,y)-> y mod 10-x mod 10 );
A.Println;
```

```
19 27 33 21
```

! .Sort переставляет элементы!

26. Сортировка

```
##
uses school;
var A := | 41, 19, 21, 33 |;
A.Sort( (x,y)->x.Digits.Sum-y.Digits.Sum );
A.Println;
A.Sort( (x,y)-> y.Digits.Sum-x.Digits.Sum );
A.Println;
```

по сумме цифр

```
21 41 33 19
19 33 41 21
```

26. Сортировка (последовательности)

```
##
var A := |27, 19, 25, 33|;
A.Order.Println;
```

```
19 25 27 33
```

```
A.OrderDescending.Println;
```

```
33 27 25 19
```

.Order НЕ переставляет элементы и строит последовательность!

```
A.Sort;
```

```
A := A.Order.ToArray;
```

26. Сортировка (последовательности)

```
##
var A := |27, 19, 25, 33|;
A.OrderBy(x->x mod 10).Println;
```

по последней цифре

```
33 25 27 19
```

```
A.OrderByDescending(x->x mod 10).Println;
```

```
19 27 25 33
```

26. Сортировка (последовательности)

```
##
uses school;
var A := |  41, 19, 21, 33  |;
A.OrderBy( x->x.Digits.Sum ).Println;
A.OrderByDescending(
        x->x.Digits.Sum ).Println;
```

по сумме цифр

```
21 41 33 19
19 33 41 21
```

26. Пример

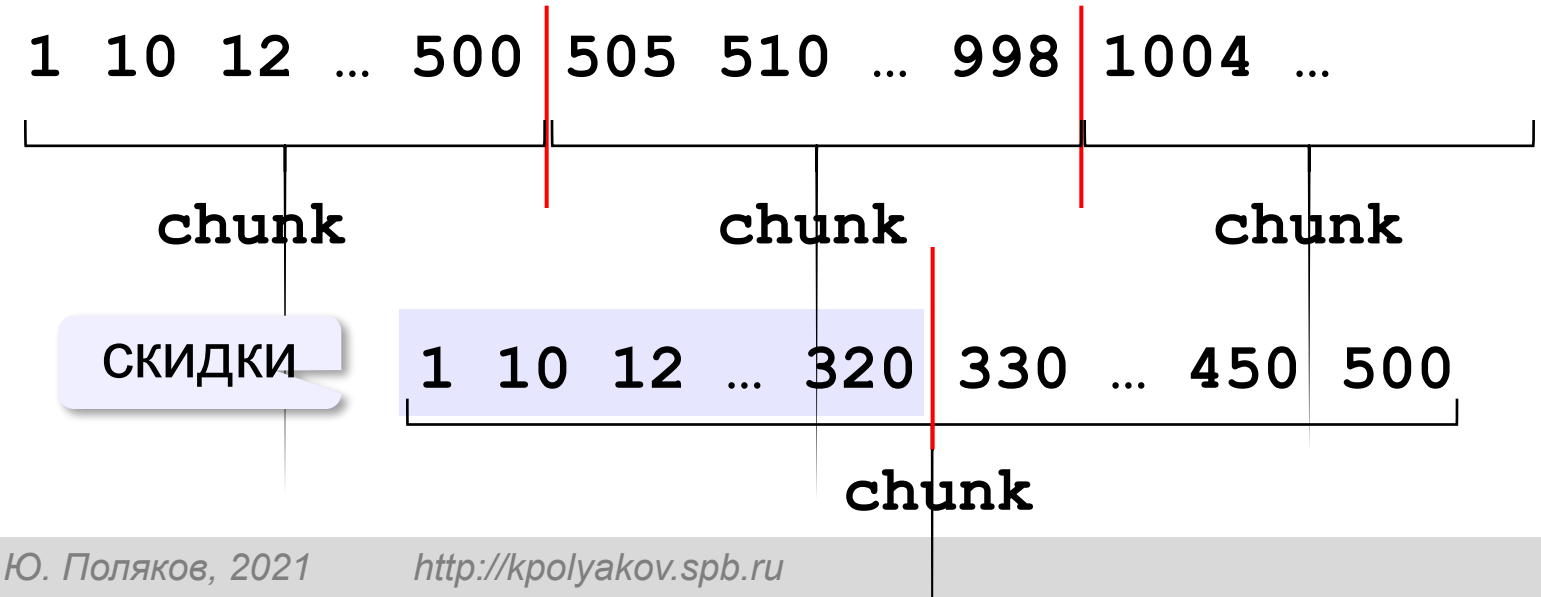
(***Е. Джобс***) В магазине проводят акция – каждый второй товар со скидкой 50%. При этом в акции участвуют только те товары, цены которых попадают в одну ценовую категорию. Каждая ценовая категория включает 500 целых значений: 1-500, 501-1000, 1001-1501 и т.д. Например, при наличии в чеке только позиций с ценами 300 и 1000 предложение акции не работает.

Необходимо распределить товары в чеке таким образом, чтобы итоговая цена всех товаров была максимально выгодной для магазина. В качестве ответа вывести полученную сумму скидки для всего чека и конечную стоимость самого дорогого проданного по акции товара. В случае получения нецелых значений привести только целые части найденных чисел.

26. Решение на Python

```
with open("26-44.txt") as F:
    N = int(F.readline())
    data = []
    for i in range(N):
      data.append( int(F.readline()) )

data.sort()
# ... продолжение следует
```



26. Решение на Python

```
# ... продолжение
last = 500
discount, costMax = 0, 0

while data:
  chunk = [x for x in data if x <= last]
  if chunk:
    mid = len(chunk)//2
    if mid > 0:
      discount += 0.5*sum(chunk[:mid])
      costMax = 0.5*chunk[mid-1]
    data = data[len(chunk):]
  last+= 500

print( int(discount), int(costMax) )
```

26. Решение на PascalABC.NET

```
##
Assign(input, '26-44.txt');
var N := ReadInteger;
var data := ReadArrInteger(N);

data.Sort;
// ... продолжение следует
```

26. Решение на PascalABC.NET

```
# ... продолжение
var (last, discount, costMax):= (500,0.0,0.0);
while data.Count > 0 do begin
  var chunk := data.Where(x->x<=last).ToArray;
  if chunk.Count > 0 then begin
    var mid := chunk.Count div 2;
    if mid > 0 then begin
      discount += 0.5*chunk[:mid].Sum;
      costMax := 0.5*chunk[mid-1];
    end;
    data := data.Where(x->x>last).ToArray;
  end;
  last += 500;
end;
Println( trunc(discount), trunc(costMax) );
```

26. Пример

(***А. Кабанов***) На складе лежат пакеты с углём различного веса и стоимости. **Вес** и **стоимость** записаны на каждом пакете как натуральные числа. Для транспортировки отбираются ***K*** пакетов с самой низкой ценой угля за единицу веса; при равной стоимости за единицу веса выбираются пакеты с большим весом. По заданной информации о пакетах с углём и количестве транспортируемых пакетов определите

1) суммарный вес угля в отправленных пакетах и
2) стоимость самого тяжёлого отправленного пакета.

26. Решение на Python

```
with open("26-k6.txt") as F:
   data = F.readlines()

N, K = map(int, data[0].split())
del data[0]
data = data[:N]

pairs = []
for i in range(N):
   p = tuple( map(int, data[i].split()) )
   pairs.append( p )

# ... продолжение следует
```

строим массив пар (**вес**, **стоимость**)

26. Решение на Python

```
# ... продолжение
pairs.sort( key =
        lambda x: (x[1]/x[0], -x[0]) )

selected = pairs[:K]

print( sum( x[0] for x in selected ) )

weight = [x[0] for x in selected]
ind = weight.index( max(weight) )
print( selected[ind][1] )
```

цена за единицу веса

по убыванию веса

суммарный вес

стоимость пакета с наибольшим весом

26. Решение на PascalABC.NET

```
##
Assign(input, '26-k6.txt');
var (N, K):= ReadInteger2;

var pairs := (1..N)
     .Select( i->ReadString.ToIntegers )
     .Skip(1).ToArray;

pairs.Sort( (x,y)->
    x[1]/x[0]-y[1]/y[0] <> 0 ?
    sign(x[1]/x[0]-y[1]/y[0]) : y[0]-x[0] );

// ... продолжение следует
```

условие

если неверно

если верно

цена за единицу веса

по убыванию веса

26. Решение на PascalABC.NET

```
# ... продолжение
var selected := pairs[:K];
var weight :=
    selected.Select( x->x[0] ).ToArray;
weight.Sum.Println;

var ind := weight.IndexOf( weight.Max );
selected[ind][1].Println;
```

суммарный вес

стоимость пакета с наибольшим весом

26. Пример

В текстовом файле записан набор натуральных чисел. Гарантируется, что все числа различны. Необходимо определить, сколько в наборе таких пар нечётных чисел, что их среднее арифметическое тоже присутствует в файле, и чему равно наибольшее из средних арифметических таких пар.

26. Решение на Python

```
with open("26.txt") as F:
  N = int(F.readline())
  data = [int(s) for s in F]

data.sort()

averages = []
for i in range(N-1):
  for j in range(i+1,N):
    if data[i] % 2 == 1 and data[j] % 2 == 1:
      s = data[i] + data[j]
      averages.append( s//2 )

averages.sort()

# ... продолжение следует
```

находим все подходящие средние

26. Решение на Python (плохое)

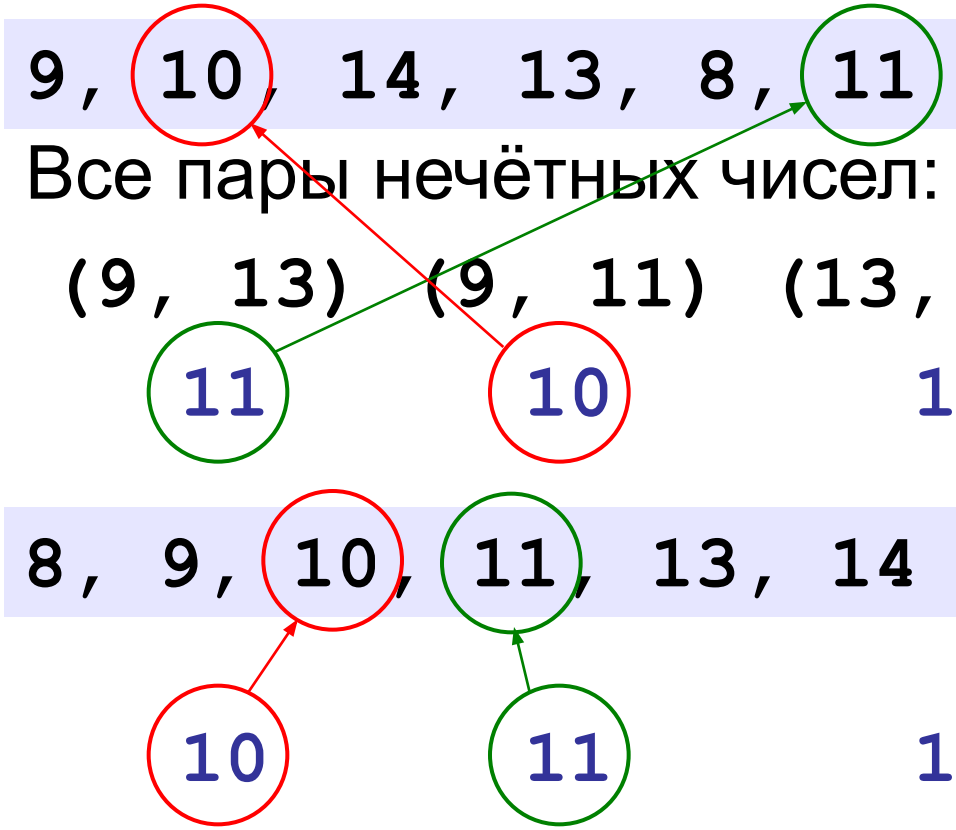
```
# ... продолжение

count = 0
ma = 0
for av in averages:
    if av in data:
        count = 1
        ma = max( ma, av )

print(count, ma)
```

сложность $O(N^2)$

26. Идея хорошего решения



! Отсортируем!

! Большее значение находится ближе к концу массива!

26. Решение на Python

```
# ... продолжение
selected = []
i = 0
for av in averages:
  while i < N and data[i] < av:
    i += 1
  if i < N and data[i] == av:
    selected.append(av)

print( len(selected), selected[-1] )
```

26. Решение на PascalABC.NET

```
##
Assign(input, '26.txt');
var N:= ReadInteger;
var data:= ReadArrInteger(N);
data.Sort;

var averages := new List<integer>;
for var i:=0 to data.High-1 do
  for var j:=i+1 to data.High do
    if data[i].IsOdd and
       data[j].IsOdd then
      averages.Add((data[i]+data[j]) div 2);

averages.Sort;

// ... продолжение следует
```

26. Решение на PascalABC.NET

```
##
Assign(input, '26.txt');
var N:= ReadInteger;
var data:= ReadArrInteger(N);
data.Sort;

var averages := new List<integer>;
foreach var (x,y) in data.Combinations(2) do
  if x.IsOdd and y.IsOdd then
      averages.Add((x+y) div 2);

averages.Sort;

// ... продолжение следует
```

или так:

26. Решение на PascalABC.NET

```
# ... продолжение
var selected := new List<integer>;
var i:= 0;
foreach var av in averages do begin
  while (i < N) and (data[i] < av) do
    i += 1;
  if (i < N) and (data[i] = av) then
    selected.Add(av);
end;

Print( selected.Count, selected.Last )
```

Благодарности

Автор благодарит

Алексея Богданова (Alex Danov)
https://www.youtube.com/c/AlexDanov

Станислава Михалковича
https://pascalabc.net
за полезные замечания и предложения.

Конец фильма

ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич
д.т.н., учитель информатики
ГБОУ СОШ № 163, г. Санкт-Петербург
kpolyakov@mail.ru