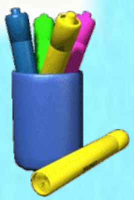


Решение иррациональных неравенств.

10 а класс (09.11.2021)

Учитель: Чернова Т.В.

Тема	Решение иррациональных неравенств
Инструкция	Сегодня начнем тему «Решение иррациональных неравенств». Скопируйте эту технологическую карту к себе на рабочий стол и выполняйте задания, которые прописаны в алгоритме занятия. Обучающимся (5чел), которые прислали решения трудных примеров, выставлены пятерки в сетевой город за 08.11.21. Решения присланы оперативно. По этим записям должны были разобрать решения обучающиеся, которые не смогли решить уравнения самостоятельно.
Алгоритм занятия	1. Учебное занятие на платформе «Сферум» 30 минут. (разбор части теории по решению неравенств, используя презентацию). 1. Презентация будет прикреплена в сетевом городе, так как по ней организован следующий этап работы. 2. Работа с презентацией: конспект примеров, разобранных на платформе «Сферум», и оставшихся примеров для самостоятельного изучения на уроке 09.11.21 по презентации. 3. Маленькое домашнее задание № 16.2 (1) 16.4 (4) 16.6(3)
Комментарий	Если у меня не получится связаться с вами на платформе «Сферум» или занятие сорвется, то разберете презентацию самостоятельно. Методы решения неравенств похожи на методы решения уравнений.

Рассматрим решение неравенств, содержащих переменную под знаком квадратного корня.

При решении таких неравенств необходимо помнить условие существования квадратного корня (ОДЗ): подкоренное выражение не может принимать отрицательные значения.

Некоторые методы решения иррациональных неравенств.

Назад

- Метод интервалов.
- Использование равносильных переходов.
- Введение новой переменной.
- Метод рационализации (замены множителей).
- Использование свойств квадратного корня.
- Решение неравенств, содержащих двойные радикалы.

Некоторые методы решения иррациональных неравенств.

Использование равносильных переходов.

Использование равносильных переходов.

<u>Выведем схемы решения трех основных типов иррациональных неравенств</u> используя свойства числовых неравенств и здравый смысл.

Таким образом избежим малоэффективного механического запоминания.

1. $a)\ \sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$ $\qquad$ ОДЗ : $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$

Так как левая и правая части неравенства неотрицательны, то по свойству числовых неравенств имеем право возвести их в квадрат не меняя при этом знак неравенства. $\qquad f(x) < g(x)$

То есть, необходимо выполнение трех условий: $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$

Найди лишнее!

$\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$

$0 \le f(x) < g(x)$

Очевидно, что g(x) ≥0 – лишнее

Использование равносильных переходов.

Методы

Самостоятельно выведи схему для решения следующего неравенства

1. $\textit{б)}\ \sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ $\quad ОДЗ: \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \qquad f(x) > g(x)$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

$$\boxed{\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}}$$

$0 \leq g(x) < f(x)$ => $f(x) \geq 0$ – *лишнее*

Следует отметить, что данные переходы справедливы и для нестрогих неравенств.

- Пример №1

Из учебника <u>пример 1</u> страница 123, записать решение в тетрадь

(попробовать решить самостоятельно, а затем проверить по учебнику)

Использование равносильных переходов.

2. $\sqrt{f(x)} < g(x)$ ОДЗ : $f(x) \geq 0$

Условие, при котором неравенство может иметь решения: $g(x) > 0$

Тогда: $f(x) < g^2(x)$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

Незначительно отличается переход для нестрогого неравенства:

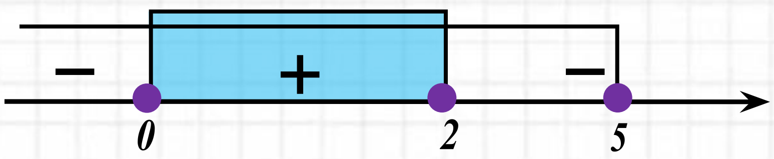
$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$$

Использование равносильных переходов.

Пример 2.

$$\sqrt{2x-x^2}\le 5-x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-x^2\ge 0 \\ 5-x\ge 0 \\ 2x-x^2\le (5-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2-x)\ge 0 \\ x\le 5 \\ -2x^2+12x-25\le 0 \end{cases}$$

$$x(2-x)\ge 0$$



$$x\le 5$$

$$-2x^2+12x-25\le 0$$

$$-2x^2+12x-25=0$$

$D<0 \Rightarrow$ **функция не имеет нулей**

$$-2x^2+12x-25\le 0$$

при любом x

$$x\in R$$

Ответ : [0;2]

- Решение примера 2 из учебника стр 123

- (попробовать решить самостоятельно, а затем проверить по учебнику)

Использование равносильных переходов.

Методы

3. $\sqrt{f(x)} > g(x)$ ОДЗ : $f(x) \geq 0$

Решения у такого неравенства могут быть при любом значении g(x)

1 случай: $g(x) < 0$

Тогда неравенство выполнено при любом x ϵ ОДЗ $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$

2 случай: $g(x) \geq 0$

Тогда имеем право возвести обе части в квадрат $\begin{cases} \boxed{f(x) \geq 0} \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$

$$\boxed{\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array} \right.}$$

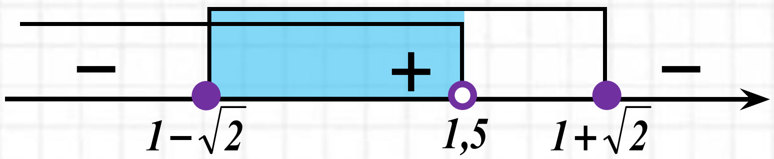
Использование равносильных переходов.

Пример 3.

$$\sqrt{-x^2+2x+1}>2x-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x^2+2x+1\geq 0 \\ 2x-3<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-3\geq 0 \\ -x^2+2x+1>(2x-3)^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

1 система

$$\begin{cases} -x^2+2x+1\geq 0 \\ 2x-3<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -(x+(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{2}))\geq 0 \\ x<1{,}5 \end{cases}$$



$$\boxed{x\in[1-\sqrt{2};1{,}5)}$$

Использование равносильных переходов.

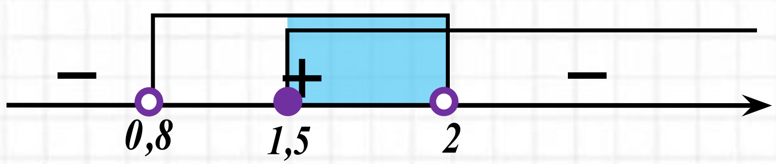
Пример 3.

$$\sqrt{-x^2+2x+1} > 2x-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [\,1-\sqrt{2}\,;1{,}5\,) \\ \begin{cases} 2x-3 \ge 0 \\ -x^2+2x+1 > (\,2x-3\,)^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

---

2 система

$$\begin{cases} 2x-3 \ge 0 \\ -x^2+2x+1 > (\,2x-3\,)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge 1{,}5 \\ -(x-2)(\,x-0{,}8\,) > 0 \end{cases}$$



$$\boxed{x \in [\,1{,}5\,;2\,)}$$

Объединение решений

$$\left[\begin{array}{l} x \in [\,1-\sqrt{2}\,;1{,}5\,) \\ x \in [\,1{,}5\,;2\,) \end{array}\right.$$

Ответ : $[\,1-\sqrt{2}\,;2\,)$

- Решение примера 3 из учебника стр 124

- (попробовать решить самостоятельно, а затем проверить по учебнику)

Использование равносильных переходов.

$$\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array} \right.$$

Не пропускайте вывод данных равносильных переходов.
Запоминание без понимания смысла – занятие малоперспективное.

УРОК за 9 ноября закончен!!!

Домашнее задание:

Прочитать теоремы о равносильности неравенств

(учебник стр. 122-123)

Решить примеры №16.2 (1), 16.4(4), 16.6 (3)

Учебное занятие

<u>на 10 ноября</u>

<u>(смотрите технологическую карту</u>

<u>на 10 ноября в сетевом городе)</u>

Запишите тему:

Введение новой переменной.

Метод введения новой переменной (явная замена).

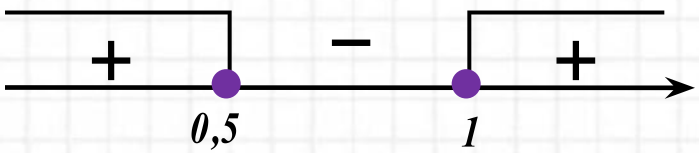
Пример 1. $2x-3\sqrt{x}+1\geq 0$

$t=\sqrt{x}\Rightarrow x=t^2$

$ОДЗ: x\geq 0$

$2t^2-3t+1\geq 0$

$2(t-0{,}5)(t-1)\geq 0$



$\left[\begin{array}{l} t\geq 1 \\ t\leq 0{,}5 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x}\geq 1 \\ \sqrt{x}\leq 0{,}5 \end{array}\right.$

$1)\sqrt{x}\geq 1$ - *правая и левая части неравенства неотрицательны => имеем право возвести в квадрат* $x\geq 1$

$2)\sqrt{x}\leq\frac{1}{2}$ - *аналогично* $x\leq\frac{1}{4}$. *С учетом ОДЗ* $0\leq x\leq\frac{1}{4}$.

Ответ: объединение решений первого и второго неравенства.

$Ответ: [0;0{,}25]\cup[1;+\infty)$

Метод введения новой переменной (обратные числа).

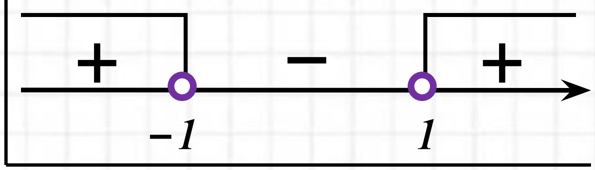
Методы

Переходы

Пример 2. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} < \dfrac{3}{2}$

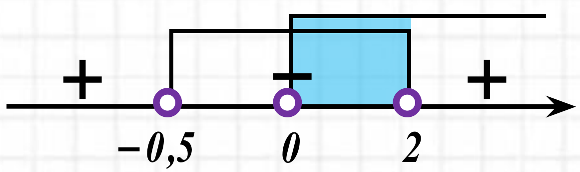
Объясни, почему.

$$ОДЗ: \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} \ge 0 \\ \dfrac{x-1}{x+1} \ge 0 \end{cases}$$



$$t = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = \dfrac{1}{t} \qquad t - \dfrac{1}{t} < \dfrac{3}{2} \;\Big|\; \times 2t > 0$$

$$2t^2 - 3t - 2 < 0 \Leftrightarrow 2(t-2)(t+0{,}5) < 0$$



$$\begin{cases} t > 0 \\ t < 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} > 0 \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} < 2 \end{cases}$$

Учтем условие $t > 0$

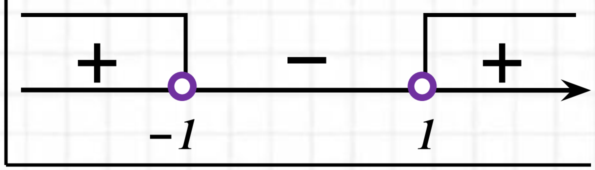
Метод введения новой переменной (обратные числа).

Пример 2.

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}<\frac{3}{2}$$

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}>0\\[2mm]\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}<2\end{cases}$$

$$ОДЗ:\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}\geq 0\\[2mm]\dfrac{x-1}{x+1}\geq 0\end{cases}$$



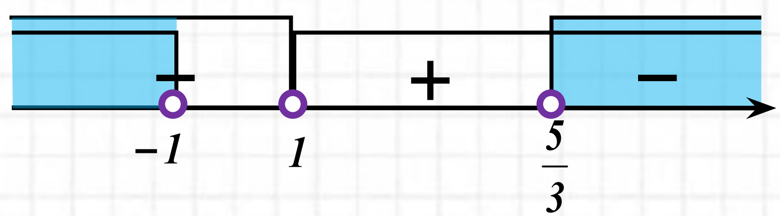
$$1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}>0 \qquad x\in ОДЗ$$

$$2)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}<2$$

- правая и левая части неравенства неотрицательны => имеем право возвести в квадрат

$$\frac{x+1}{x-1}<4 \Leftrightarrow \frac{-3x+5}{x-1}<0$$

Учтем ОДЗ



$$Ответ:(-\infty;-1)\cup\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$$

Метод введения новой переменной.

Методы

Переходы

Часто, даже если вы не видите повторяющиеся и обратные выражения, введение новой переменной может значительно облегчить решение неравенства.

$$ОДЗ: \begin{cases} 2x+3\ge 0 \\ x-2\ge 0 \end{cases}$$

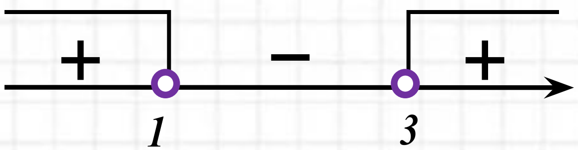
$$\begin{cases} x\ge -\dfrac{3}{2} \\ x\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 2$$

Пример 3. $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}>2$

$$t=\sqrt{x-2}\Rightarrow t^2=x-2\Rightarrow x=t^2+2$$

$$\sqrt{2(t^2+2)+3}-t>2$$

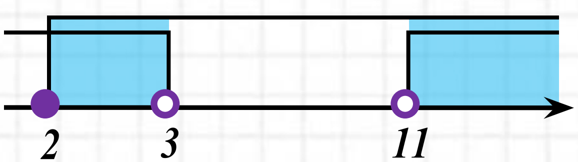
Объясни, почему.



$$\sqrt{2t^2+7}>2+t\Leftrightarrow 2t^2+7>(2+t)^2\Leftrightarrow (t-1)(t-3)>0$$

$$\left[\begin{array}{l} t<1 \\ t>3 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2}<1 \\ \sqrt{x-2}>3 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x-2<1 \\ x-2>9 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x<3 \\ x>11 \end{array}\right.$$

Учтем ОДЗ



$$Ответ: [2;3)\cup(11;+\infty)$$

Метод введения новой переменной (полезна наблюдательность).

Методы

Переходы

Пример 4

$$x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}\ge 1.5(x+4)$$

ОДЗ: $2x^2-3x+2\ge 0$

$D<0 \qquad a>0$

$x\in R$

$$x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}\ge 1.5x+6 \quad \Big|\times 2$$

$$2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}\ge 3x+12$$

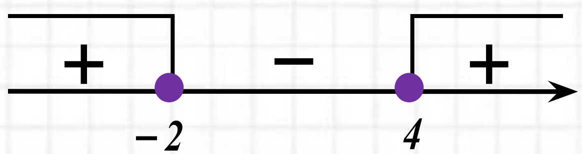
$$t=\sqrt{2x^2-3x+2}\Rightarrow$$

$$2x^2-3x+2=t^2$$

Объясни, почему.

$$(2x^2-3x+2)-2\sqrt{2x^2-3x+2}-8\ge 0$$

$$t^2-2t-8\ge 0$$

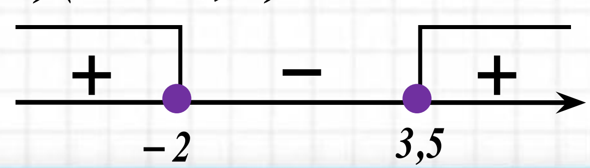


$$\left[\begin{array}{l} t\ge 4 \\ t\le -2 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x^2-3x+2}\ge 4 \\ \sqrt{2x^2-3x+2}\le -2 \quad \varnothing \end{array}\right.$$

$$\sqrt{2x^2-3x+2}\ge 4 \Leftrightarrow 2x^2-3x+2\ge 16$$

$$2x^2-3x-14\ge 0$$

$$2(x+2)(x-3{,}5)\ge 0$$



Ответ: $(-\infty;-2]\cup[3{,}5;+\infty)$