Физико-технические основы электроэнергетики

Лекция 8

Профессор Е.Ю.Клименко

Квазистационарное электромагнитное поле

Уравнения квазистационарного поля

Основное уравнение: $rot\, \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ позволяет учесть переменность полей

Критерии квазистационарности:

- **Небольшая частота** $\omega l \ll c$ l – размеры объекта

$\omega \tau_e \ll 1$ τ_e - время свободного пробега электронов

-**Локальная связь между полем и током.** Второй и третий критерии позволяют пользоваться постоянным значением σ (проводимость)

В этом случае распределение поля вне тела можно описывать уравнениями $div\, \boldsymbol{B} = 0$ $rot\, \boldsymbol{H} = \boldsymbol{0}$, пренебрегая конечностью скорости распространения электромагнитных возмущений.

Полная система уравнений поля внутри проводника:

$$rot\, \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad div\, \boldsymbol{B} = 0, \quad rot\, \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$$

Из $rot\, \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ и $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$ получаем $\mu_0 \sigma \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -rot\, rot \boldsymbol{H} = \Delta \boldsymbol{H}$

а также $\Delta \boldsymbol{E} = \mu_0 \sigma \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$

(размерность [$\mu_0 \sigma$] сек/м ^{2})

Время затухания токов в проводнике

Если проводник с характерным размером d помещен в магнитное поле, которое в момент t=0 выключается, поля и токи в нем будут затухать с постоянной времени τ. Эту величину можно оценить исходя из $\Delta \boldsymbol{H} \sim \boldsymbol{H}/d^2$

$$\tau = \mu_0 \sigma d^2$$

Точное решение можно было бы получить из разложения поля по собственным функциям

$$H(x,y,z,t) = \sum_m c_m e^{-\gamma_m t} H_m(x,y,z)$$

Для этого ищут решения вида: $\boldsymbol{H}(x,y,z,t) = e^{-\gamma_m t} \boldsymbol{H}_m(x,y,z)$ где $\boldsymbol{H}_m$

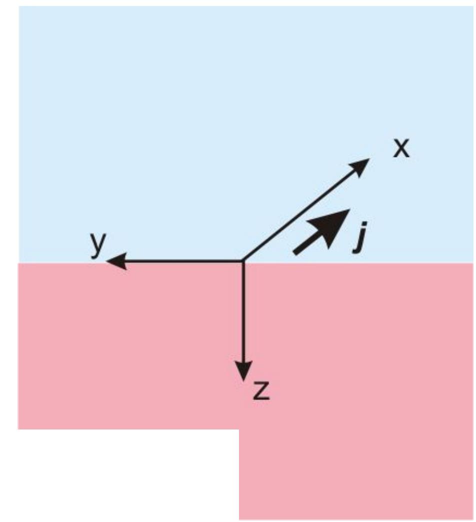
удовлетворяют уравнению $\frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \boldsymbol{H}_m = -\gamma_m \boldsymbol{H}_m$ и граничным условиям

. $\boldsymbol{H}_{it} = \boldsymbol{H}_{et}$ и $\boldsymbol{j}_n = 0$ $\boldsymbol{H}_m$ - собственные функции задачи и

γ_m - собственные значения

Время затухания $\tau = \frac{1}{\gamma_m}$ соответствует минимальному собственному значению.

Глубина проникания переменного поля в проводник



Имеем ток $j_x(z,x) = j(z)\exp(i\omega t)$,
соответственно $E_x(z,x) = E(z)\exp(i\omega t)$

Подставим это поле в $\Delta \boldsymbol{E} = \mu_0 \sigma \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$, получим

$$E(z) = Aexp(ikz) + Bexp(-ikz) \quad , \quad k = \sqrt{-i\mu_0\sigma\omega}$$

Введем $\delta = \sqrt{2/\mu_0\sigma\omega}$, решение приобретет вид:

$$E(z) = Aexp\left(-i(1-i)\frac{z}{\delta}\right) + Bexp\left(i(1-i)\frac{z}{\delta}\right)$$

$$= Aexp\left(-(i+1)\frac{z}{\delta}\right),$$

так как второй член соответствует нарастающему с z полю .
Окончательно:

$$E(z,t) = E_0 exp\left(-i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)\right) \cdot exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)$$

Поле E в проводнике уменьшается в е раз на глубине и отстает по фазе относительно внешнего поля. Так же распределена плотность токов Фуко.

В 1850 поставил опыт определения скорости света в воздухе и воде с помощью быстро вращающегося зеркальца, который стал «экспериментом круцис» для Ньютоновской теории истечения света и доказал её несостоятельность.
В 1851 произвёл опыт который наглядно показывал вращательно-суточное движение Земли вокруг её оси.
В 1852 изобрёл гироскоп, предложил использовать его для слежения за изменением направления, придумал само название «гироскоп».
В 1857 разработал теневой метод Фуко, ставший шлирен-методом после усовершенствования А.Теплером.
Предложил использовать вместо металлических зеркал более лёгкие и дешёвые — стеклянные, покрытые тонким слоем серебра.
Первым обратил внимание на нагревание металлических масс при быстром вращении их в магнитном поле (Токи Фуко).

Жан Берна́р Лео́н Фуко́

Jean Bernard Léon Foucault

1810-1868

Диссипация энергии в скин-слое

Если токи Фуко возбуждаются переменным магнитным полем, то аналогично можно получить:

$$H_x(z,t) = H_0 exp\left(-i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)\right) \cdot exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)$$

В этом случае

$$E_y(z,t) = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial H_x}{\partial z}$$

Вещественные час

$$H_x(z,t) = H_0 cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right) \cdot exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)$$

$$E_y(z,t) = H_0\sqrt{\frac{\mu_0\omega}{4\sigma}} cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t - \frac{\pi}{4}\right) \cdot exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \qquad E_0 \sim \sqrt{\omega}$$

После усреднения по периоду и глубине тепловыделение:

$$Q = \bar{S}_z = \int \overline{H_x E_y}\, ds = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\mu_0\omega}{2\sigma}}\ H_0^2 \qquad Q \sim \sqrt{\omega}$$

Комплексное сопротивление

При низких частотах $\mathcal{E}(t) = RI(t)$ (здесь $\mathcal{E}(t)$ - ЭДС)
Нет оснований, считать, что это соотношение будет выполняться при высоких частотах. Должно быть $\mathcal{E}(t) = Z(\omega)I(t)$
Функцию $Z(\omega)$ называют *комплексным сопротивлением (импедансом)*

Рассмотрим контур, в котором действует ЭДС $\mathcal{E}(t)$ Работа, производимая этой ЭДС , равна $\mathcal{E}(t)I$. Она частично переходит в тепло (RI^2) . Другая часть затрачивается на изменение магнитной энергии тока ($LI^2/2$).
Закон сохранения энергии: $\mathcal{E}(t)I = RI^2 + \dfrac{\frac{d}{dt}LI^2}{2} = RI^2 + LI\dfrac{dI}{dt}$,

Отсюда $\mathcal{E} = RI + L\dfrac{dI}{dt}$.

Перейдем монохроматическим компонентам в комплексном представлении: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \exp(-i\omega t)$ и $I = I_0 \exp(-i\omega t)$.
Получим: $\mathcal{E} = ZI$ и $Z = R - i\omega L$, $I = \mathcal{E}/Z$
Выделим вещественную часть:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \varphi), \quad tg\varphi = \frac{\omega L}{R}$$

Контур в переменном магнитном поле

Рассмотрим провод во внешнем переменном магнитном поле H_e , E_e-электрическое поле, которое индуцировалось бы H_e в отсутствие проводников. Эти поля мало меняются на расстояниях порядка толщины провода (в противоположность собственному полю) . Можно рассматривать циркуляцию внешнего электрического поля по контуру на оси провода, эта циркуляция есть ЭДС, индуцируемая внешним полем.

$$\mathcal{E} = \oint E_e dl = -\frac{\partial}{\partial t}\int H_e ds = -\frac{d\Phi_e}{dt}$$

Тогда $RI + L\frac{dI}{dt} = -\frac{d\Phi_e}{dt}$ или $RI = -\frac{d\Phi_e}{dt} - L\frac{dI}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$, -

. Φ -полный (суммарный) поток от внешнего поля и собственного поля тока.

Если в момент t=0 в контуре выключается ЭДС, то ток будет затухать:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}, \qquad \text{при } t = 0$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\exp\left(\frac{R}{L}t\right), \qquad \text{при } t \geq 0$$

Емкость в цепи квазистационарного тока

К уравнению $\mathcal{E} = RI + L\frac{dI}{dt}$ надо добавить разность потенциалов на обкладках конденсатора : .$\mathcal{E} = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C}$. Поскольку $I = \frac{dq}{dt}$,

получаем уравнение для заряда $\mathcal{E} = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$, в этом случае

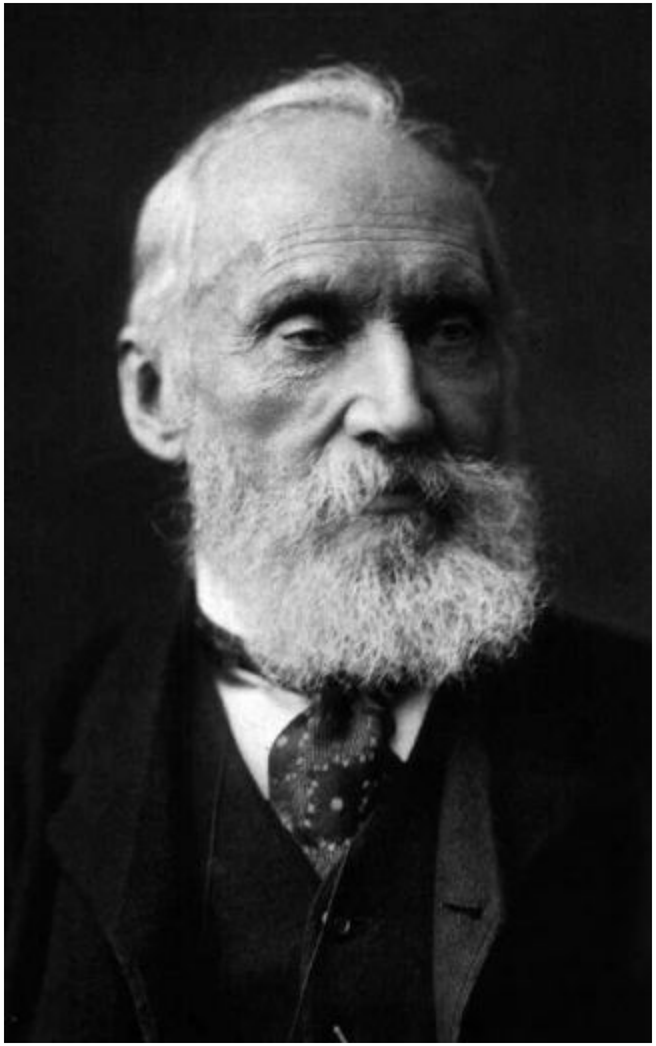
Импеданс $Z = R - i(\omega L - \frac{1}{\omega C})$

Вещественная часть: $I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}\cos(\omega t - \varphi)$, $tg\varphi = \frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR}$

Если $\mathcal{E} = 0$, в цепи происходят свободные колебания тока с частотой

$$\omega = -i\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2}$$

В зависимости от знака подкоренного выражения колебания будут затухающими или разряд будет апериодическим. При $R \to 0$ колебания тока не затухают. Частота колебаний Выражается *формулой Томсона:* $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

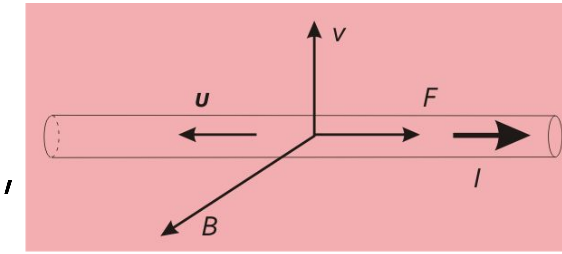


Уильям Томсон, лорд Кельвин
1824-1907

Приложение рядов Фурье к вопросам физики.
Метод электрических изображений в электростатике
Второй закон термодинамики.
Эффект Джоуля – Томсона (охлаждение газов) переход от исследования идеального газа к реальным.
Исследования по термоэлектричеству
Трансатлантическая телеграфия.
Условия существования колебательного электрического разряда (1853).
Теория эфира.
Установление абсолютной шкалы температур.
«Эффект Томсона» — перенос тепла электрическим током.
Множество приборов (зеркальный гальванометр и др.)
Усовершенствование лота и компаса (1872—1876)

Движение проводника в магнитном поле

Выражение $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$ справедливо лишь для неподвижного проводника.
Если замкнутый контур движется в поле ***B*** со скоростью ***v***, то скорость электронов $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$, где ***u*** - скорость относительно провода. На электрон действует сила



$$\boldsymbol{F}' = e[\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}] = \boldsymbol{e}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}] + \boldsymbol{e}[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}]$$

Второй член описывает эффект Холла (поле искривляет траекторию), а первый вызывает ускорение электронов, т.е. его действие эквивалентно действию электрического поля $\boldsymbol{E}' = [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}]$, что равносильно

возникновению в контуре ЭДС $IR = \oint \boldsymbol{E}' d\boldsymbol{l} = \mathcal{E}^{ind}$

$$\mathcal{E}^{ind} = \oint [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}] d\boldsymbol{l} = -\oint \boldsymbol{v}[\boldsymbol{dl} \times \boldsymbol{B}] = -\oint \frac{d\boldsymbol{R}}{dt}[\boldsymbol{dl} \times \boldsymbol{B}] = -\frac{d\Phi}{dt}$$

(Минус появился , поскольку перестановка в смешанном произведении не циклическая). Если поток возрастает, направление ЭДС определяется правилом левой руки. Закон индукции:

$$\mathcal{E}^{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int B_n dS$$

Движение проводника в магнитном поле

Если при движении контура поток через него не меняется (поступательное движение в однородном поле) , то ток в нем не возникнет.

Закон Фарадея справедлив при любой причине изменения магнитного потока, как от изменения самого поля, так и из-за движения контура.

Спасибо за внимание