



# **Физико-технические основы электроэнергетики**

Лекция 8

Профессор Е.Ю.Клименко



# Квазистационарное электромагнитное поле

## Уравнения квазистационарного поля

Основное уравнение:  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  позволяет учесть переменность полей  
Критерии квазистационарности:

- **Небольшая частота**  $\omega l \ll c$   $l$  – размеры объекта  
 $\omega \tau_e \ll 1$   $\tau_e$  – время свободного пробега электронов
- **Локальная связь между полем и током.** Второй и третий критерии позволяют пользоваться постоянным значением  $\sigma$  (проводимость)

В этом случае распределение поля вне тела можно описывать уравнениями  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$   $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0}$ , пренебрегая конечностью скорости распространения электромагнитных возмущений.

Полная система уравнений поля внутри проводника:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

Из  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  и  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  получаем  $\mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \Delta \mathbf{H}$

а также  $\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

(размерность  $[\mu_0 \sigma]$  сек/м<sup>2</sup>)

## Время затухания токов в проводнике

Если проводник с характерным размером  $d$  помещен в магнитное поле, которое в момент  $t=0$  выключается, поля и токи в нем будут затухать с постоянной времени  $\tau$ . Эту величину можно оценить исходя из  $\Delta \mathbf{H} \sim \mathbf{H}/d^2$

$$\tau = \mu_0 \sigma d^2$$

Точное решение можно было бы получить из разложения поля по собственным функциям

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \sum_m c_m e^{-\gamma_m t} \mathbf{H}_m(x, y, z)$$

Для этого ищут решения вида:  $\mathbf{H}(x, y, z, t) = e^{-\gamma_m t} \mathbf{H}_m(x, y, z)$  где  $\mathbf{H}_m$  удовлетворяют уравнению  $\frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \mathbf{H}_m = -\gamma_m \mathbf{H}_m$  и граничным условиям

$\mathbf{H}_{it} = \mathbf{H}_{et}$  и  $j_n = 0$   $\mathbf{H}_m$  - собственные функции задачи и

$\gamma_m$  - собственные значения

Время затухания  $\tau = \frac{1}{\gamma_m}$  соответствует минимальному собственному значению.

# Глубина проникания переменного поля в проводник

Имеем ток  $j_x(z, x) = j(z) \exp(i\omega t)$ ,  
соответственно  $E_x(z, x) = E(z) \exp(i\omega t)$

Подставим это поле в  $\Delta E = \mu_0 \sigma \frac{\partial E}{\partial t}$ , получим

$$E(z) = A \exp(ikz) + B \exp(-ikz), \quad k = \sqrt{-i\mu_0 \sigma \omega}$$

Введем  $\delta = \sqrt{2/\mu_0 \sigma \omega}$ , решение приобретет вид:

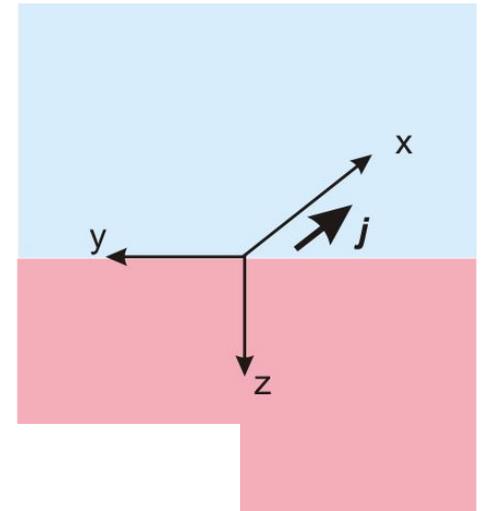
$$E(z) = A \exp\left(-i(1-i)\frac{z}{\delta}\right) + B \exp\left(i(1-i)\frac{z}{\delta}\right) \\ = A \exp\left(-(i+1)\frac{z}{\delta}\right),$$

так как второй член соответствует нарастающему с  $z$  полю.

Окончательно:

$$E(z, t) = E_0 \exp\left(-i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)\right) \cdot \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)$$

Поле  $E$  в проводнике уменьшается в  $e$  раз на глубине  $\delta$  и отстает по фазе относительно внешнего поля. Так же распределена плотность токов Фуко.



В 1850 поставил опыт определения скорости света в воздухе и воде с помощью быстро вращающегося зеркальца, который стал «экспериментом круцис» для

Ньютоновской теории истечения света и доказал её несостоятельность.

В 1851 произвёл опыт который наглядно показывал вращательно-суточное движение Земли вокруг её оси.

В 1852 изобрёл гироскоп, предложил использовать его для слежения за изменением направления, придумал само название «гироскоп».

В 1857 разработал теневой метод Фуко, ставший шлирен-методом после усовершенствования А.Теплером.

Предложил использовать вместо металлических зеркал более лёгкие и дешёвые — стеклянные, покрытые тонким слоем серебра.

Первым обратил внимание на нагревание металлических масс при быстром вращении их в магнитном поле (Токи Фуко).



**Жан Бернар Леон Фуко**  
*Jean Bernard Léon Foucault*  
1810-1868

## Диссипация энергии в скин-слое

Если токи Фуко возбуждаются переменным магнитным полем, то аналогично можно получить:

$$H_x(z, t) = H_0 \exp\left(-i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)\right) \cdot \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)$$

В этом случае

$$E_y(z, t) = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_x}{\partial z}$$

Вещественные части ...

$$H_x(z, t) = H_0 \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right) \cdot \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)$$

$$E_y(z, t) = H_0 \sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{4\sigma}} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \quad E_0 \sim \sqrt{\omega}$$

После усреднения по периоду и глубине тепловыделение:

$$Q = \bar{S}_z = \int \overline{H_x E_y} ds = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{2\sigma}} H_0^2 \quad Q \sim \sqrt{\omega}$$

# Комплексное сопротивление

При низких частотах  $\mathcal{E}(t) = RI(t)$  (здесь  $\mathcal{E}(t)$  - ЭДС)

Нет оснований, считать, что это соотношение будет выполняться при высоких частотах. Должно быть  $\mathcal{E}(t) = Z(\omega)I(t)$

Функцию  $Z(\omega)$  называют *комплексным сопротивлением (импедансом)*

Рассмотрим контур, в котором действует ЭДС  $\mathcal{E}(t)$ . Работа, производимая этой ЭДС, равна  $\mathcal{E}(t)I$ . Она частично переходит в тепло ( $RI^2$ ). Другая часть затрачивается на изменение магнитной энергии тока ( $LI^2/2$ ).

Закон сохранения энергии:  $\mathcal{E}(t)I = RI^2 + \frac{d}{dt} \frac{LI^2}{2} = RI^2 + LI \frac{dI}{dt}$ ,

Отсюда  $\mathcal{E} = RI + L \frac{dI}{dt}$ .

Перейдем монохроматическим компонентам в комплексном представлении:  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \exp(-i\omega t)$  и  $I = I_0 \exp(-i\omega t)$ .

Получим:  $\mathcal{E} = ZI$  и  $Z = R - i\omega L$ ,  $I = \mathcal{E}/Z$

Выделим вещественную часть:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \varphi), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}$$

## Контур в переменном магнитном поле

Рассмотрим провод во внешнем переменном магнитном поле  $H_e$ ,  $E_e$ -электрическое поле, которое индуцировалось бы  $H_e$  в отсутствие проводников. Эти поля мало меняются на расстояниях порядка толщины провода (в противоположность собственному полю). Можно рассматривать циркуляцию внешнего электрического поля по контуру на оси провода, эта циркуляция есть ЭДС, индуцируемая внешним полем.

$$\mathcal{E} = \oint E_e dl = - \frac{\partial}{\partial t} \int H_e ds = - \frac{d\Phi_e}{dt}$$

Тогда  $RI + L \frac{dI}{dt} = - \frac{d\Phi_e}{dt}$  или  $RI = - \frac{d\Phi_e}{dt} - L \frac{dI}{dt} = - \frac{d\Phi}{dt}$ ,

.  $\Phi$  -полный (суммарный) поток от внешнего поля и собственного поля тока.

Если в момент  $t=0$  в контуре выключается ЭДС, то ток будет затухать:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}, \quad \text{при } t = 0$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \exp\left(-\frac{R}{L} t\right), \quad \text{при } t \geq 0$$

## Емкость в цепи квазистационарного тока

К уравнению  $\mathcal{E} = RI + L \frac{dI}{dt}$  надо добавить разность потенциалов на

обкладках конденсатора:  $\mathcal{E} = RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C}$ . Поскольку  $I = \frac{dq}{dt}$ ,

получаем уравнение для заряда  $\mathcal{E} = L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$ , в этом случае

Импеданс  $Z = R - i(\omega L - \frac{1}{\omega C})$

Вещественная часть:  $I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cos(\omega t - \varphi)$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR}$

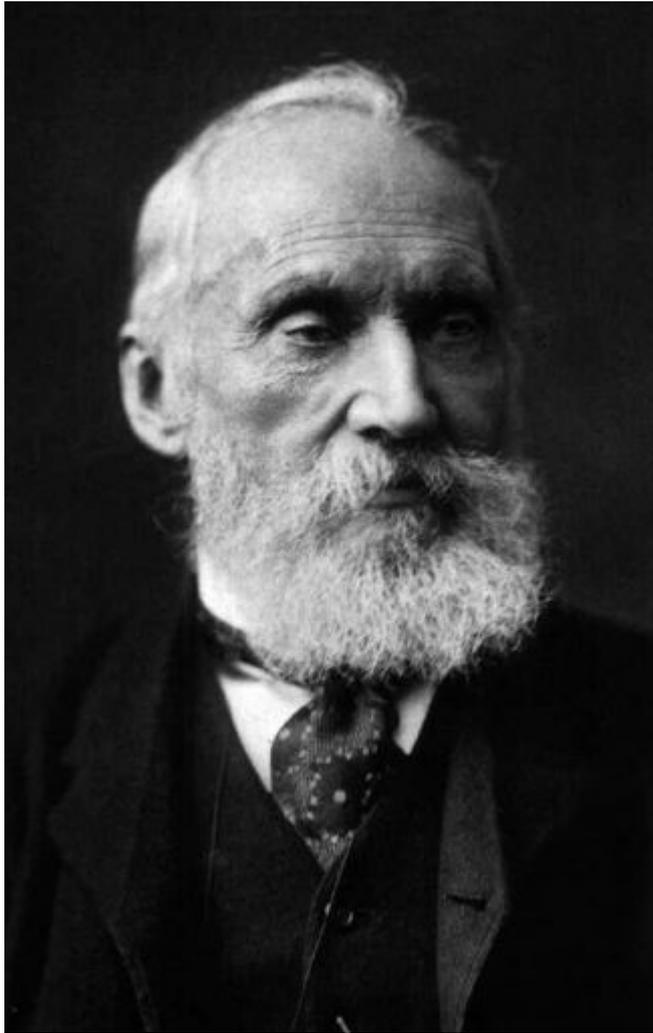
Если  $\mathcal{E} = 0$ , в цепи происходят свободные колебания тока с частотой

$$\omega = -i \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

В зависимости от знака подкоренного выражения колебания будут затухающими или разряд будет аperiodическим. При  $R \rightarrow 0$  колебания тока не затухают. Частота колебаний

Выражается формулой Томсона:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$



Уильям Томсон, лорд Кельвин  
1824-1907

Приложение рядов Фурье к вопросам физики.

Метод электрических изображений в электростатике

Второй закон термодинамики.

Эффект Джоуля – Томсона (охлаждение газов) переход от исследования идеального газа к реальным.

Исследования по термоэлектричеству  
Трансатлантическая телеграфия.

Условия существования колебательного электрического разряда (1853).

Теория эфира.

Установление абсолютной шкалы температур.

«Эффект Томсона» — перенос тепла электрическим током.

Множество приборов (зеркальный гальванометр и др.)

Усовершенствование лота и компаса (1872—1876)

## Движение проводника в магнитном поле

Выражение  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  справедливо лишь для неподвижного проводника.

Если замкнутый контур движется в поле  $\mathbf{B}$  со скоростью  $\mathbf{v}$ , то скорость электронов  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ , где  $\mathbf{u}$  - скорость относительно провода. На электрон действует сила

$$\mathbf{F}' = e[\mathbf{v}' \times \mathbf{B}] = e[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + e[\mathbf{u} \times \mathbf{B}]$$

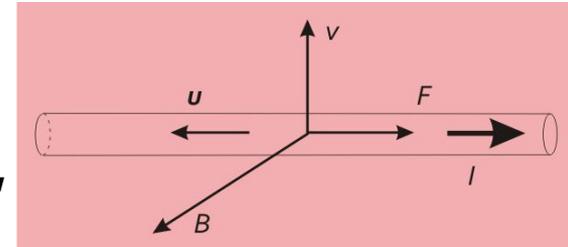
Второй член описывает эффект Холла (поле искривляет траекторию), а первый вызывает ускорение электронов, т.е. его действие эквивалентно действию электрического поля  $\mathbf{E}' = [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ , что равносильно

возникновению в контуре ЭДС  $IR = \oint \mathbf{E}' d\mathbf{l} = \mathcal{E}^{ind}$

$$\mathcal{E}^{ind} = \oint [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] d\mathbf{l} = - \oint \mathbf{v} [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}] = - \oint \frac{d\mathbf{R}}{dt} [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}] = - \frac{d\Phi}{dt}$$

(Минус появился, поскольку перестановка в смешанном произведении не циклическая). Если поток возрастает, направление ЭДС определяется правилом левой руки. Закон индукции:

$$\mathcal{E}^{ind} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int B_n dS$$



## **Движение проводника в магнитном поле**

Если при движении контура поток через него не меняется (поступательное движение в однородном поле), то ток в нем не возникнет.

**Закон Фарадея справедлив при любой причине изменения магнитного потока, как от изменения самого поля, так и из-за движения контура.**



**Спасибо за внимание**