

Урок 54.

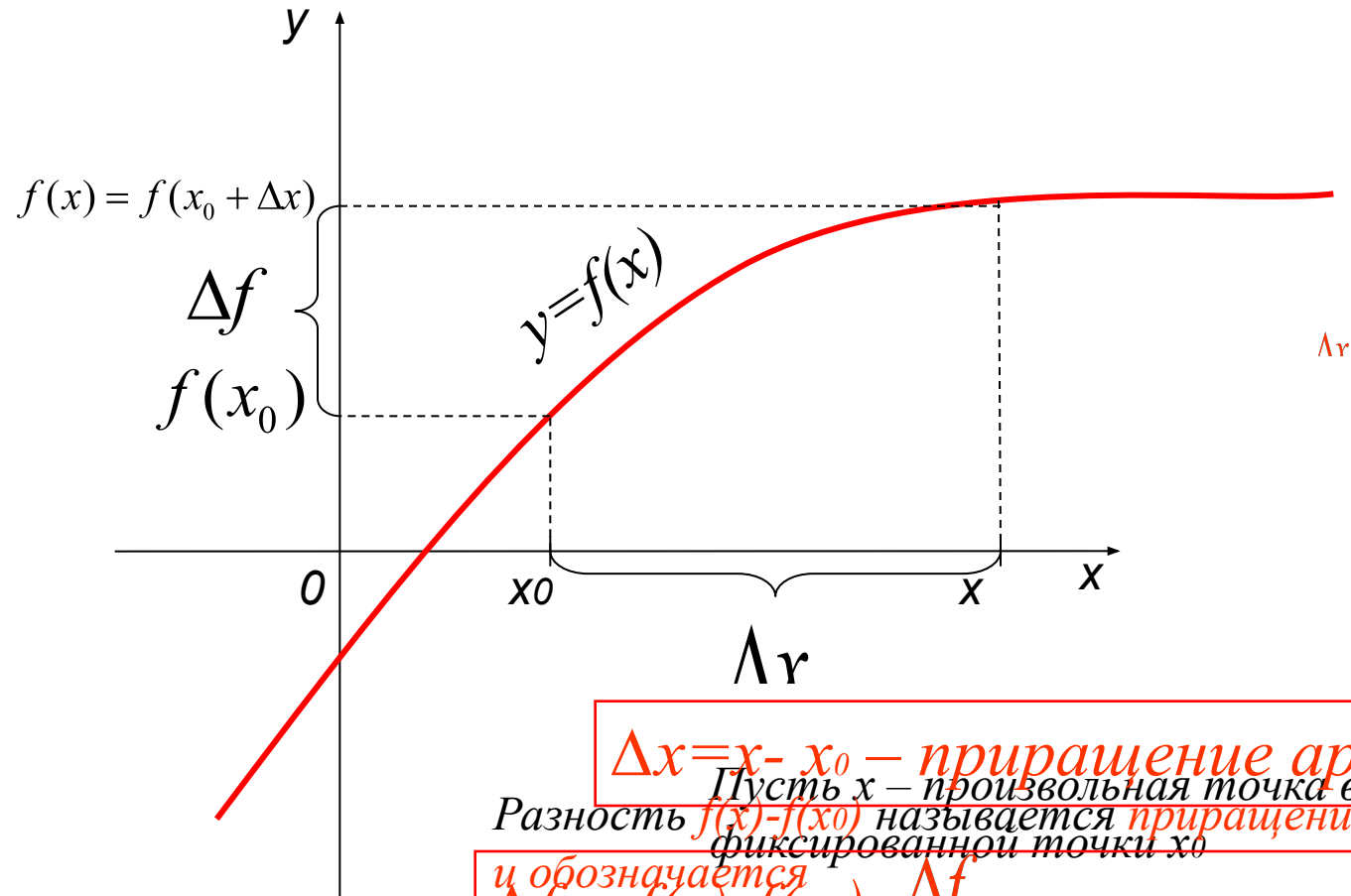
Тема: Определение
производной. Правила
вычисления производных.
Таблица производных

Цели обучения:

- 10.3.1.9 - знать определение производной функции и находить производную функции по определению;
- 10.3.1.10 - находить производные постоянной функции и степенной функции;
- 10.3.1.11 - знать и применять правила дифференцирования

Изучение нового материала

Пусть дана функция $y=f(x)$



$\Delta x = x - x_0$ — приращение аргумента

Пусть x — произвольная точка в окрестности
Разность $f(x) - f(x_0)$ называется приращением функции
фиксированной точки x_0

и обозначается $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ или Δf

Разность $x - x_0$ называется

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и называется приращением функции

$$\Delta x = x - x_0$$

$$x = x_0 + \Delta x$$

Определение производной

Если разностное отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ имеет предел $x \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$ то его называют **производной** функции в т.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Вообще данную операцию называют **дифференцированием функции**, а **производная** – это результат дифференцирования

Пример: $f'(x) = (x^2)'$ и найти $f'(x_0)$,

если $x_0 = -3$

$$1) \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = \\ = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$$

$$2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$3) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

т.е. $f'(x) = (x^2)' = 2x$ - производная функции
 $f'(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$ - производная функции в x_0

Схема вычисления производной функции:

1. Найти приращение функции на отрезке $[x; x+\Delta x]$:

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$$

2. Разделить приращение функции на приращение

аргумента:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

3. Найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

Задание: Найти производную функции:

1. $y = x^3$

2. $y = C$, где C – число

3. $y = kx + b$, где k и b числа

4. $y = \frac{1}{x}$

5. $y = \sqrt{x}$

Решение 1: Вычислить производную функции $y = x^3$

$$\begin{aligned} 1. \quad \Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = \\ &= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = \\ &= 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 \end{aligned}$$

$$2. \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

$$\begin{aligned} 3. \quad y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta x^2) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3x^2 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3x \cdot \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x^2 = \\ &= 3x^2 + 0 + 0 = 3x^2 \end{aligned}$$

Таблица простейших производных

ФУНКЦИЯ	ПРОИЗВОДНАЯ
$(C)'$	0
$(x)'$	1
$(x^n)'$	nx^{n-1}
$\left(\frac{1}{x}\right)'$	$-\frac{1}{x^2}$
$(\sqrt{x})'$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Правила дифференцирования (вычисления производных)

• (1) $(u + v)' = u' + v'$

• (2) $(uv)' = u'v + uv'$

• (3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

• Следствия:

1) $(Cv)' = Cv'$ 2) $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}$

Примеры.

$$1) f'(x) = \left(\frac{x^3}{9} \right)'$$

$$2) f'(x) = \left(2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x - 12 \right)'$$

$$3) f'(x) = \left(-\frac{x^4}{8} + \frac{2}{x} + 10 \right)'$$

$$4) f'(x) = (14\sqrt{x})'$$

Примеры.

$$6) f'(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} \right)'$$

$$7/1) f'(x) = (x^2(5-2x))'$$

$$7/2) f'(x) = (x^2(5-2x))' = (5x^2 - 2x^3)'$$