Занятие №4. Технология подготовки учащихся к овладению геометрическими методами решения задач с параметрами.

Прокофьев Александр Александрович,

Зав.каф. ВМ-1, НИУ МИЭТ

Содержание курса

№	Тема занятий
1	Основные структурные изменения и особенности проведения государственной аттестации учащихся в 2015. Технология подготовки учащихся к овладению алгебраическими методами решения задач с параметрами.
2	Технология подготовки учащихся к овладению функциональными методами решения задач с параметрами.
3	Технология подготовки учащихся к овладению функционально-графическими методами решения задач с параметрами.
4	Технология подготовки учащихся к овладению геометрическими методами решения задач с параметрами.
5	Технология подготовки учащихся к овладению решения задач с параметрами комбинированными методами.
Итоговая аттестация	По результатам посещаемости и успешности выполнения контрольных работ.

Содержание занятия

- О геометрических методах решения задач с параметрами
- Геометрический метод в задачах с параметром в литературе для подготовки к ЕГЭ 2015 (проф. уровень)
- Язык формул и расстояний
- Соответствие формул и геометрических образов
- Технология подготовки учащихся к овладению геометрическими методами решения задач с параметрами (знакомство с основными типами задач)
- Параметры в геометрических задачах
- Печатные и электронные ресурсы.

О геометрическом методе решения задач с параметром

Задачи, решаемые этим методом, содержат «геометрический подтекст», поскольку их составление изначально и решение в последующем подразумевает использование различных геометрических соображений.

Метод основан на том, что между геометрическими и алгебраическими задачами, между языком алгебры («языком формул») и языком геометрии («языком расстояний») существует неоспоримая связь, известная со времен Декарта.

О геометрических методах решения задач с параметрами

Можно выделить два вида задач с параметрами, при решении которых используются геометрические методы:

1) задачи с параметром, использующие в решении геометрические идеи;

2) непосредственно геометрические задачи, при решении которых применяется метод введения параметра.

В первом случае графические интерпретации основываются еще и на геометрических представлениях, а решение – на использовании формул расстояния (между двумя точками; от точки до прямой на плоскости или до плоскости в пространстве), уравнений (прямой, пары параллельных или пересекающихся прямых; окружности; отрезка или параллелограмма), то есть основывается на использовании метода координат и геометрических формул. Само доказательство или решение задачи в этом случае опирается на наглядные представления, а геометрические идеи являются основанием для решения ряда алгебраических задач: уравнений, неравенств, вычисления наибольшего и наименьшего значений некоторых выражений.

Во втором случае решение геометрической задачи сводится к решению уравнения или системы уравнений и требует умения применять соответствующий алгебраический инструментарий.

Геометрический метод в задачах с параметром в литературе для подготовки к ЕГЭ 2015 (проф. уровень)

Геометрический метод в задачах с параметром в литературе для подготовки к ЕГЭ 2015 (проф. уровень)

МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2012

Функция и параметр

(типовые задания С5)

Прокофьев А.А.

Корянов А.Г.

Прокофьев А.А. – доктор педагогических наук, заведующий кафедрой высшей математики №1 НИУ МИЭТ, учитель математики ГОУ лицей №1557 г. Зеленограда; e-mail: aaprokof@yandex.ru

Корянов А.Г. – методист по математике городского информационно-методического Центра (МБОУ БГИМЦ) г. Брянска, учитель математики МОУ лицей №27 г. Брянска; e-mail: akoryanov@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2011

(типовые задания С5)

Уравнения и неравенства с параметрами: количество решений

Корянов А. Г., *г. Брянск*, akoryanov@mail.ru

Прокофьев А.А., *г. Москва*, aaprokof@yandex.ru

…АНИЕ стр.

Функционально-графические методы в электронных пособиях Прокофьева А.А. и Корянова А.Г.

Из оглавления пособия 2011 года:

Из оглавления пособия 2012 года:

Адреса:
http://alexlarin.net/ege/2012/C5-2012.http://alexlarin.net/ege/2012/C5-2012. html
и
http://www.alexlarin.net/ege/2011/c52011.html

АБИТУРИЕНТ RU

Язык формул и расстояний

ВикипедиЯ
Свободная энциклопедия

«Алгебра – не что иное, как записанная в символах геометрия, а геометрия – это просто алгебра, воплощенная в фигурах»

– *София Жермен* (1776-1831), *французский математик*

«Арифметические знаки – это записанные геометрические фигуры, а геометрические фигуры – это нарисованные формулы»

– *Давид Гильберт* (1862-1943), *немецкий математик*

«Но когда эти науки (алгебра и геометрия) объединились, они энергично поддержали друг друга и быстро зашагали к совершенству»

– *Жозе́ф Луи́ Лагра́нж* (1736-1813), *французский математик*

Таблица соответствия между языками алгебры («язык формул») и геометрии («язык расстояний»)

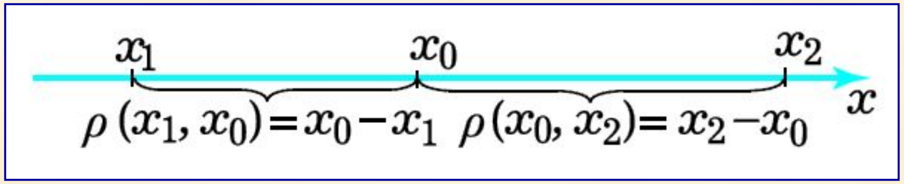
Алгебраический язык (язык формул)	Геометрический язык (язык расстояний)
Числа и буквы	Расстояния до координатных осей (координаты)
Модуль разности двух чисел	Расстояние между двумя точками координатной прямой
Сумма квадратов двух чисел	Квадрат расстояния между двумя точками координатной плоскости

Формула расстояния между двумя точками

1. Расстояние между точками на координатной оси

Определение 1. *Расстояние* $\rho(x_1, x_2)$ *между точками* x_1 *и* x_2 *оси* Ox определяется равенством:

$$\rho(x_1, x_2) = |x_2 - x_1| = \begin{cases} x_2 - x_1, \text{ если } x_2 > x_1, \\ 0, \text{ если } x_2 = x_1, \\ x_1 - x_2, \text{ если } x_1 > x_2. \end{cases}$$

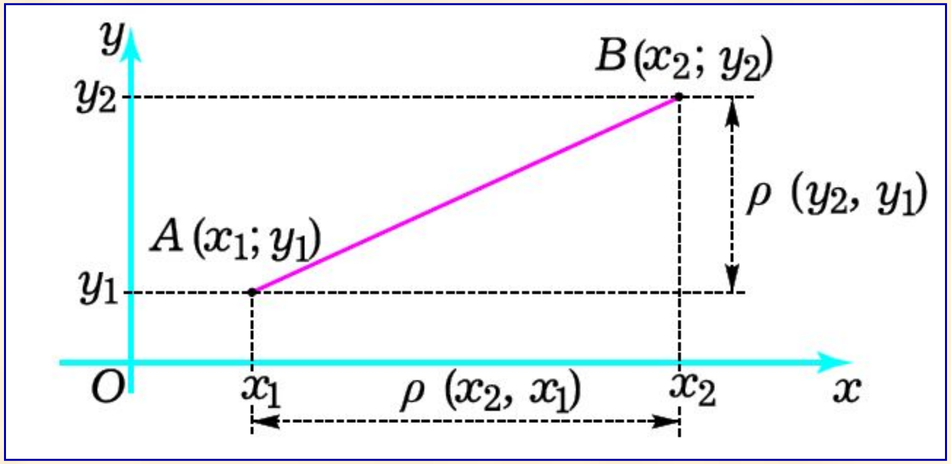


Всегда верно неравенство $\rho(x_1, x_2) \geq 0$.

2. Расстояние между точками на плоскости

Определение 2. *Расстояние между точками* $A(x_1; y_1)$ *и* $B(x_2; y_2)$ *на плоскости* (см. рис.) определяется равенством

$$\rho(A, B) = \sqrt{\rho(x_1, x_2)^2 + \rho(y_1, y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Применение формулы расстояния между двумя точками на координатной оси

Пример. Найти все значения параметра a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения

$$x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$$

принимает наибольшее возможное значение.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. Традиционное решение задачи состоит в вычислении наибольшего значения функции $f(a) = |x_1 - x_2|$, то есть функции

$$f(a) = 2\sqrt{-3+4a-a^2} = 2\sqrt{1-(a-2)^2},$$

равного, очевидно, 2 при $a = 2$.

Замечание: значительная часть учащихся, скорее

всего, попытается провести исследование функции на наибольшее значение по традиционному алгоритму, требующему применения производной, и столкнется на этом пути с неизбежными и довольно значительными трудностями, связанными с дифференцированием сложной функции и преобразованием иррациональных выражений.

Ответ: 2.

Язык расстояний на языке формул.

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №7-8 (755)
июль–август 2014
С. ШЕСТАКОВ
isser@yandex.ru

1. Расстояние от точки t числовой оси до точки -22 меньше 5

$$|t + 22| < 5$$

Комментарий. Расстояние между точками a и b числовой оси равно модулю разности чисел a и b, то есть $r(a; b) = |a - b|$

2. Сумма расстояний от точки x числовой оси до точек -3 и 5 равна 12

$$|x + 3| + |x - 5| = 12$$

3, Точка 5 числовой оси равноудалена от точек $x - 1$ и $x^2 - 16$

$$|x - 6| = |x^2 - 21|$$

4. Расстояние от точки, лежащей на прямой $y = 3x - 2$, до оси абсцисс в 5 раз больше расстояния до оси ординат

$$|3x - 2| = 5|x|$$

Комментарий. Расстояние от точки $(x; y)$ графика функции $y = f(x)$ до оси абсцисс равно $|f(x)|$, а до оси ординат равно $|x|$

5. Точка $M(a; b)$ принадлежит окружности с центром в начале координат и радиусом 3

$$a^2 + b^2 = 9$$

Язык расстояний на языке формул

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №7-8 (755)
июль–август 2014
С. ШЕСТАКОВ
isser@yandex.ru

6. Сумма расстояний от точки $M(x;\,y)$ до точек $P(3;\,4)$ и $K(-2;\,5)$ не больше 6

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2}\le 6$$

7. Расстояние от точки $M(m;\,n)$ единичной окружности до точки $P(-4;\,1)$ равно 3

$$\begin{cases} m^2+n^2=1, \\ \sqrt{(m+4)^2+(n-1)^2}=3 \end{cases}$$

8. Расстояние от точки $M(p;\,q)$ окружности с центром $(-2;\,-4)$ и радиусом 2 до точки $P(a;\,b)$ окружности с тем же центром и радиусом 6 равно 8

$$\begin{cases} (p+2)^2+(q+4)^2=4, \\ (a+2)^2+(b+4)^2=36, \\ \sqrt{(p-a)^2+(q-b)^2}=8 \end{cases}$$

9. Сумма расстояний от точки M, лежащей на прямой $y = 2x - 1$, до точек $P(3;\,4)$ и $K(-1;\,1)$ равна 5

$$\sqrt{(x-3)^2+(2x-5)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(2x-2)^2}=5$$

Комментарий. Если точка лежит на прямой $y = 2x - 1$, то ее координаты $(x;\,2x - 1)$

10. Расстояние от точки M, лежащей на прямой $y = x$, до точки P, лежащей на прямой $y = 2x - 3$, не меньше 9

$$\sqrt{(a-b)^2+(a-2b+3)^2}\ge 9$$

Комментарий. В силу принадлежности точек данным прямым их координаты в общем виде можно записать так: $M(a;\,a)$, $P(b;\,2b - 3)$, где a и b — произвольные действительные числа

Язык формул на языке расстояний

1. Решить уравнение $|x-5|=2|x+3|$

Найти все точки x числовой оси, расстояние от каждой из которых до точки 5 в два раза больше расстояния до точки -3

2. Имеет ли система уравнений

$$\begin{cases} p^2+q^2=16, \\ r^2+t^2=25, \\ (p-r)^2+(q-t)^2=100 \end{cases}$$

хотя бы одно решение?

Можно ли на каждой из концентрических окружностей с центром в начале координат, радиусы которых равны 4 и 5, найти по точке, расстояние между которыми равно 10?

3. Найти наименьшее значение функции

$$y=\sqrt{(x-1)^2+9}+\sqrt{(x+3)^2+16}$$

На оси абсцисс найти точку, сумма расстояний от которой до точек (1; 3) и (–3; –4) минимальна. *Комментарий*. Число $\sqrt{(x-1)^2+9}$ равно расстоянию между точками $(x;\ 0)$ и (1; 3); число $\sqrt{(x+3)^2+16}$ равно расстоянию между точками $(x;\ 0)$ и (–3; –4)

Язык формул на языке расстояний

4. Найти наименьшее значение функции

$$y=\sqrt{(x+2)^2+(2x+1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(2x-5)^2}$$

На прямой $y = 2x$ найти точку, сумма расстояний от которой до точек $(-2; -1)$ и $(3; 5)$ минимальна.
Комментарий. Число $\sqrt{(x+2)^2+(2x+1)^2}$ равно расстоянию между точками $(x; 2x)$ и $(-2; -1)$; число $\sqrt{(x-3)^2+(2x-5)^2}$ равно расстоянию между точками $(x; 2x)$ и $(3; -5)$

5. Решить неравенство

$$(z-t)^2+(z-3t+5)^2\le 18$$

Найти все точки на прямой $y = x$ и все точки на прямой $y = 3x - 5$ такие, что квадрат расстояния от точки на прямой $y = x$ до точки на прямой $y = 3x - 5$ не превосходит 18.
Комментарий. Сумма $(z - t)^2 + (z - 3t + 5)^2$ равна квадрату расстояния между точками $(z; z)$ и $(t; 3t - 5)$

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №7-8 (755)
июль–август 2014
С. ШЕСТАКОВ
isser@yandex.ru

6. Решить уравнение с параметром:

$$|x|=5|ax-3|$$

На графике функции $y = ax + 3$ найти все точки, расстояние от каждой из которых до оси ординат в 5 раз больше расстояния до оси абсцисс

Язык формул на языке расстояний.

7. Найти все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (m-3)^2+(n-4)^2=a^2, \\ m^2+n^2=4 \end{cases}$$

Найти радиус окружности с центром в точке (3; 4), если известно, что эта окружность касается окружности, радиус которой равен 2, а центром является начало координат.

Комментарий. Найденный радиус будет равен $|a|$

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №7-8 (755)
июль–август 2014

С. ШЕСТАКОВ
isser@yandex.ru

Соответствие формул и геометрических образов

Рассмотрим соответствие некоторых уравнений, неравенств и просто выражений и их геометрических образов на координатной плоскости *Oxy* (*таблица* 1), и их использование при решении задач.

Таблица 1

№	Уравнение, неравенство или система	Геометрический образ
1	$ax + by = c,\ \ a^2 + b^2 \neq 0$	Прямая, расположение которой определяется конкретными значениями параметров a, b, c
1.1	$ax = c,\ \ a \neq 0$	Прямая, параллельная оси ординат
1.2	$by = c,\ \ b \neq 0$	Прямая, параллельная оси абсцисс
1.3	$y = kx + p,\ \ k \neq 0$	Прямая, пересекающая ось ординат в точке $M(0;\ p)$, ось абсцисс в точке $N\left(-\dfrac{p}{k};0\right)$, образующая с положительным лучом оси абсцисс угол $0 < \varphi < \pi$, $\operatorname{tg}\varphi = k$

Уравнение прямой

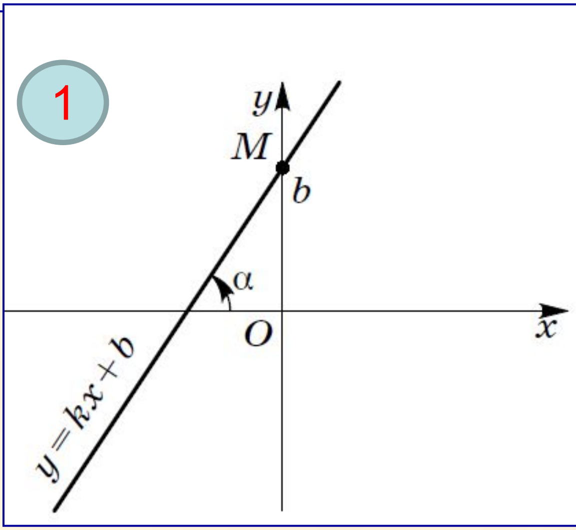
Пусть на плоскости дана прямоугольная система координат Oxy. Тогда уравнение

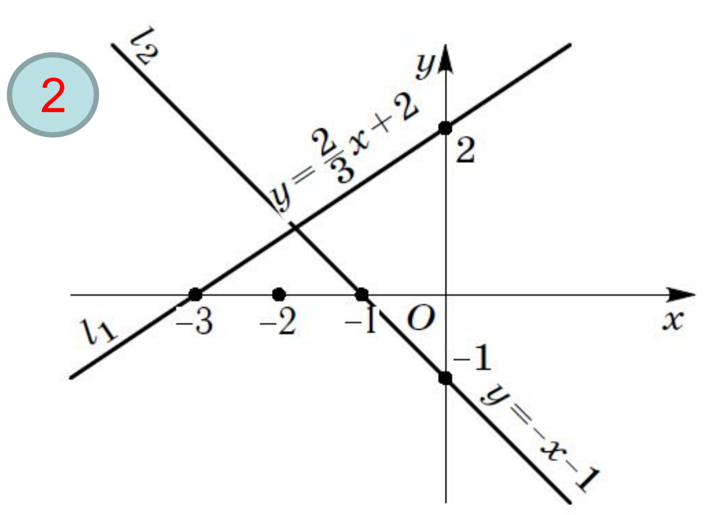
$$y = kx + b \qquad (1)$$

определяет прямую l (рис. 1), пересекающую ось Oy в точке $M(0; b)$ и образующую угол α с положительным направлением оси Ox, где $\operatorname{tg}\alpha = k$ — угловой коэффициент прямой l.

Чтобы построить прямую l, заданную уравнением (1), достаточно найти две точки этой прямой. На рис. 2 изображены прямые l_1 и l_2, заданные соответственно уравнениями

$$y = \frac{2}{3}x + 2 \quad \text{и} \quad y = -x - 1.$$





Учебник. Шабунин М.И., Прокофьев А.А. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Проф. Уровень: учебник для 11 класса. − М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2012. − 391 с.

Глава XVIII

Задачи для самостоятельного решения

1

(ГИА-9, 2010, № 21). Дана система уравнений

$$\begin{cases} x + 3y = 1, \\ 3x - y = 13, \\ x - 2y = p. \end{cases}$$

При каких p система имеет решение?

Ответ: $p = 6$.

2

Определите, при каких значениях параметра a имеет единственное решение в целых числах система неравенств

а) $\begin{cases} x + 3y > 24, \\ y - x < 6, \\ ay > x - 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y < 6, \\ 2y - x > 15, \\ x > ay - 2. \end{cases}$

Ответ: а) $1/8 < a \leqslant 2/9$; б) $-1/8 \leqslant a < 0$.

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

БИНОМ

Прокофьев А.А.

Системы двух линейных уравнений

Задача 1. Пусть $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$ — общие уравнения двух прямых на плоскости. Эти прямые либо пересекаются, либо параллельны, либо совпадают. Исходя из этого, вывести условия, которым должны удовлетворять коэффициенты a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2, чтобы система двух линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

имела единственное решение; имела бесконечно много решений; не имела решений.

При $b_1 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$

$$y=-\frac{a_1}{b_1}x+\frac{c_1}{b_1}= =k_1x+m_1,$$

$$y=-\frac{a_2}{b_2}x+\frac{c_2}{b_2}= =k_2x+m_2.$$

Ответ: При $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ — бесконечно много решений;

при $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ — решений нет;

при $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ — единственное решение;

если $b_1=0$ или $b_2=0$ и $a_1\neq 0$, $a_2\neq 0$ — единственное решение;

если $b_1=b_2=0$ и $a_1\neq 0$, $a_2\neq 0$, то при $\frac{c_1}{a_1}\neq\frac{c_2}{a_2}$ решений нет, а при $\frac{c_1}{a_1}=\frac{c_2}{a_2}$ решений бесконечно много.

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

БИНОМ

Прокофьев А.А.

Системы двух линейных уравнений

Пример 1. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} a + y - 0,5a^2x = 0, \\ 8x - y + 4 = 0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

Ответ: -4.

Пример 2. Определить, при каких значениях параметра a уравнения $x + ay = 1$ и $ax + y = 2a$ имеют хотя бы одно общее решение.

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Пример 3. При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что уравнения $2x + by = ac^2 + c$ и $bx + 2y = c - 1$ имеют хотя бы одно общее решение?

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ
Издательство БИНОМ
Прокофьев А.А.

Ответ: $-1 \leqslant a < 0$.

Система линейных неравенств

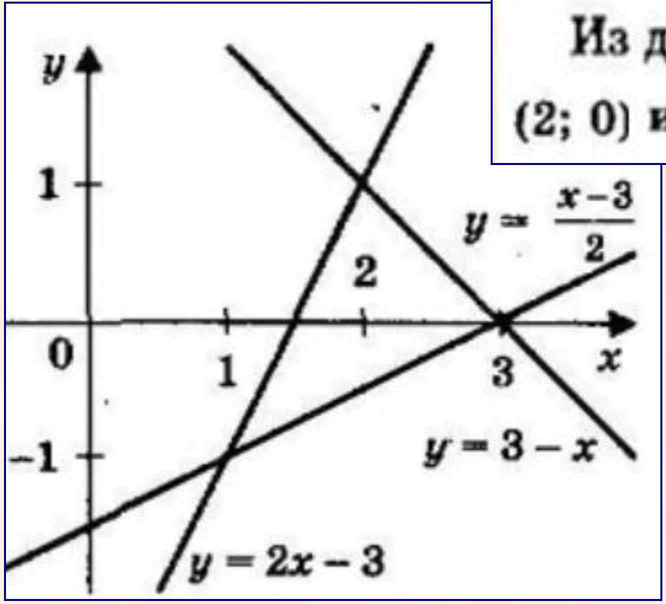
Пример. *(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, химический факультет, 2005.)* Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x-y-3}+\sqrt{2y-x+3}=2\sqrt{3-x-y}.$$

Решение. Множество допустимых пар чисел $(x; y)$ определяется системой неравенств

$$\begin{cases} 2x-y-3\ge 0, \\ 2y-x+3\ge 0, \\ 3-x-y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\le 2x-3, \\ y\ge \dfrac{x-3}{2}, \\ y\le 3-x. \end{cases}$$

Из допустимых пар целых чисел $(1; -1)$, $(2; 1)$, $(3; 0)$, $(2; 0)$ исходному уравнению удовлетворяет одна пара $(2; 0)$.



Ответ: $(2; 0)$.

Соответствие формул и геометрических образов

Пример. ДВИ МГУ 2011. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3x^2+4xy+12y^2 \le 1 \\ 5x+6y \le -3. \end{cases}$$

$3x^2+4xy+12y^2=1$

Р е ш е н и е. Решим систему

$$\begin{cases} 3x^2+4xy+12y^2 = 1 \\ 5x+6y = -3. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 3 с целью выделения полного квадрата, получим:

$$\begin{cases} 9x^2+12xy+36y^2 = 3 \\ 5x+6y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6y+x)^2+8x^2=3 \\ (6y+x)+4x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y+x=-4x-3 \\ 24x^2+24x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{1}{12}. \end{cases}$$

Таким образом, границы ГМТ действительно имеют единственную общую точку. Но т.к. второе ГМТ полуплоскость, то первое ГМТ либо полностью (кроме одной точки) лежит вне её, либо лежит внутри полуплоскости. Поэтому достаточно заметить, что (0;0) принадлежит первому ГМТ, но не принадлежит полуплоскости.

Ответ: $\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{12}\right)$.

Соответствие формул и геометрических образов

Пример. *Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств*

$$\begin{cases}(2a+1)x+2y\ge 4a+1,\\ 4x+(3a-4)y\le 3,\\ (2a-3)x+5y\le 4a\end{cases}$$

имеет единственное решение. Найти это решение.

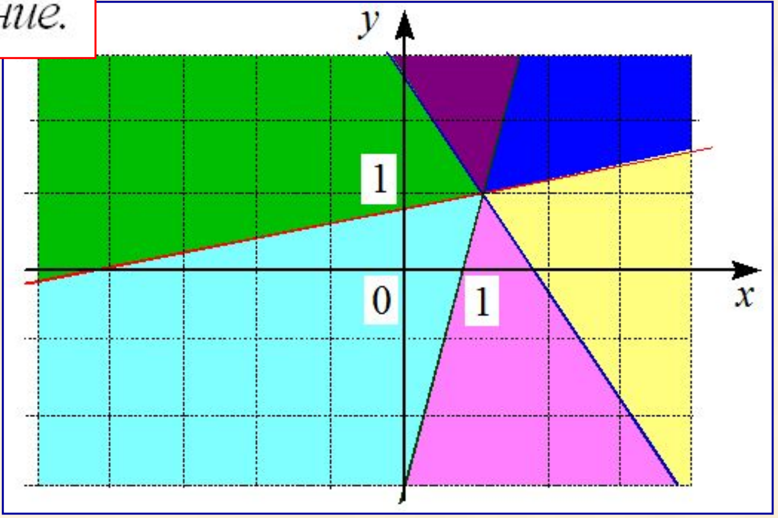
Решение. При фиксированном a каждое неравенство системы определяет на плоскости xOy полуплоскость вместе с границей. Полуплоскости имеют единственную общую точку, если прямые, их ограничивающие, пересекаются в одной точке. В соответствующей системе линейных уравнений

$$\begin{cases}(2a+1)x+2y=4a+1,\\ 4x+(3a-4)y=3,\\ (2a-3)x+5y=4a\end{cases}$$

исключим x и y. Получим уравнение

$$42a^2-17a-25=0$$

с корнями $a=1$ или $a=-\dfrac{25}{42}$.



При $a=1$ решение $x=1$ и $y=1$.

При $a=-\dfrac{25}{42}$ решений бесконечное множество.

Ответ: $a=1$; $x=1$ и $y=1$.

Соответствие формул и геометрических образов

№	Уравнение, неравенство или система	Геометрический образ
1.4	$\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at, \end{cases}$ $t \in R$	Параметрическое задание прямой, задаваемой декартовым уравнением $ax + by = c$, $a^2 + b^2 \neq 0$, проходящей через точку $M(x_0; y_0)$
1.5	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$	Прямая, проходящая через точки с координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$
2	$ax + by > c$ $(< c, \leq c, \geq c)$	Полуплоскость, границей которой является прямая заданная уравнением $ax + by = c$, $a^2 + b^2 \neq 0$
3	$y = k\lvert x - a\rvert$, $k \neq 0$	«Двухзвенная ломаная», вершина которой расположена в точке $M(a; 0)$, лучи которой симметричны относительно прямой $x = a$
3.1	$y = k_1\lvert x - a_1\rvert + k_2\lvert x - a_2\rvert + \ldots$ $\ldots + k_n\lvert x - a_n\rvert$	«Многозвенная ломаная», вершины которой расположены в точках, абсциссы которых есть точки перемены знака каждого «подмодульного» выражения

МИРОШИН В.В.
МАТЕМАТИКА в школе 3 2014

Соответствие формул и геометрических образов

Пример. Найдите все значения параметра, при каждом из которых неравенство $|x-a| + |2x-4| \geq 6$ верно для любого значения переменной x.

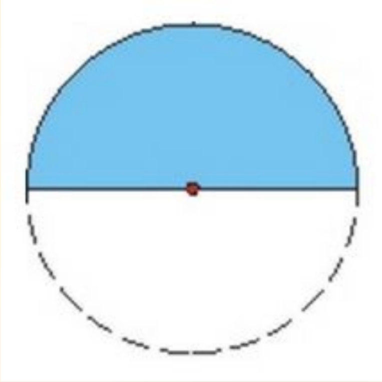
Решение. Условие «для любого» даёт возможность искать решение, используя вид выражения, расположенного в левой части неравенства. Графиком функции $f(x) = |x-a| + 2|x-2|$ является двухзвенная $(a=2)$ или трёхзвенная ломаная. Наименьшее значение функции получается при $x = 2$. Действительно, при $x = a$ значение функции равно $2|a-2|$, а при $x = 2$ значение функции равно $|a-2|$. Следовательно, искомые значения параметра будут задаваться условием: $\min(|x-a| + 2|x-2|) = f(2) = |2-a| \geq 6$.

$$|a-2| \geq 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \geq 8 \\ a \leq -4. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; -4] \cup [8; +\infty)$.

Соответствие формул и геометрических образов

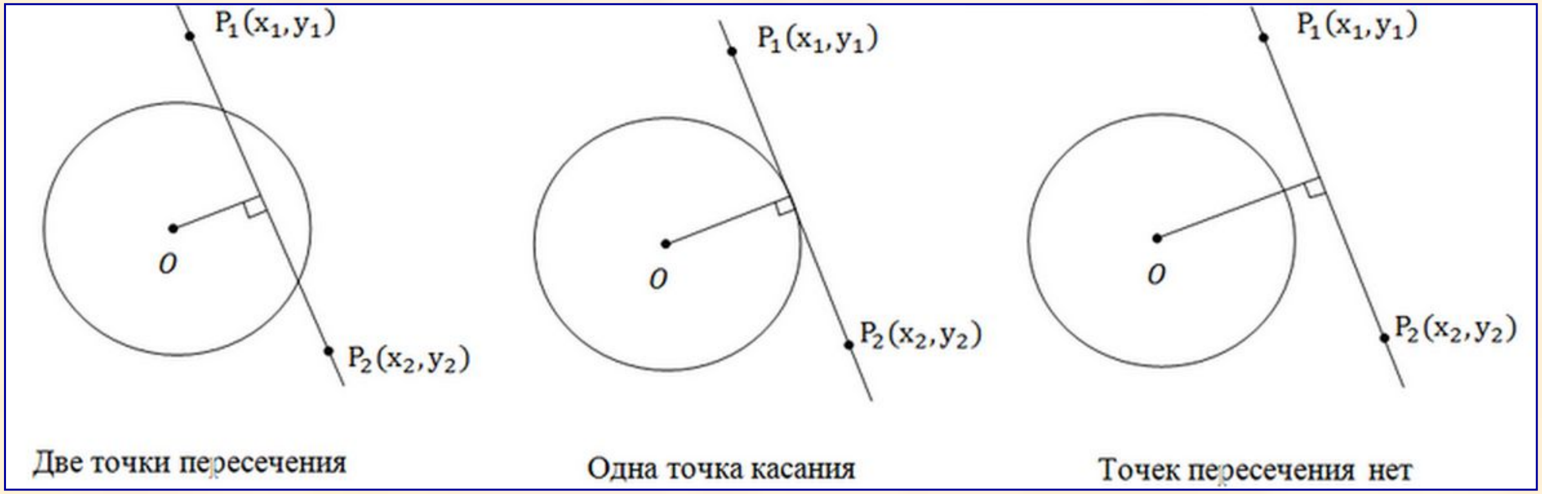
4	$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=\lvert R\rvert$	Точка $M(a;\,b)$, если $R=0$. Окружность с центром в точке $M(a;\,b)$, радиуса $\lvert R\rvert$, $R\neq 0$
4.1	$(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2$, $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\le\lvert R\rvert$, $R\neq 0$	Круг с центром в точке $M(a;\,b)$, радиуса $\lvert R\rvert$, $R\neq 0$
4.2	$(x-a)^2+(y-b)^2>R^2$, $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}>\lvert R\rvert$, $R\neq 0$	Часть плоскости, лежащая вне круга с центром в точке $M(a;\,b)$, радиуса $\lvert R\rvert$, $R\neq 0$
4.3	$y=b+\sqrt{R^2-(x-a)^2}$	Верхняя полуокружность с центром в точке $M(a;\,b)$, радиуса $\lvert R\rvert$, $R\neq 0$
4.4	$y=b-\sqrt{R^2-(x-a)^2}$	Нижняя полуокружность с центром в точке $M(a;\,b)$, радиуса $\lvert R\rvert$, $R\neq 0$



Соответствие формул и геометрических образов

Взаимное расположение окружности и прямой (отрезка)

- *Окружность и прямая не имеют общих точек, если расстояние a от центра окружности до прямой больше радиуса r этой окружности ($a > r$).*
- *Окружность и прямая имеют ровно одну общую точку, если расстояние a от центра окружности до прямой равно радиусу r этой окружности ($a = r$).*
- *Окружность и прямая имеют две общие точки, если расстояние a от центра окружности до прямой меньше радиуса r этой окружности ($a < r$).*



Расположение прямой и окружности

Пример. Определить значения параметра a, при каждом из которых прямая $y = ax + 5$ является касательной к окружности $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 8$.

Решение. *Способ* 1 (исследование дискриминанта квадратного уравнения). Подставляя $y = ax + 5$ в уравнение окружности $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 8$, получаем $(x + 3)^2 + (ax + 1)^2 = 4$.

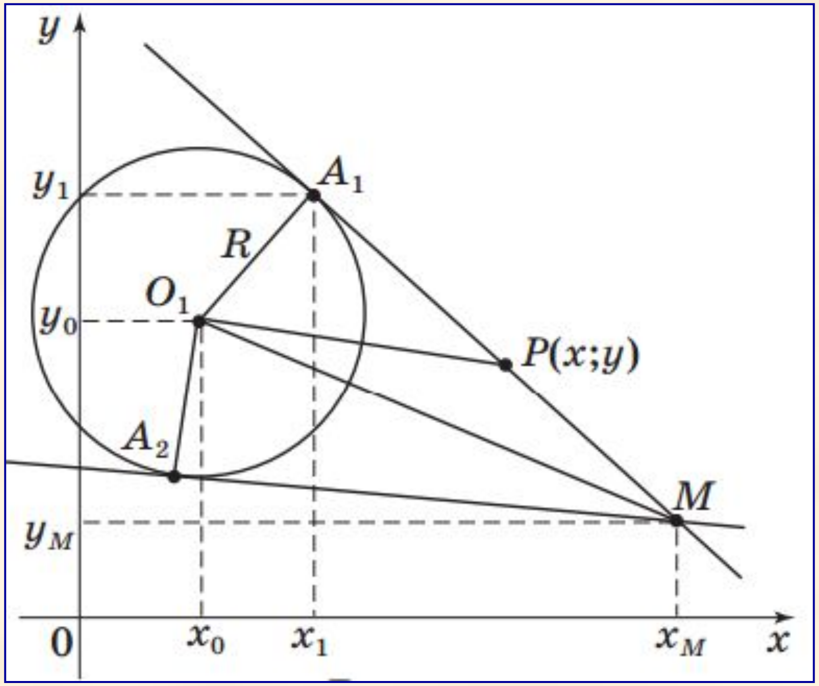
Отсюда после преобразований получим квадратное уравнение

$$(1 + a^2)x^2 + (2a + 6)x + 2 = 0,$$

дискриминант которого

$$D = (2a + 6)^2 - 8(1 + a^2) = -4(a^2 - 6a - 7).$$

Так как $D = 0$ при $a = -1$ или $a = 7$, то при этих значениях параметра прямая из семейства является касательной, а при $-1 < a < 7$ – секущей.



Ответ: $a = -1$ или $a = 7$.

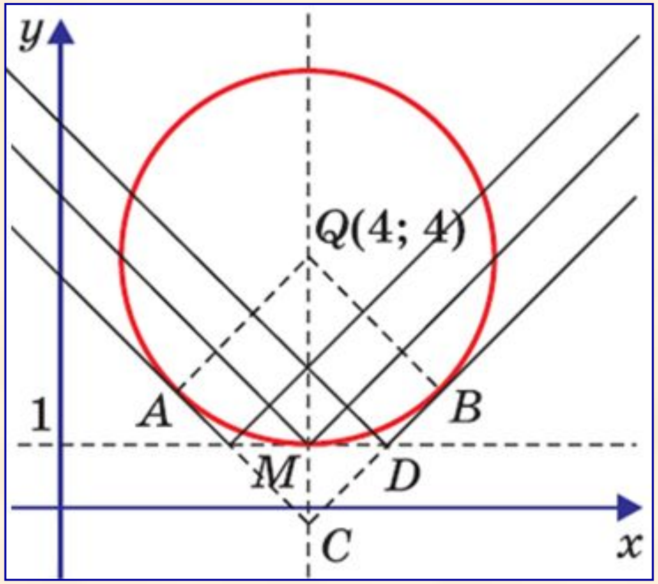
Пример из вариантов ЕГЭ 2011

Пример. Найти все значения параметра a, при каждом из которых имеет ровно три различных решения система уравнений $\begin{cases}(x-4)^2+(y-4)^2=9,\\ y=|x-a|+1.\end{cases}$

Ровно три общие точки фигуры имеют в следующих случаях.

1. Вершина прямого угла лежит в точке M касания окружности и прямой $y=1$, а его стороны пересекают окружность в двух точках (первый случай). Это возможно, только если $a=4$.

2. Одна из сторон прямого угла пересекает окружность в двух точках, а другая касается окружности в точке A (второй случай) или в точке B (третий случай).



Ответ: $7-3\sqrt{2}$; 4; $1+3\sqrt{2}$.

Пример с «пучком прямых» (ЕГЭ 2013)

Пример. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$ax+\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2$$

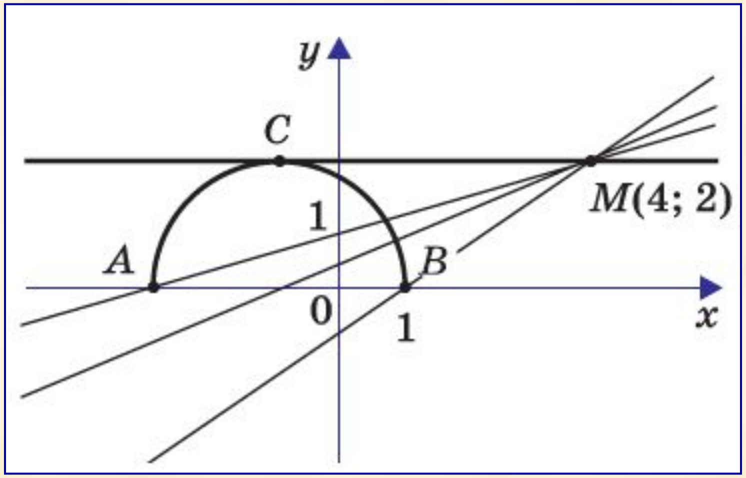
имеет единственный корень.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{3-2x-x^2}=-ax+4a+2$$

и рассмотрим графики функций

$$y=\sqrt{3-2x-x^2} \text{ и } y=-ax+4a+2.$$



Поскольку правая часть в формуле $y=\sqrt{3-2x-x^2}$ неотрицательна, то и левая ее часть не может быть отрицательной. Поэтому

$$\begin{cases} y^2=3-2x-x^2, \\ y\ge 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (x+1)^2+y^2=4, \\ y\ge 0. \end{cases}$$

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №5 – 6 (754)

С. ШЕСТАКОВ №5 – 6 (754)

Графиком функции $y=-ax+4a+2$ является прямая. Заметим, что $y=-a(x-4)+2$ и если $x=4$, то $y=2$ вне зависимости от значений параметра. Поэтому прямая $y=-ax+4a+2$ при любом значении параметра проходит через точку $M(4;\,2)$. Данное уравнение имеет единственный корень только в том случае, когда эта прямая имеет с полуокружностью единственную общую точку.

Ответ: $\{0\}\cup\left[-\dfrac{2}{3};\,-\dfrac{2}{7}\right)$.

Использование уравнения окружности

Пример. Найти все значения параметра a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения

$$x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$$

принимает наибольшее возможное значение.

Решение. Второй способ заключается в переводе условия данной задачи с алгебраического языка на геометрический. Для этого выделим полные квадраты в левой части уравнения и перепишем его в виде

$$(x - 3)^2 + (a - 2)^2 = 1.$$

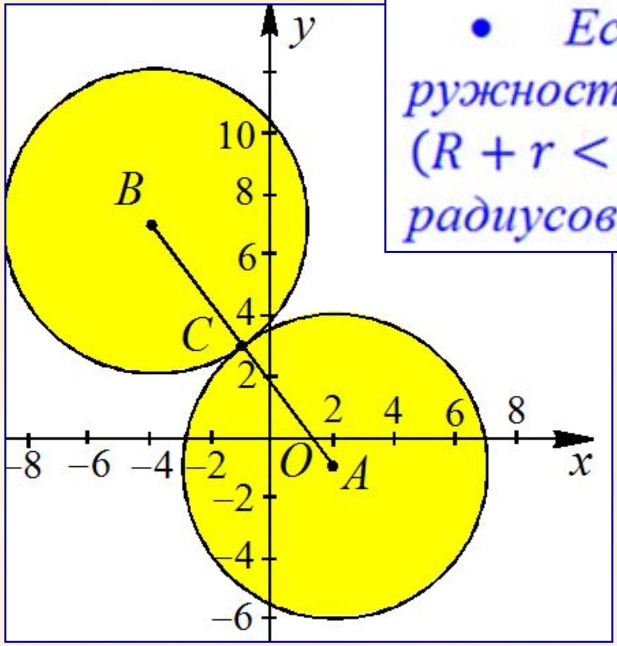
Полученное уравнение является уравнением окружности в системе координат Oxa, а корни данного уравнения равны абсциссам точек пересечения окружности и прямой, параллельной оси абсцисс. Расстояние между этими точками максимально, если они являются концами диаметра окружности, равного 2.

Ответ: 2.

Теоремы о взаимном расположении двух окружностей

Взаимное расположение двух окружностей

- *Расстояние d между центрами касающихся окружностей радиусов R и r ($R \geq r$) равно $R + r$ при внешнем касании и $R - r$ при внутреннем.*
- *Две окружности радиусов R и r ($R \geq r$) пересекаются тогда и только тогда, когда расстояние d между их центрами меньше, чем $r + R$, но больше, чем $R - r$.*
- *Если расстояние d между центрами двух окружностей радиусов R и r ($R > r$) больше суммы ($R + r < d$) или меньше разности ($R - r > d$) их радиусов, то окружности не имеют общих точек.*



Пример. Решить систему неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y \leq 20, \\ x^2 + y^2 + 8x - 14y \leq -40. \end{cases}$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 5^2, \\ (x+4)^2 + (y-7)^2 \leq 5^2. \end{cases}$$

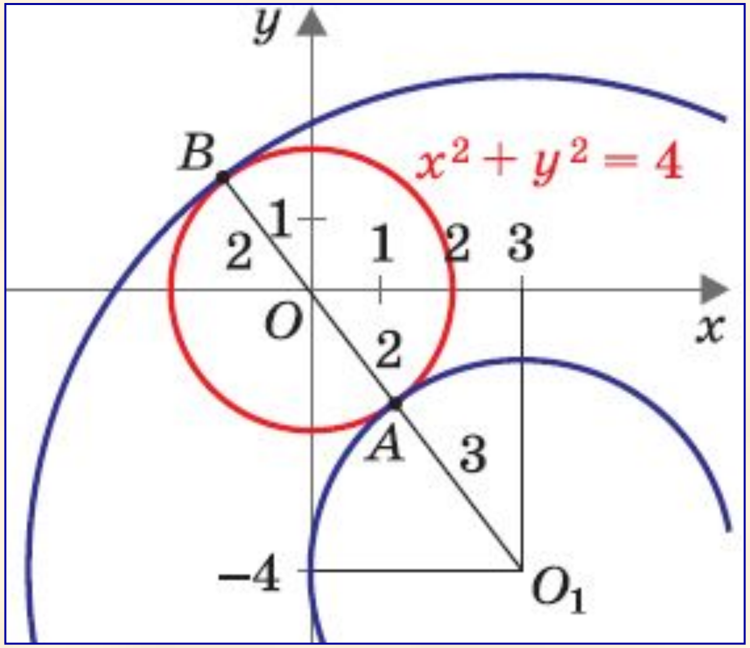
Ответ: $(-1; 3)$.

Соответствие формул и геометрических образов

«Ломоносов-2008»

Пример. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ (x-3)^2+(y+4)^2=a \end{cases}$$
имеет единственное решение.

Р е ш е н и е. Возникают два случая: случай внешнего касания, то есть когда сумма длин радиусов окружностей равна длине линии центров и случай внутреннего касания, когда длина линии центров равна модулю разности длин радиусов. Поэтому, искомые значения параметров задаются системой:
$$\begin{cases} a>0 \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{a}+2=5 \\ |\sqrt{a}-2|=5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{a}=3 \\ \sqrt{a}=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=9 \\ a=49. \end{array}\right.$$



Ответ: $a=9$, $a=49$.

Соответствие формул и геометрических образов

Пример (ЕГЭ-2012). Найдите все значения параметра, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \le -a^2 + 2a(x - y + 1) \\ x^2 + y^2 - 1 \le 3a^2 - 2a(2x - 3y + 4) \end{cases}$$

имеет единственное решение.

ФИПИ

Решение. Записав неравенства системы в виде, получим:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y+a)^2 \le (a+1)^2 \\ (x+2a)^2 + (y-3a)^2 \le (4a-1)^2. \end{cases}$$

Найдем все значения параметра, при каждом из которых происходит внешнее касание кругов, то есть когда

$$R_1 + R_2 = d \, |a+1| + |4a-1| = |5a| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(4a-1) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \le -1 \\ a \ge \dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty\ -1] \cup \left[\dfrac{1}{4};+\infty\right)$.

Соответствие формул и геометрических образов

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №7-8 (755)
июль–август 2014
С. ШЕСТАКОВ
isser@yandex.ru

Пример. Найти все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases}(x+2a-1)^2+(y+5a-2)^2=4,\\(x-3a+1)^2+(y-6a+5)^2=9.\end{cases}$$

Решение. На геометрическом языке условие задачи означает, что требуется найти все значения параметра a, при каждом из которых окружность с центром в точке $(-2a+1; -5a+2)$ и радиусом 2 касается окружности с центром в точке $(3a-1; 6a-5)$ и радиусом 3. Это возможно в том и только том случае, если расстояние между центрами окружностей равно сумме радиусов (внешнее касание) или разности радиусов (внутреннее касание). Таким образом, получаем два уравнения: $\sqrt{(5a-2)^2+(11a-7)^2}=5$, $\sqrt{(5a-2)^2+(11a-7)^2}=1$.

Корнями первого уравнения являются числа $\frac{14}{73}$ и 1, а второе уравнение не имеет корней.

Ответ: $\frac{14}{73}$; 1.

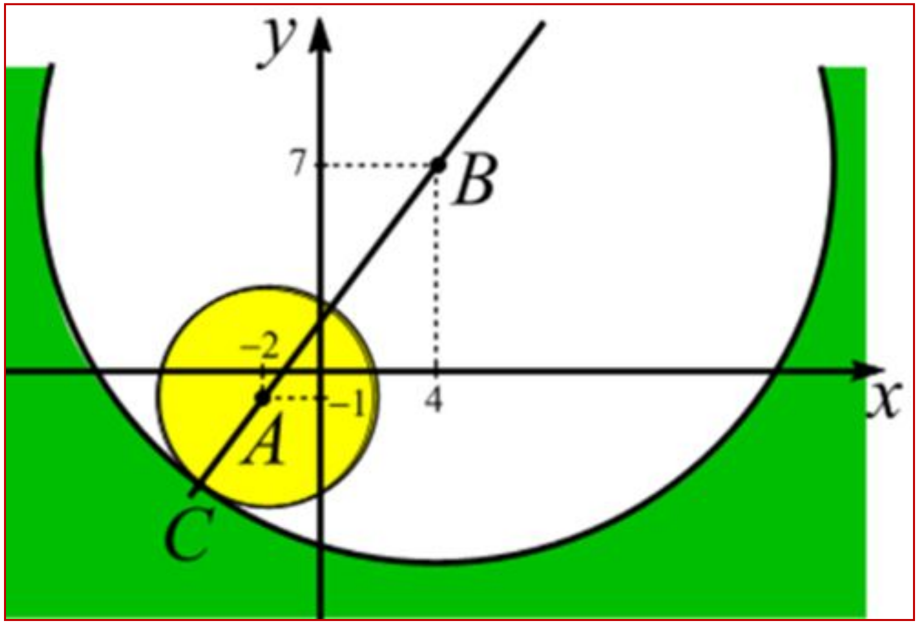
Круги с изменяющимися радиусами

Пример. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2+4x+2y\le a^2-5, \\ x^2+y^2-8x-14y\ge 4a^2+12a-56 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение. Данную систему можно записать следующим образом:



$$\begin{cases} (x+2)^2+(y+1)^2\le a^2, \\ (x-4)^2+(y-7)^2\ge (2a+3)^2. \end{cases}$$

При $a=0$ получаем систему

$$\begin{cases} (x+2)^2+(y+1)^2\le 0, \\ (x-4)^2+(y-7)^2\ge 3^2, \end{cases}$$

имеющую единственное решение $(-2;-1)$.

При $a\ne 0$ система имеет единственное решение в случае, если круг с центром в точке A содержится внутри круга с центром в точке B и касается его границы, то есть: $|a|+10=|2a+3|$.

Ответ: $-13; 0; 7$

Соответствие формул и геометрических образов.

ФИПИ

Пример. Найти все действительные значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a+\sqrt{6x-x^2-8}=3+\sqrt{1+2ax-a^2-x^2}$ имеет ровно одно решение.

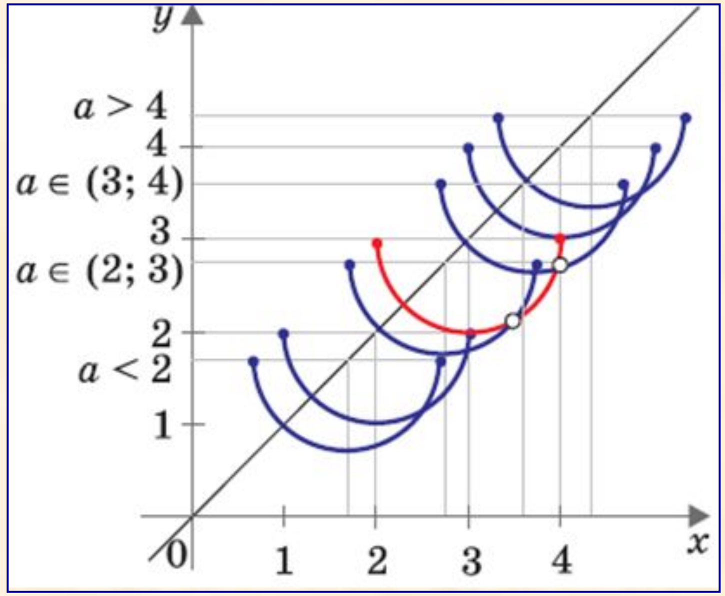
Решение. Перепишем данное уравнение в следующем виде: $3-\sqrt{1-(x-3)^2}=a-\sqrt{1-(x-a)^2}$.

Построим на координатной плоскости Oxy графики функций $y=3-\sqrt{1-(x-3)^2}$ и $y=a-\sqrt{1-(x-a)^2}$. Так как

$$y=3-\sqrt{1-(x-3)^2} \Leftrightarrow \sqrt{1-(x-3)^2}=3-y \Leftrightarrow \begin{cases} y\le 3, \\ (x-3)^2+(y-3)^2=1, \end{cases}$$

$$y=a-\sqrt{1-(x-a)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y\le a, \\ (x-a)^2+(y-a)^2=1, \end{cases}$$

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда полуокружности, пересекаются ровно в одной точке.



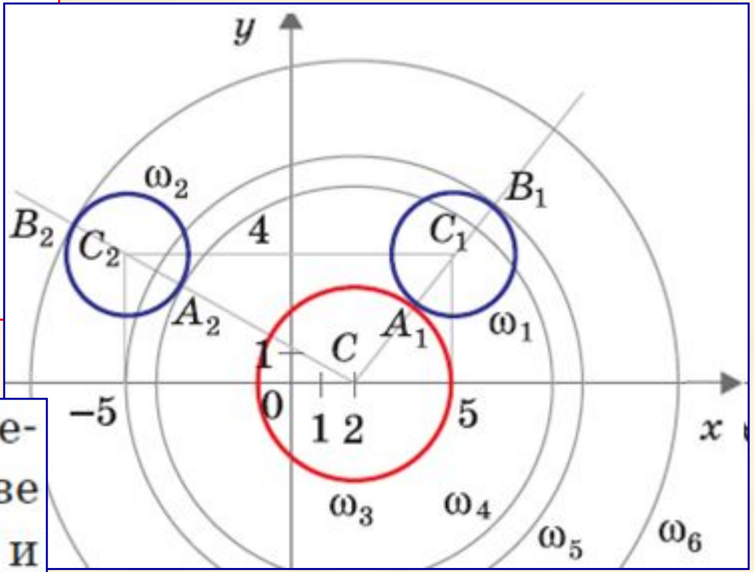
Ответ: $a\in[2;3)\cup(3;4]$.

Соответствие формул и геометрических образов

Пример. Найти все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-5)^2+(y-4)^2=4, \\ (x-2)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.



Решение. Первое уравнение данной системы задает на координатной плоскости Oxy две окружности радиуса 2 с центрами $C_1(5;\ 4)$ и $C_2(-5;\ 4)$. Обозначим эти окружности через ω_1 и ω_2 соответственно. При положительном значении параметра a второе уравнение системы задает окружность радиуса a с центром в точке $C(2;0)$. Для того чтобы исходная система имела единственное решение, необходимо, чтобы последняя окружность касалась одной из окружностей ω_1 и ω_2. Обозначим такие окружности (а их всего четыре) через ω_3, ω_4, ω_5 и ω_6 (в порядке возрастания их радиусов) и найдем эти радиусы.

$CC_1=5,\ CC_2=\sqrt{65},$

$3<\sqrt{65}-2<7<\sqrt{65}+2.$

ФИПИ

Ответ: $a=3,\ a=\sqrt{65}+2.$

Использование уравнения сферы

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения

$$(a-d)^2+(b+p)^2+(c-q)^2,$$

если числа a, b, c, d, p, q таковы, что $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=9, \\ d^2+p^2+q^2=16. \end{cases}$

Решение. Переведем условие задачи на язык расстояний: выражение $(a-d)^2+(b+p)^2+(c-q)^2$ представляет собой квадрат расстояния между точками $(a;\, b;\, c)$ и $(d;\, -p;\, q)$, первая из которых лежит на сфере с центром в начале координат и радиусом 3, вторая — на сфере с тем же центром и радиусом 4. Наибольшее расстояние между точками этих сфер равно сумме радиусов, то есть 7, а наименьшее расстояние равно разности радиусов, то есть 1. Поэтому искомые значения равны 49 и 1. Значение 49 достигается, например, при $a=d=c=q=0$, $b=3$, $p=4$. Значение 1 достигается, например, при $a=d=c=q=0$, $b=3$, $p=-4$.

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №7-8 (755)
С. ШЕСТАКОВ
isser@yandex.ru
июль–август 2014

Ответ: 49; 1.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1 Найти все значения параметра t, при которых система уравнений $\begin{cases}(x-1-4t)^2+(y-1-3t)^2=9t^2,\\(x-5)^2+(y-3)^2=4\end{cases}$ имеет единственное решение.

Ответ: $t=1,\ t=\frac{7\pm\sqrt{33}}{4}$.

Задача 2 (МИОО, 2010). Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}y=\sqrt{12+4x-x^2}+2,\\y=\sqrt{16-a^2+2ax-x^2}+a\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $[-2;2)\cup(2;6]$.

Задача 3 Найти все положительные значения a, при каждом из которых система

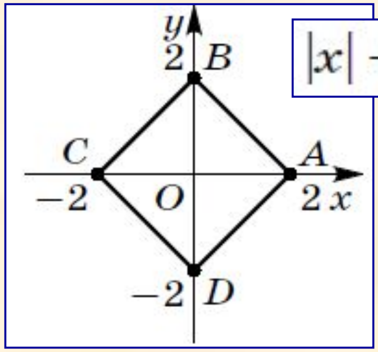
$$\begin{cases}(|x|-5)^2+(y-4)^2=4,\\(x-2)^2+y^2=a^2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $-\sqrt{193}-2;\ -11;\ 11;\ \sqrt{193}+2$.

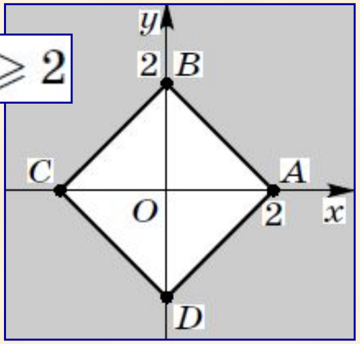
Соответствие формул и геометрических образов

5	$\lvert x-a\rvert + \lvert y-b\rvert = c,\ \ c>0$	Контур квадрата с центром в точке $M(a;\, b)$, диагоналями, параллельными осям координат
5.1	$\lvert x-a\rvert + \lvert y-b\rvert \le c,\ \ c>0$	Квадрат с центром в точке $M(a;\, b)$, диагоналями, параллельными осям координат
5.2	$\lvert a_1x+b_1x+c_1\rvert + \lvert a_2x+b_2x+c_2\rvert = d,$ $d>0,\ \ a_1b_2-a_2b_1\ne 0$	Контур параллелограмм, диагонали которого лежат на прямых, задаваемых подмодульными выражениями, центр которого – точка пересечения этих прямых
5.3	$\lvert a_1x+b_1x+c_1\rvert + \lvert a_2x+b_2x+c_2\rvert \le d,$ $d>0,\ \ a_1b_2-a_2b_1\ne 0$	Параллелограмм, диагонали которого лежат на прямых, задаваемых подмодульными выражениями, центр которого – точка пересечения этих прямых



$|x|+|y|=2$

$|x|+|y|\geqslant 2$



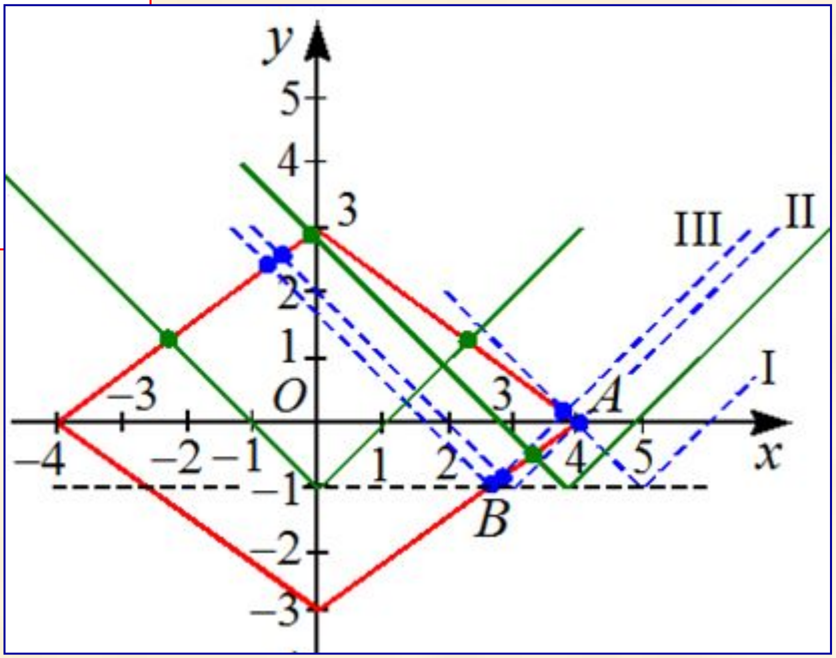
Соответствие формул и геометрических образов

Уравнение $\dfrac{|x-a|}{k}+\dfrac{|y-a|}{l}=1$, где $k>0$, $l>0$, задает на координатной плоскости семейство ромбов с центрами (a,a), расположенными на прямой $y=x$, диагоналями $d_1=2k$ и $d_2=2l$, параллельными соответственно осям Ox и Oy.

Пример. *Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений*

$$\begin{cases} 3|x|+4|y|=12, \\ y=|x-a|-1 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.



I. $a=5$.

II. $a=3$.

III. $a=\dfrac{8}{3}<3$.

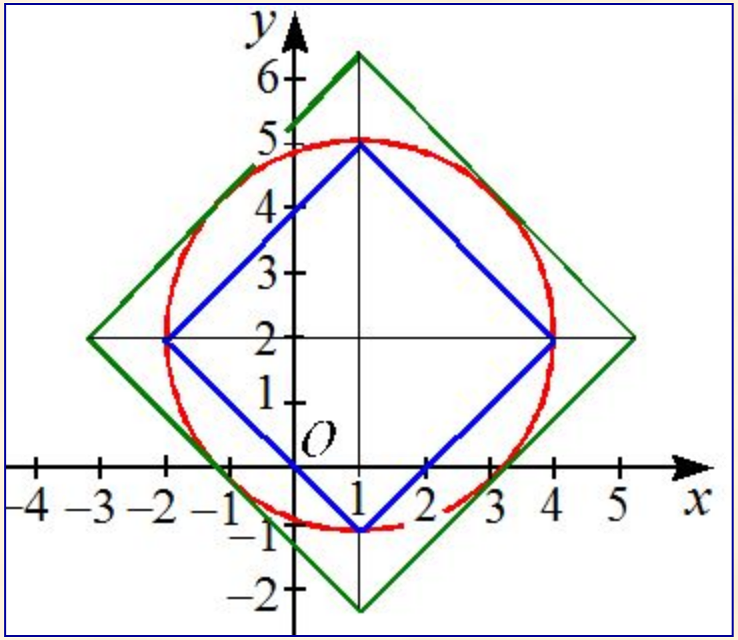
Ответ. $(-5;-3)\cup\left(-\dfrac{8}{3};\dfrac{8}{3}\right)\cup(3;5)$.

Соответствие формул и геометрических образов

Пример. *В зависимости от значений a найти число решений системы уравнений* $\begin{cases} a|x-1|+a|y-2|=1, \\ x^2+y^2=2x+4y+4. \end{cases}$

Решение. $\begin{cases} |x-1|+|y-2|=\dfrac{1}{a}, & (1) \\ (x-1)^2+(y-2)^2=9. & (2) \end{cases}$

(1) – квадрат с центром (1; 2);
(2) – окружность радиуса 3 с центром (1; 2).



Ответ. При $a \in \left\{\dfrac{1}{3\sqrt{2}}; \dfrac{1}{3}\right\}$ четыре решения;

при $a \in \left(\dfrac{1}{3\sqrt{2}}; \dfrac{1}{3}\right)$ восемь решений;

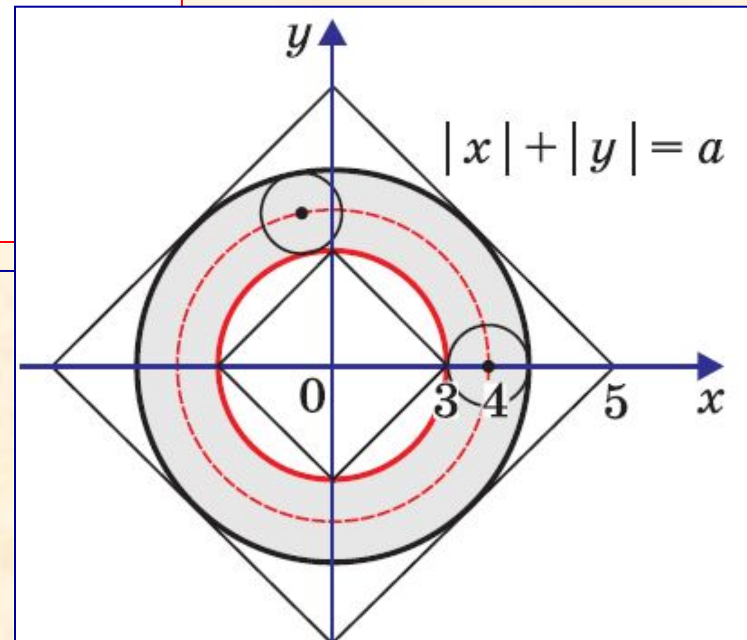
при $a \in \left(-\infty; \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$ нет решений.

Соответствие формул и геометрических образов

Пример. Найти все значения параметра a, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение $(x;\ y;\ z)$ система уравнений

$$\begin{cases}(x-4\sin z)^2+(y+4\cos z)^2=1,\\ |x|+|y|=a.\end{cases}$$

Решение. При любом действительном значении z первое уравнение данной системы является уравнением окружности ω плоскости Oxy с радиусом, равным 1, и центром в точке $(x_0;\ y_0)$, где $x_0=4\sin z$, $y_0=-4\cos z$. Поскольку $x_0^2+y_0^2=16$, центр окружности ω в свою очередь лежит на окружности с центром в начале координат и радиусом 4. Таким образом, множеством всех точек $(x;\ y)$ плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют первому уравнению данной системы, является кольцо, заключенное между двумя концентрическими окружностями (включая сами эти окружности), с центром в начале координат и радиусами 3 и 5.



МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №7-8 (755)

С. ШЕСТАКОВ
isser@yandex.ru

июль–август 2014

Ответ: $\left[3;\ 5\sqrt{2}\right]$.

Соответствие формул и геометрических образов

6	$y = ax^2 + bx + c, \ \ a \neq 0$	Парабола с вершиной в точке $M\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ с ветвями, направленными вверх, если $a > 0$ или вниз, если $a < 0$
6.1	$y > ax^2 + bx + c, \ \ y < ax^2 + bx + c,$ $a \neq 0$	Части координатной плоскости, границей которых служит парабола
7	$y = \frac{k}{x}, \ \ k \neq 0$	Гипербола с вертикальной асимптотой $x = 0$, ветви которой расположены в 1 и 3 координатных четвертях, если $k > 0$, или во 2 и 4 четвертях, если $k < 0$.
7.1	$xy = k, \ \ k \neq 0$	Гипербола, ветви которой расположены в 1 и 3 координатных четвертях, если $k > 0$, или во 2 и 4 четвертях, если $k < 0$.

Соответствие формул и геометрических образов

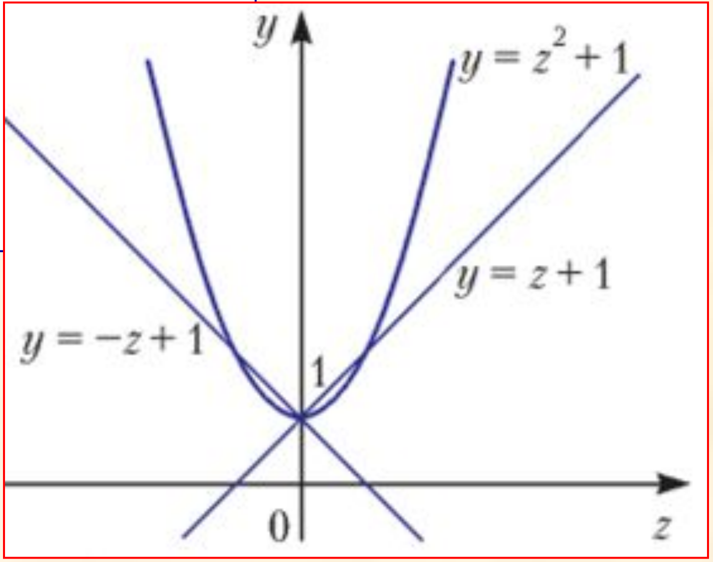
Пример. *Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение*

$$|y - x^2 + 4x - 5| + |y^2 - x^2 + 4x - 2ay + a^2 - 4| = 0$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Введя новую переменную $z = x - 2$ и преобразовав уравнение к виду $|y - 1 - z^2| + |(y-a)^2 - z^2| = 0$, запишем равносильную систему $\begin{cases} y = z^2 + 1, \\ y = \pm z + a. \end{cases}$



Первое уравнение в системе координат zOy задает параболу с вершиной $(0; 1)$, а второе – «косой крест», состоящий из двух перпендикуляр – ных прямых, пересекающихся в точке $(0; a)$ (рис).

Очевидно, три общие точки парабола и крест имеют, только если центр креста совпадает вершиной параболы. Значит, $a = 1$.

Ответ: $a = 1$.

Окружность с изменяющимся радиусом

4. Найдите все значения $a > 0$, при каждом из которых из неравенства

$$x^2 + y^2 \le a$$

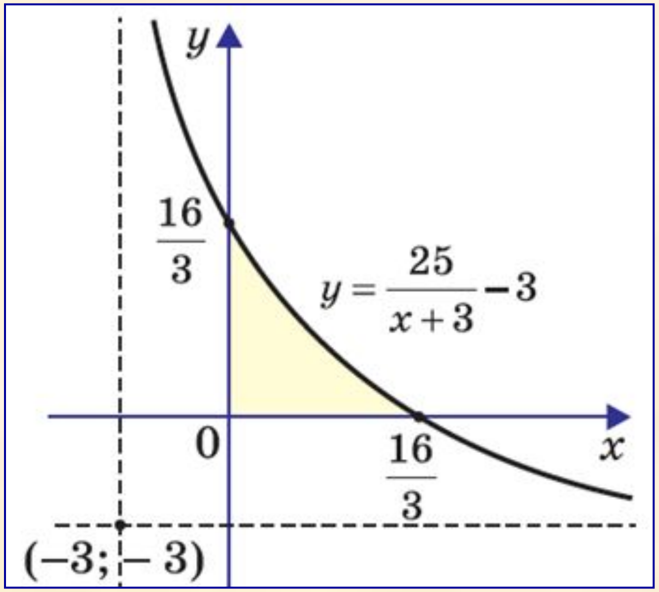
следует неравенство

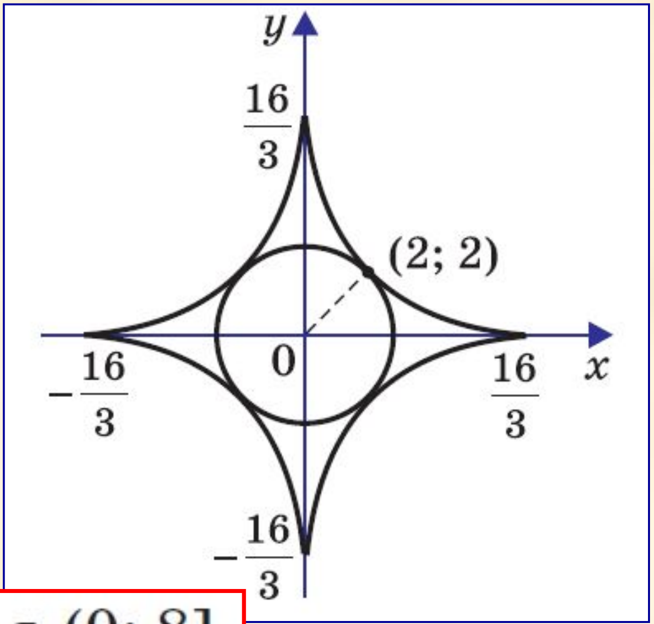
$$(|x| + 3)(|y| + 3) \le 25.$$

Решение. Согласно условию задачи, нужно найти такие значения параметра $a > 0$, при которых множество решений первого неравенства является подмножеством решений второго неравенства. Решением первого неравенства являются точки круга с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{a}$.

Множества решений каждого неравенства симметричны относительно координатных осей и прямой $y = x$. Действительно, если $(x; y)$ — решение, то $(-x; y)$, $(x; -y)$, $(-x; -y)$, $(y; x)$ тоже решения. Поэтому достаточно рассмотреть случай $x \ge 0$, $y \ge 0$. Тогда $|x| = x$, $|y| = y$ и второе неравенство примет вид:

$$y \le \frac{25}{x+3} - 3.$$





Ответ: $a \in (0; 8]$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1 Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2xy - ax - 2ay + a^2 - 2 = 0, \\ 4x^2 + 4y^2 - 8ax - 4ay - 7a^2 - 20a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a = \frac{1}{3}$, $a = -2$.

2 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3xy - 3ax + ay - a^2 - 3 = 0, \\ 9x^2 + 9y^2 + 6ax - 18ay + a^2 - 9a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a = 1$, $a = -2$.

Соответствие формул и геометрических образов

8	$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$	Величина, задающая расстояние от некоторой точки $M(x;\ y)$ до точки $N(a;\ b)$
8.1	$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}+$ $+\sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}=$ $=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$	Отрезок прямой NM с концами в точках $N(a;\ b)$ и $M(c;\ d)$
8.2	$\pm\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\mp$ $\mp\sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}=$ $=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$	Лучи прямой NM, выходящие из точек M и N, не содержащие отрезок NM.

Неравенство треугольника, уравнение отрезка

Пусть даны три точки плоскости $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$. По формуле

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$\rho(B, C) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \text{ и}$$

$$\rho(A, C) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}.$$

Для сторон треугольника выполняется соотношение, называемое *неравенством треугольника*:

$$\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C).$$

Уравнение отрезка в радикалах

Дадим геометрическую интерпретацию следующему уравнению:

$$\boxed{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},} \quad *$$

где x_1, x_2, y_1, y_2 – заданные числа, $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$ одновременно.

Для этого рассмотрим в некоторой прямоугольной системе координат Oxy точки $M(x; y)$, $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Тогда каждое выражение, входящее в формулу,

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}, \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$

$$\text{и} \quad \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

можно интерпретировать как расстояние между точками M и A, M и B, A и B соответственно.

Из неравенства треугольника имеем $AM + MB \geq AB$. Соответственно равенство $AM + MB = AB$ выполняется тогда и только тогда, когда точка M принадлежит отрезку AB. Следовательно, этому уравнению удовлетворяют координаты всех точек отрезка AB. Поэтому уравнение (*) можно условно назвать «*уравнением отрезка в радикалах*».

Для самостоятельной работы

БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ

Г. З. Генкин **Геометрические решения негеометрических задач**

«Просвещение»
2007

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-10)^2 + (y-5)^2} = 10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + 3y = 17 \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-7)^2} + \sqrt{(x-7)^2 + (y+1)^2} = 10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x + 3y = 14 \\ \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2} = 5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x + 2y = 11 \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2} = 5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ \sqrt{(x-4)^2 + (y+7)^2} + \sqrt{(x-10)^2 + (y-1)^2} = 10; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 4x + 3y = 33 \\ \sqrt{(x-5)^2 + (y+4)^2} + \sqrt{(x-7)^2 + (y-10)^2} = 10\sqrt{2} \end{cases}$

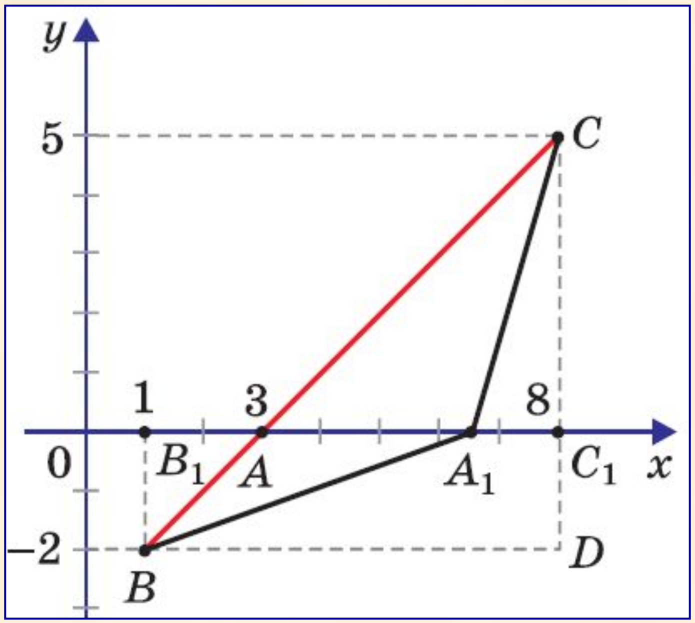
Применение уравнения отрезка в радикалах

Пример. Найти наименьшее значение функции

$$y=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-16x+89}.$$

Решение: выделим полные квадраты в подкоренных выражениях:

$$y=\sqrt{(x-1)^2+4}+\sqrt{(x-8)^2+25}.$$



Каждое из слагаемых правой части последнего равенства представляет собой расстояние от точки $A(x;\ 0)$ оси абсцисс до некоторой точки с фиксированными координатами, не зависящими от переменной x. Таким образом, решить задачу значит найти такую точку A оси абсцисс, сумма расстояний от которой до двух данных точек минимальна.

Выберем знаки ординат точек B и C так, чтобы эти точки оказались лежащими по разные стороны от оси абсцисс: $B(1;\ -2)$ и $C(8;\ 5)$. Найти уравнение прямой BC не представляет труда (это можно сделать разными способами): $y = x - 3$. Тогда абсцисса точки A равна 3, а искомый минимум равен

$$\sqrt{(3-1)^2+4}+\sqrt{(3-8)^2+25}=7\sqrt{2}.$$

Ответ: $7\sqrt{2}$.

Применение уравнения отрезка в радикалах

Замечание . В задачах на вычисление наибольшего или наименьшего значения функции обязательным является указание точки, в которой это значение достигается. Связано это с тем, что в таких задачах часто используется условие обращения некоторого нестрогого неравенства в равенство, что возможно далеко не всегда. И хотя в ответ записывается именно наибольшее или наименьшее значение функции, тем не менее без обоснования того, что это значение достигается, решение не может быть признано полным и засчитано. Для такого обоснования в большинстве случаев достаточно найти точку, в которой это значение достигается, что и было сделано при решении примера .

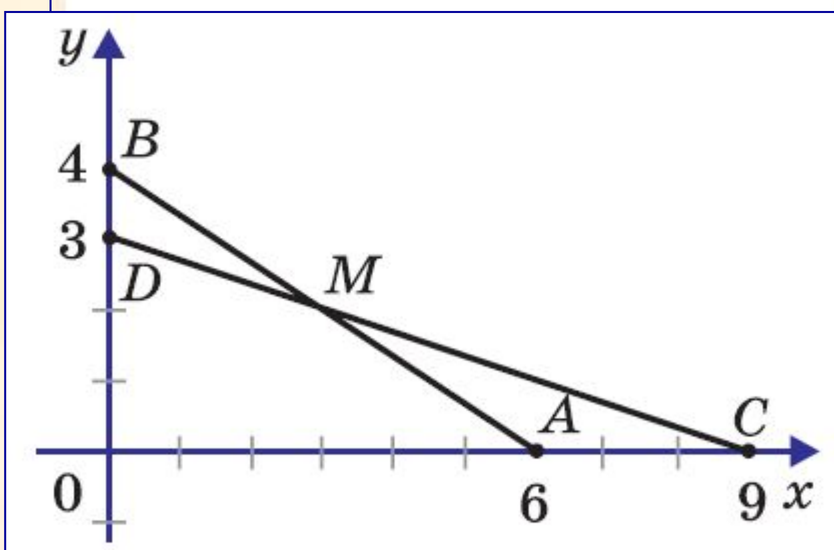
Применение уравнения отрезка в радикалах

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{(x-6)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-4)^2}=2\sqrt{13},\\ \sqrt{(x-9)^2+y^2}-\sqrt{x^2+(y-3)^2}=3\sqrt{10}.\end{cases}$$

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №7-8 (755)
С. ШЕСТАКОВ
isser@yandex.ru
июль–август 2014

Решение. Рассмотрим на координатной плоскости Oxy точки $A(6;\,0)$, $B(0;\,4)$, $C(9;\,0)$, $D(0;\,3)$.
Решить систему означает найти все точки $M(x;\,y)$, для каждой из которых $MA+MB=2\sqrt{13}$, $MC+MD=3\sqrt{10}$.
Но $AB=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$, $CD=\sqrt{9^2+3^2}=3\sqrt{10}$.
Поэтому точку M можно найти как точку пересечения отрезков AB и CD.



$y=-\dfrac{2}{3}x+4$ — уравнение прямой AB;

$y=-\dfrac{1}{3}x+3$ — уравнение прямой CD.

$-\dfrac{2}{3}x+4=-\dfrac{1}{3}x+3$, откуда $x=3$.

$y=-\dfrac{2}{3}\cdot 3+4=2.$

Ответ: $(3;\,2)$.

Применение уравнения отрезка в радикалах

Пример. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+64+16x}+\sqrt{x^2+y^2+36-12y}=10, \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

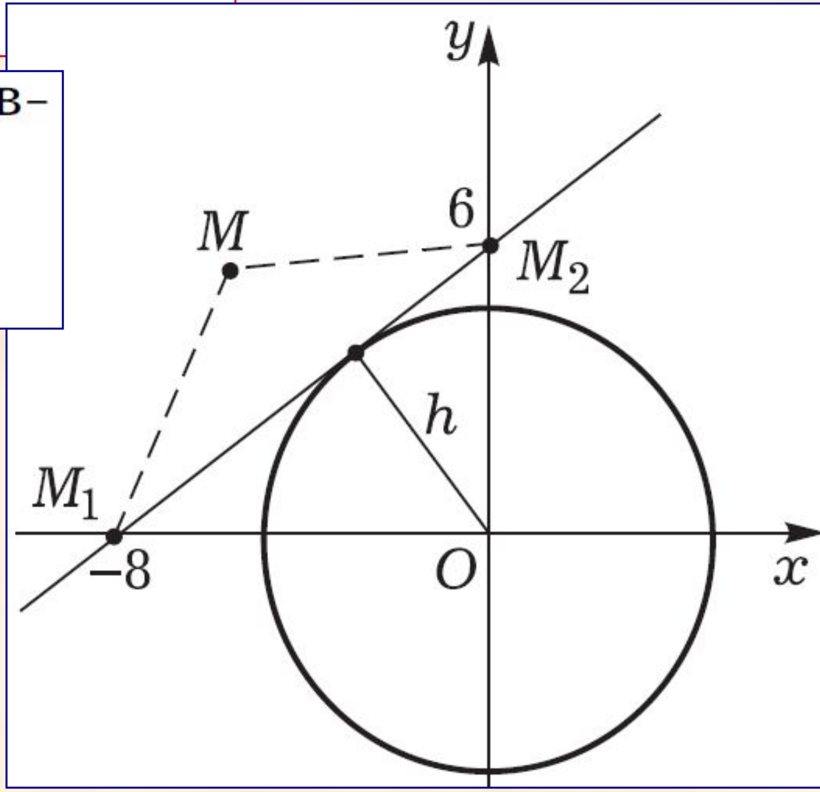
Решение. Запишем первое уравнение системы в виде

$$\sqrt{(x+8)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-6)^2}=10.$$

Условию задачи будет удовлетворять окружность в следующих случаях:

1) окружность касается отрезка M_1M_2; в этом случае $|a|=h=\frac{6\cdot 8}{10}=\frac{24}{5}$;

2) окружность пересекает отрезок M_1M_2 в одной точке; $6<|a|\le 8$.



Ответ. $-8\le a<-6,\ \ a=-\frac{24}{5},\ \ a=\frac{24}{5},\ \ 6<a\le 8.$

Формула расстояния от точки до прямой на плоскости

9	$\dfrac{\lvert ax_0 + by_0 + c\rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$	Расстояние от точки $M(x_0;\, y_0)$ до прямой, заданной уравнением $ax + by = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$

Формулу $\rho(M, l) = \dfrac{|\, ax_0 + by_0 + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (*) легко получить из формулы расстояния от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости α, заданной в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнением $ax + by + cz + d = 0$: $\rho(M, l) = \dfrac{|\, ax_0 + by_0 + cz + d\,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ (**).

Действительно, уравнение

$$ax + by + d = 0$$

задает плоскость α, перпендикулярную плоскости Oxy. Пересекая α плоскостями $z = c$, получаем прямые. При $z = 0$ получаем прямую, заданную на плоскости Oxy уравнением $ax + by + d = 0$. Тогда расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $ax + by + d = 0$ в плоскости Oxy равно расстоянию от точки $M(x_0, y_0, 0)$ до плоскости α, заданной уравнением $ax + by + d = 0$. Отсюда из формулы (**) получаем формулу (*).

Формула расстояния от точки до прямой

Пример ЕГЭ-2010. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases}\sqrt{(x-2a)^2+(y-a)^2} \le \dfrac{|a|}{6\sqrt{5}} \\ x-2y \ge 1\end{cases}$$

имеет решение.

Р е ш е н и е. Ведущей идеей решения задачи является «геометризация» неравенств системы.

Первое неравенство системы задает либо круг с центром в точке $M(2a; a)$, либо точку. В этом случае радиус равен нулю, и координаты точки $(0; 0)$. Второе неравенство системы задает полуплоскость ограниченную прямой $x - 2y - 1 = 0$.

Подставив координаты центра, получим, что $2a - 2a - 1 < 0$ для любого значения параметра a, поэтому центр круга лежит вне полуплоскости, заданной вторым неравенством.

Круг и полуплоскость будут иметь общие точки, координаты которых есть искомые решения, если радиус круга будет не меньше, чем расстояние от центра круга до границы полуплоскости. Следовательно, искомые значения параметра будут задаваться неравенством

$$\frac{|a|}{6\sqrt{5}} \ge \frac{|2a-2a-1|}{\sqrt{5}},$$

решая которое получим:

$$\frac{|a|}{6\sqrt{5}} \ge \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |a| \ge 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \ge 6 \\ a \le -6. \end{array}\right.$$

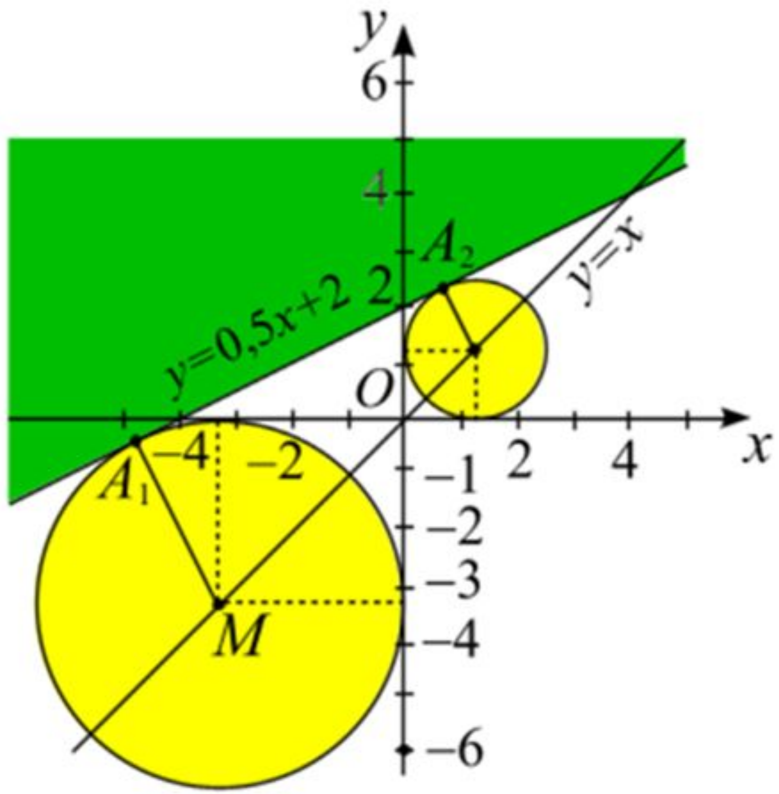
Ответ: $(-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$.

Катится круг

Пример. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-a)^2\le a^2, & (1)\\ 2y-x\ge 4 & (2)\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?



Решение. ГМТ F_1 плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют неравенству (1) системы, есть круг с центром $M(a;a)$ и радиусом $r=|a|$.

ГМТ F_2 плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют неравенству (2) системы, – верхняя полуплоскость с границей $-x+2y-4=0$.

Данная система неравенств будет иметь хотя бы одно решение, если множества F_1 и F_2 будут иметь хотя бы одну общую точку. Далее, применяя формулу расстояния от точки $M(a;a)$ до прямой l, заданной уравнением $-x+2y-4=0$, получим:

$$\rho(M,l)=\frac{|-a+2a-4|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}=|a|.$$

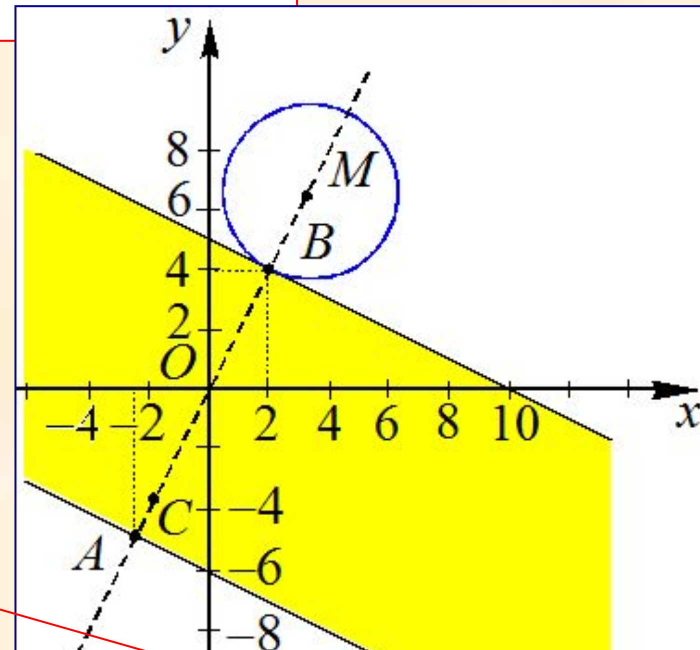
Ответ. $(-\infty;-1-\sqrt{5}]\cup[-1+\sqrt{5};+\infty)$.

Формула расстояния от точки до прямой

Пример. **(МИОО, 2011).** *Найти все значения параметра* a, *при каждом из которых система*

$$\begin{cases} |x+2y+1| \le 11, \\ (x-a)^2+(y-2a)^2 = 2+a \end{cases}$$

имеет единственное решение.



Решение. Первое неравенство задает на плоскости Oxy, полосу с границами-прямыми $x+2y=10$ и $x+2y=-12$.

При $a<-2$ уравнение системы не определено.

При $a=-2$ уравнение $(x+2)^2+(y+4)^2=0$ задает точку $C(-2;-4)$, принадлежащую полосе, так как выполняется неравенство $|-2-8+1| \le 11$.

Расстояние от центра $M(a;2a)$ окружности ω до прямой $x+2y-10=0$ равно радиусу $r=\sqrt{2+a}$. Отсюда $\dfrac{|a+4a-10|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{2+a}$ или $5a^2-21a+18=0$. Тогда $a=1{,}2$ или $a=3$.

Во втором случае уравнение $\dfrac{|a+4a+12|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{2+a}$ не имеет корней.

Ответ. $-2; 3$.

При $a=1{,}2$ точка $M(1{,}2;\,2{,}4)$ лежит внутри полосы, при $a=3$ точка $M(3;\,6)$ лежит вне полосы.

Векторные интерпретации в алгебре

Некоторые алгебраические задачи (уравнения, неравенства, вычисление наибольших и наименьших значений выражений), кажущиеся на первый взгляд довольно сложными, могут быть с успехом решены с помощью средств векторной алгебры, прежде всего неравенств

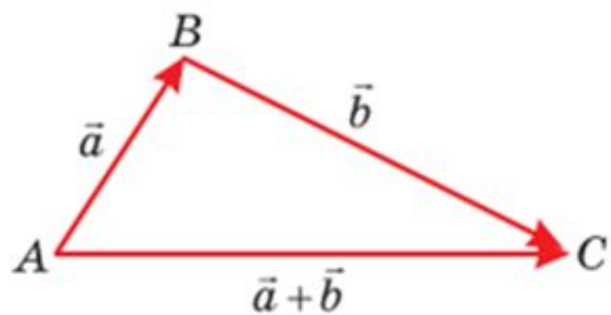
$$|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a}+\vec{b}| \qquad (1)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right) \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|. \qquad (2)$$

и условий обращения этих неравенств в равенства.

Неравенство (1) представляет собой неравенство треугольника

$$AB = |\vec{a}|,\ BC = |\vec{b}|,\ AC = |\vec{a}+\vec{b}|,\ AC \leq AB + BC.$$



Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, то есть когда отношения их соответственных координат равны между собой и равны отношению их длин (модулей).

Векторные интерпретации в алгебре

Пример. Найти наименьшее значение параметра a, при котором имеет хотя бы один корень уравнение

$$\sqrt{x^2-6x+10}+\sqrt{x^2-4x+8}=a.$$

Решение. Решить задачу — значит найти наименьшее значение функции $a=\sqrt{x^2-6x+10}+\sqrt{x^2-4x+8}=\sqrt{(x-3)^2+1}+\sqrt{(x-2)^2+4}$.

Введем векторы $\vec{p}\{3-x;\ 1\}$ и $\vec{q}\{x-2;\ 2\}$. Тогда

$$|\vec{p}|=\sqrt{(x-3)^2+1},\ |\vec{q}|=\sqrt{(x-2)^2+4},$$

вектор $\vec{p}+\vec{q}$ имеет координаты $\{1;\ 3\}$ и $|\vec{p}+\vec{q}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

Поэтому в силу неравенства $|\vec{p}|+|\vec{q}|\geq|\vec{p}+\vec{q}|$ и того, что $a=|\vec{p}|+|\vec{q}|$, получаем $a\geq\sqrt{10}$. Последнее неравенство обращается в равенство, только если векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ сонаправлены.

Но $\vec{p}\uparrow\uparrow\vec{q}$ в том и только том случае, если $\frac{3-x}{x-2}=\frac{1}{2}$. Корнем последнего уравнения является $x=\frac{8}{3}$.

Значит, наименьшее значение функции $a=\sqrt{x^2-6x+10}+\sqrt{x^2-4x+8}$ достигается и равно $\sqrt{10}$.

Ответ: $\sqrt{10}$.

Векторные интерпретации в алгебре

Задача могла быть решена и с использованием формулы отрезка в радикалах (неравенства треугольника).

Замечание. Вводя векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, следует выбирать их координаты таким образом, чтобы координаты вектора $\vec{p}+\vec{q}$ не зависели от переменной x. Кроме того, если квадраты каких-то соответственных координат векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ являются числами, то для того, чтобы было выполнено условие сонаправленности векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$, знаки этих координат должны выбираться одинаковыми. В более сложных случаях, когда любая из координат векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ зависит от переменной, следует наложить ограничения на отношения соответственных координат: эти отношения должны быть положительными.

Векторные интерпретации в алгебре

Пример. Найти наибольшее значение параметра a, при котором имеет хотя бы один корень уравнение

$$x\left(\sqrt{1-9x^2}+3\sqrt{4-x^2}\right)=a.$$

Решение. Рассмотрим функцию $a=x\left(\sqrt{1-9x^2}+3\sqrt{4-x^2}\right)$ с областью определения $D(a)=\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$ и найдем ее наибольшее значение. Введем векторы

$$\vec{p}\left\{x;\sqrt{4-x^2}\right\} \text{ и } \vec{q}\left\{\sqrt{1-9x^2};3x\right\}.$$

Тогда $a=\vec{p}\cdot\vec{q}$, $|\vec{p}|=\sqrt{x^2+4-x^2}=2$, $|\vec{q}|=\sqrt{1-9x^2+9x^2}=1.$

В силу неравенства (2) получаем, что $a\le 2$, причем знак равенства достигается, только если $\vec{p}\uparrow\uparrow\vec{q}$. Заметим, что при $x=0$ векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не являются сонаправленными, поэтому с учетом области определения условие сонаправленности имеет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-9x^2}}{x}=\dfrac{3x}{\sqrt{4-x^2}},\\ 0<x\le\dfrac{1}{3},\end{cases}$$

Тогда $x=\frac{2}{\sqrt{37}}$. Следовательно, наибольшее значение функции $a=x\left(\sqrt{1-9x^2}+3\sqrt{4-x^2}\right)$ достигается при $x=\frac{2}{\sqrt{37}}$ и равно 2.

Ответ: 2.

Векторные интерпретации в алгебре

МАТЕМАТИКА 2015 ЕГЭ С. А. Шестаков ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Замечание. При использовании неравенства (2) векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ следует вводить таким образом, чтобы либо их длины не зависели от переменной, либо отношение длин этих векторов было величиной постоянной. В противном случае из условия сонаправленности извлечь какое-то содержательное уравнение будет затруднительно или невозможно. Кроме того, следует отметить, что если в условии (или в условиях) сонаправленности приходится выполнять деление на выражение, содержащее неизвестную, нужно проверить, не являются ли векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ сонаправленными и в том случае, когда это выражение обращается в нуль. Если этого не сделать, то в некоторых задачах можно просто потерять решение.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти наименьшее значение параметра a, при котором имеет хотя бы один корень уравнение

$$\sqrt{(x-1)^2+(x-6)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(x-2)^2}=a.$$

Ответ: 5.

Задача 2. Найти наибольшее значение параметра a, при котором имеет хотя бы один корень уравнение

$$ax^2=|2x-1|\sqrt{2x-1}+|x-1|\sqrt{4x-1},$$

и указать корни уравнения для этого значения a.

Ответ: $a=2,\ x=\dfrac{1}{2},\ x=\dfrac{5}{2}$.

Задача 3. Найти наименьшее значение выражения

$$z=|x+2y|+\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}.$$

Ответ: $\dfrac{11}{\sqrt{5}}$.

Задача 4. Найти наибольшее значение выражения

$$z=y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{3+2y-2y^2}.$$

Ответ: 2.

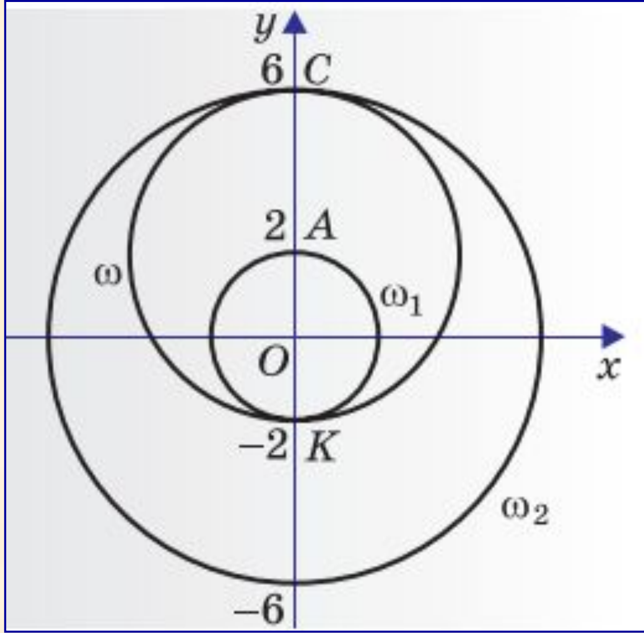
МАТЕМАТИКА 2015 ЕГЭ С. А. Шестаков ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

МАТЕМАТИКА МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №12 (759)

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №12 (759)
декабрь 2014

Е. ПОТОСКУЕВ,
г. Тольятти

При изучении планиметрии учащиеся должны выработать навыки и умения решать планиметрические задачи и координатным методом. Чтобы координаты стали эффективным аппаратом решения геометрических задач, необходимо прежде всего научить учащихся переводить условие геометрической задачи в координатную символику и терминологию (на «координатный язык»), затем грамотно выполнять соответствующие алгебраические операции над координатами, после чего полученный результат переводить вновь на язык элементарной геометрии.



Задача 8. Найдите произведение всех таких значений параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x^2+(y-2)^2=16 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

Решение. Находим: система имеет одно решение при $a = 4$ и при $a = 36$.

Ответ: 144.

Задачи для осмысления

Задача 12. Найдите длину линии пересечения двух сфер:

$$x^2+y^2+z^2-2x+6y-10z-161=0$$

и

$$x^2+y^2+z^2+6x+12y+14z-131=0.$$

Ответ: $25\frac{11}{13}\pi$.

Задача 13. Напишите уравнение плоскости, касающейся поверхности

$$x^2+2x+y^2+2y+z^2-4z=0$$

в точке $M(-2;\,-2;\,4)$.

Ответ: $x+y-2z+12=0$.

Задача 14. В плоскости α, $x+y+2z=0$, найдите все прямые пространства, проходящие через начало координат и касающиеся сферы ω:

$$(x-2)^2+(y-4)^2+z^2=8.$$

Ответ: $\begin{cases} x=t, \\ y=-11t, \\ z=5t \end{cases}$ и $\begin{cases} x=t, \\ y=t, \\ z=-t, \end{cases}$ $t\in \boldsymbol{R}$.

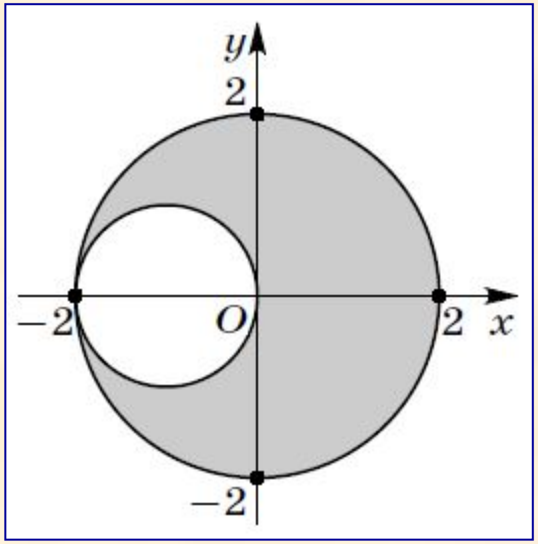
МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №12 (759)
Е. ПОТОСКУЕВ,
г. Тольятти
декабрь
2014

Площадь фигуры (задачи без параметра)

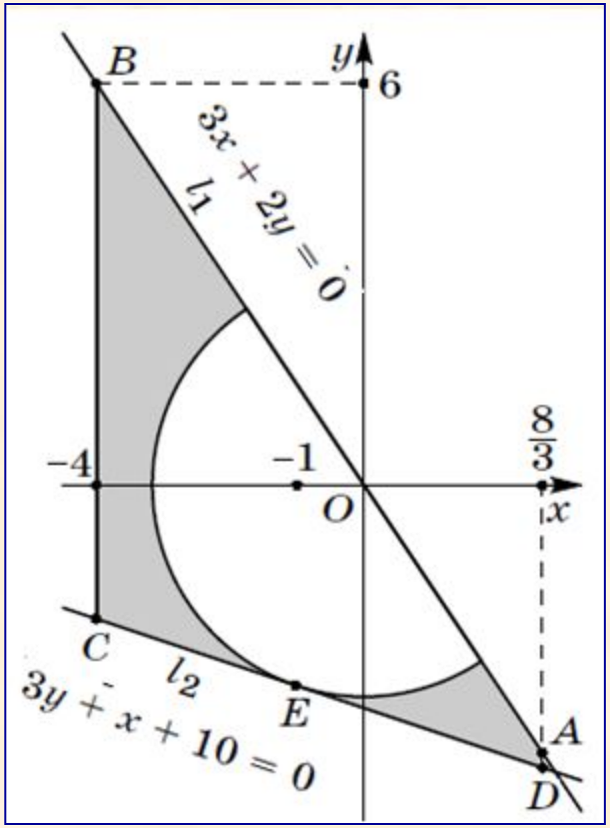
Пример. Изобразить на координатной плоскости Oxy фигуру Φ, заданную системой неравенств, и найти площадь S этой фигуры:

1) $\begin{cases} x^2+y^2<4, \\ (x+1)^2+y^2>1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2 \geqslant 10, \\ 3x^2+4x-32 \leqslant 0, \\ (3x+2y)(3y+x+10) \leqslant 0. \end{cases}$



Ответ: 1) $S=3\pi$.



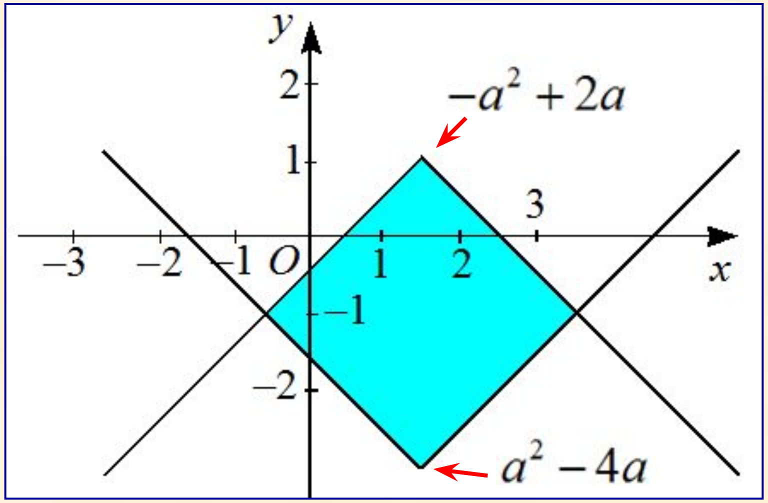
$3x^2+4x-32 \leqslant 0,$

$-4 \leqslant x \leqslant \frac{8}{3}.$

Ответ: 2) $S=\frac{740}{27}-5\pi$.

Площадь фигуры (задачи с параметром)

Пример. *При каких значениях a фигура, задаваемая неравенствами* $\begin{cases} y \ge |x-a| + a^2 - 4a, \\ y \le -|x-a| - a^2 + 2a \end{cases}$ *имеет наибольшую площадь? Найти эту площадь.*



Решение. Первое неравенство задает на координатной плоскости прямой угол с вершиной $(a; a^2-4a)$, второе неравенство – прямой угол с вершиной $(a; -a^2+2a)$. Общая часть (в общем случае квадрат) будет при условии $-a^2+2a \ge a^2-4a$. Отсюда $a \in [0;3]$.

Диагональ квадрата равна $d = |(-a^2+2a)-(a^2-4a)| = |2a^2-6a|$.

Площадь квадрата $S(a) = \frac{1}{2}d^2 = 2(a^2-3a)^2$ на промежутке $[0;3]$ принимает наибольшее значение $\frac{81}{8}$ при $a = \frac{3}{2}$.

Ответ: $a = \frac{3}{2}; S = \frac{81}{8}$.

Площадь фигуры

Пример. Пусть G — треугольник, образуемый при пересечении прямых l_1, l_2, l_3, заданных соответственно уравнениями

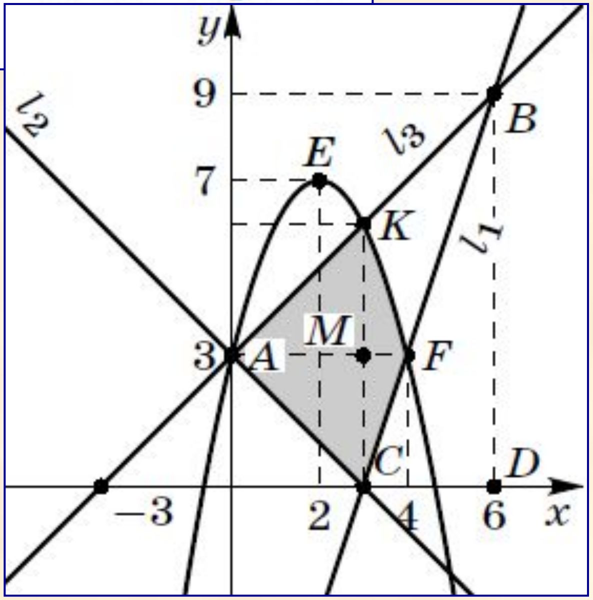
$$y-3x+9=0, \quad x+y-3=0, \quad y-x-3=0,$$

а фигура Ф состоит из точек множества G таких, что неравенство

$$t^2+2t(x-2)+7-y>0$$

выполняется при всех значениях параметра t. Найти площадь фигуры Ф.

Решение. Неравенство $t^2+2t(x-2)+7-y>0$ является верным при всех $t \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда дискриминант квадратного трехчлена в его левой части отрицателен: $(x-2)^2-(7-y)<0$, т. е. $y<7-(x-2)^2$.



Если σ — площадь фигуры Ф, то $\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$, где σ_1 — площадь треугольника ACF, σ_2 — площадь треугольника AKM, где $M(3;3)$ — точка пересечения AF и KC, σ_3 — площадь криволинейного треугольника KMF.

Так как $\sigma_1=\frac{1}{2}4\cdot 3=6$, $\sigma_2=\frac{9}{2}$,

$$\sigma_3=\int_3^4(-x^2+4x)\,dx=\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_3^4=\frac{5}{3}, \text{ то } \sigma=\frac{73}{6}.$$

Ответ: $\frac{73}{6}$.

Шабунин М.И., Прокофьев А.А.

Параметры в геометрических задачах

Задачи с параметрами в геометрии можно сгруппировать в задачи двух типов:

1) по содержанию – на построение, на вычисление;

2) по структуре – на задачи с «алгебраическим» и с «геометрическим» параметром.

«*Алгебраический*» тип задач с параметрами в геометрии по своей сути отличается от алгебраических задач только постановкой вопроса.

Например, при каком значении параметра, являющегося некоторым измерением геометрической фигуры (высота, сторона, угол, площадь, объем и т. д.), другая ее характеристика удовлетворяет некоторому заданному условию (чему-то равна, минимальна или максимальна, находится в заданном интервале).

«*Геометрический*» тип задач с параметрами – это *многовариантные* геометрические задачи.

В обоих случаях значение параметра определяет:

- количество возможных способов решений в зависимости от условия задачи;
- количество возможных решений в зависимости от условия задачи;
- количество решений в зависимости от области определения полученного результата решения задачи.

Применение параметров в геометрии

Для решения текстовых задач на отыскание наибольшего или наименьшего значения следует, исходя из условия задачи, составить функцию, взяв в качестве аргумента один из параметров (остальные выразить через него в соответствии с условиями задачи). Далее следует определить промежуток изменения выбранного аргумента и найти наибольшее или наименьшее значение функции на полученном промежутке.

△ Рассмотрим осевое сечение. Пусть x — 0).
высота цилиндра. Тогда радиус основания цилиндра r равен

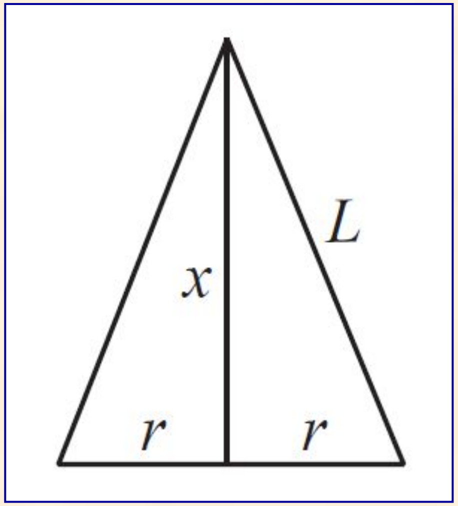
$$r = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - x^2}.$$

Площадь боковой поверхности цилиндра выражается формулой $S = 2\pi rx$ или

$$S(x) = 2\pi x\frac{\sqrt{4R^2 - x^2}}{2}.$$

Вычислим наибольшее значение функции $S(x)$ при условии, что x изменяется от 0 до $2R$. Функция $S(x)$ определена на $[0; 2R]$, дифференцируема на $[0; 2R)$ и $S'(x) = \frac{\pi(4R^2 - 2x^2)}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$. Определим наибольшее значение

функции $S(x)$ на $[0; 2R]$. На концах отрезка $[0; 2R]$ значения функции $S(x)$ равны 0. Производная $S'(x)$ равна 0 при $x = R\sqrt{2}$. Так как $S(R\sqrt{2}) = 2\pi R^2$, то $x = R\sqrt{2}$ — точка локального максимума. ▲



ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТЕРЕОМЕТРИИ

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
декабрь 2012

Л. УЛЯШЕВА,
г. Ухта, Республика Коми

Круг задач, к которым можно приложить параметрический метод:

- нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми;
- нахождение положения общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым;
- нахождение минимума/максимума площади или периметра сечения различных геометрических тел плоскостями и т.д.

Иногда такой подход существенно уменьшает объем расчетов, количество дополнительных построений и чертежей, а это — экономия времени и сил.

Суть метода: вводится параметр, с помощью которого определяется положение точки.

На этот параметр можно смотреть как на время, поэтому метод можно назвать *кинематическим*.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТЕРЕОМЕТРИИ

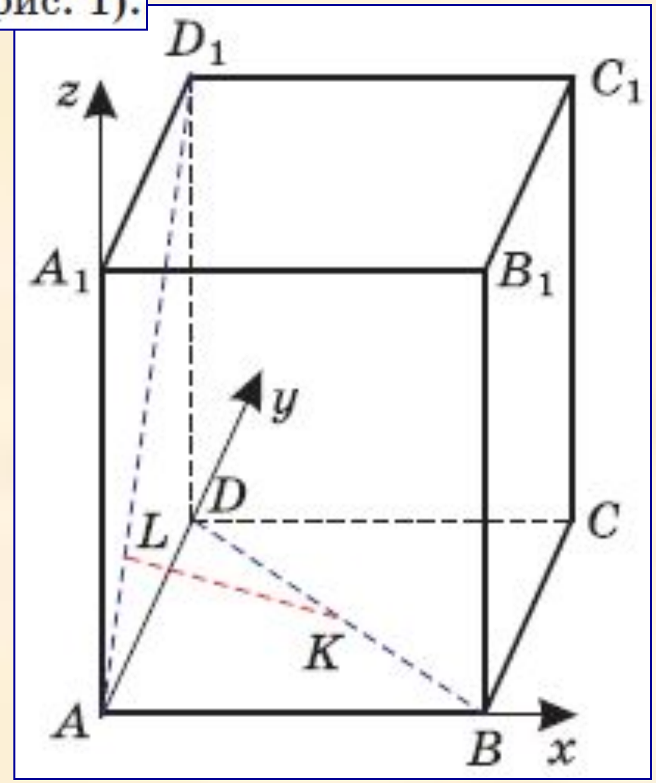
МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
декабрь 2012

Л. УЛЯШЕВА,
г. Ухта, Республика Коми

Пример. В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ $AA_1 = 2$, $AB = 3$, $BC = 4$. Найти расстояние между диагональю BD грани $ABCD$ и диагональю AD_1 грани AA_1D_1D. Установить, в каком отношении общий перпендикуляр к этим прямым делит отрезки BD и AD_1.

Решение. Сделаем чертеж и введем систему координат (рис. 1).

Поместим на отрезках AD_1 и BD соответственно точки L и K. Эти точки могут перемещаться по «своим» отрезкам независимо друг от друга. Пусть точка L в момент времени $t = 0$ находится в точке $A(0; 0; 0)$, а в момент $t = 1$ — в точке $D_1(0; 4; 2)$. В произвольный момент t точка L отрезка AD_1 будет иметь координаты $((0; 0; 0) \cdot (1 - t) + (0; 4; 2) \cdot t)$ или $L(0; 4t; 2t)$. Аналогично получим координаты точки K — $K(3q; 4(1 - q); 0)$ — отрезка BD, где q — время (независимое от t); в момент $q = 0$ точка K находится в точке $D(0; 4; 0)$, в момент $q = 1$ — в точке $B(3; 0; 0)$.



ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТЕРЕОМЕТРИИ

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми — это длина общего перпендикуляра к этим прямым. Найдем длину отрезка LK, когда вектор $\overline{LK}\left(3q;\,-4t+4(1-q);\,-2t\right)$ одновременно перпендикулярен векторам $\overline{AD_1}(0;\,4;\,2)$ и $\overline{BD}(-3;\,4;\,0)$.

Условие перпендикулярности векторов — это равенство нулю скалярного произведения. Для наших векторов имеем:

$$\begin{cases} \overline{LK}\cdot\overline{BD} = -9q-16t+16(1-q) = -25q-16t+16 = 0, \\ \overline{LK}\cdot\overline{AD_1} = -16t+16(1-q)-4t = -20t-16q+16 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $t=\dfrac{36}{61}$, $q=\dfrac{16}{61}$.

Искомое расстояние — это длина вектора LK при найденных значениях t и q:

$$LK^2 = 9\cdot\left(\frac{16}{61}\right)^2 + 16\cdot\left(\frac{9}{61}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{36}{61}\right)^2 = \frac{144}{61},$$

$$LK = \frac{12}{\sqrt{61}} = \frac{12\sqrt{61}}{61}.$$

Искомые отношения — это $AL:LD_1 = t:(1-t) = 36:25$ и $DK:KB = q:(1-q) = 16:45$.

Ответ: $\dfrac{12\sqrt{61}}{61}$; $36:25$, $16:45$.

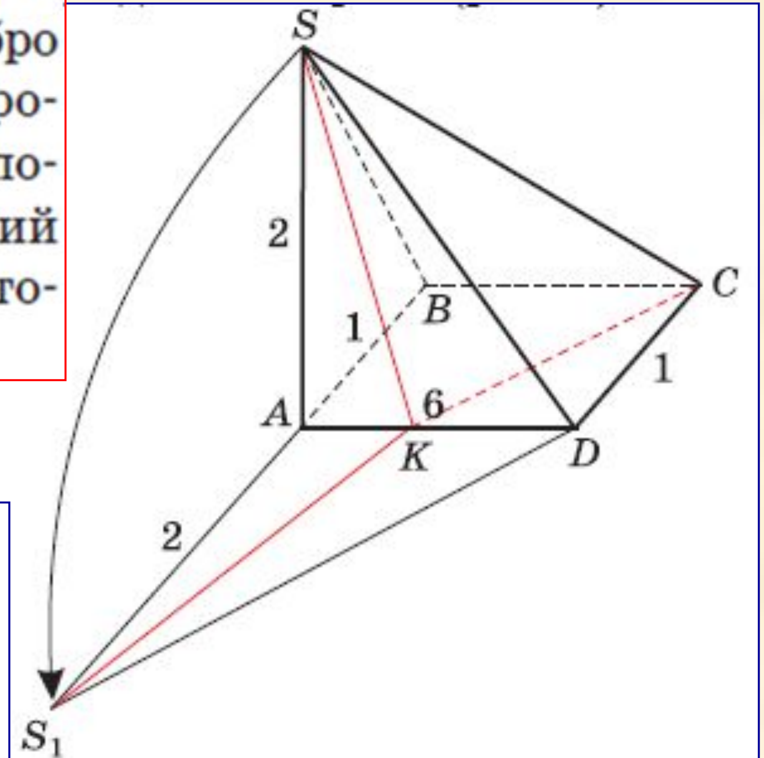
МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
Л. УЛЯШЕВА, декабрь 2012
г. Ухта, Республика Коми

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТЕРЕОМЕТРИИ

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
Л. УЛЯШЕВА, г. Ухта, Республика Коми
декабрь 2012

Пример. Прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 1$ и $AD = 6$ служит основанием пирамиды $SABCD$, у которой ребро $SA = 2$ является высотой. Через самое длинное боковое ребро пирамиды и точку, лежащую на большей стороне основания, проведена плоскость так, что полученное сечение пирамиды имеет наименьший периметр. В каком отношении сечение делит сторону AD? Вычислить площадь сечения.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 4).

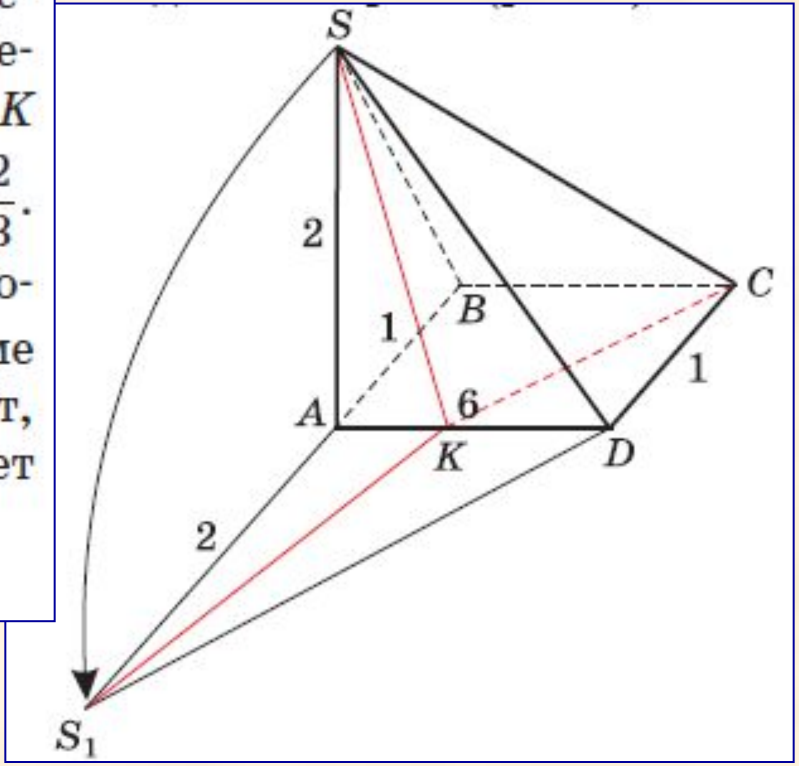


Поместим точку K на AD так, чтобы в начальный момент $t = 0$ K находилась в A, а при $t = 1$ — в точке D; при t от 0 до 1 отклонение от A составит $6t$, а от D — $6(1 - t)$. Периметр сечения KSC будет минимальным при минимальной сумме KS и KC. Повернув треугольник ASD вокруг оси AD на плоскость основания, получим треугольник AS_1D.

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
декабрь 2012

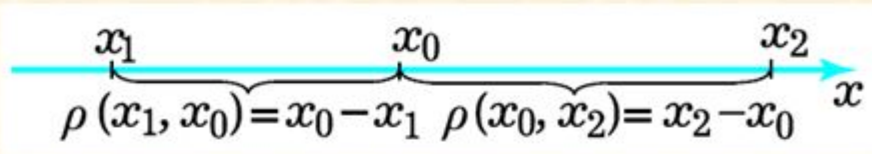
Л. УЛЯШЕВА,
г. Ухта, Республика Коми

При своем движении точка K пройдет через такое положение, когда S_1K будет продолжением KC. В этом положении длина пути из S через точку K в точку C будет минимальной. Отрезок AK найдем из подобия треугольников S_1AK и S_1BC: $AK = 4$. При этом значение t равно $\frac{2}{3}$. $AK : KD = t : (1 - t) = 2 : 3$. Вычислим длины сторон $SC = \sqrt{41}$, $SK = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $KC = \sqrt{5}$ и по теореме косинусов получим: $\cos SKC = -0{,}8$, а значит, его синус равен $0{,}6$. Площадь сечения SKC будет равна $\frac{1}{2} SK \cdot KC \cdot \sin\angle SKC = 3$.



Ответ: 2 : 3; 3.

Параметрические уравнения отрезка



Определение 2. Формула вида

$$x(t) = (1-t)x_1 + tx_2, \quad (3)$$

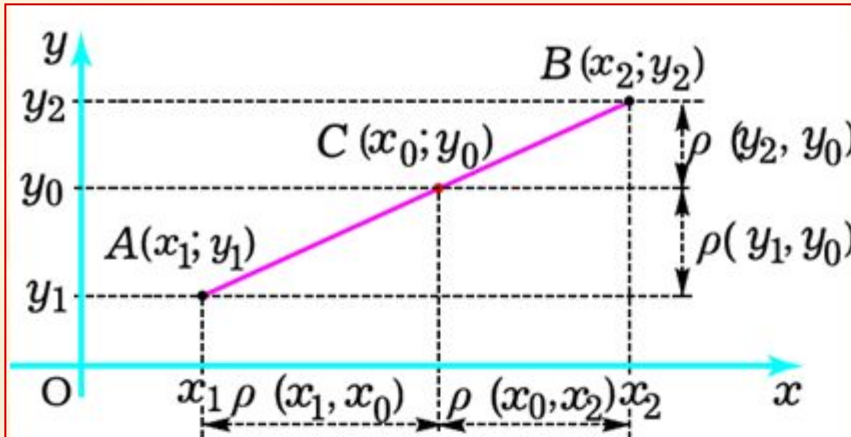
где $0 \le t \le 1$, называется *параметрическим уравнением отрезка* $[x_1; x_2]$ оси Ox.

Пример 2. Отрезок $[-2; 7]$ оси Ox задаётся уравнением

$$x(t) = -2\cdot(1-t) + 7t,$$

где $0 \le t \le 1$. Отсюда можем записать $x(t) = 9t - 2$, где $0 \le t \le 1$.

ПОТЕНЦИАЛ
Прокофьев А.А.
№06, 2014



Определение 4. Пусть $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ – точки на координатной плоскости Oxy. *Параметрическими уравнениями отрезка* AB (на плоскости Oxy) называются формулы вида

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)x_1 + tx_2, \\ y(t) = (1-t)y_1 + ty_2, \\ 0 \le t \le 1. \end{cases} \quad (6)$$

Пример 5. Для точек $A(-2; 3)$, $B(4; -8)$ параметрические уравнения отрезка AB имеют вид:

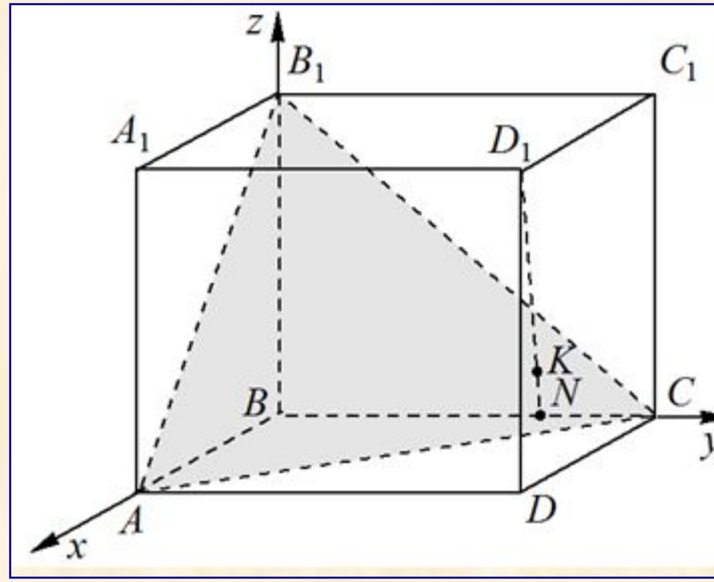
$$\begin{cases} x(t) = -2(1-t) + 4t, \\ y(t) = 3(1-t) - 8t, \\ 0 \le t \le 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = 6t - 2, \\ y(t) = -11t + 3, \\ 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Параметрические уравнения отрезка

Пример. *В прямоугольном параллелепипеде* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *на ребре* BC *взята точка* N *так, что* $BN:NC=2:1$. *В каком отношении плоскость* AB_1C *делит отрезок* ND_1, *если* $AB=3$, $BC=6$, $AA_1=5$?

Решение. Введём прямоугольную систему координат с началом в точке B и осями Ox, Oy, Oz, направленными вдоль ребер BA, BC и BB_1 соответственно (рис.). Тогда точки N, D_1, A, B_1, C имеют координаты: $N(0;4;0)$, $D_1(3;6;5)$, $A(3;0;0)$, $B_1(0;0;5)$, $C(0;6;0)$. Запишем уравнение отрезка ND_1:

$$\begin{cases} x(t)=3t, \\ y(t)=4+2t, \quad 0\le t\le 1. \\ z(t)=5t, \end{cases}$$



МАТЕМАТИКА для школьников 4 2014
Прокофьев А.А., Соколова Т.В.

Уравнение плоскости AB_1C в отрезках имеет вид: $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{5}=1$. Подставив в него $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, найдём значение параметра t для точки K пересечения отрезка ND_1 с плоскостью AB_1C: $\frac{3t}{3}+\frac{4+2t}{6}+\frac{5t}{5}=1$, $t=\frac{1}{7}$. Значит, плоскость AB_1C делит отрезок ND_1 в отношении $NK:KD_1=1:6$.

Ответ: 1:6, считая от точки N.

Классификация задач, решаемых функционально-графическими методами

1. К первому типу отнесем задачи, в условии которых спрашивается о количестве решений уравнения или системы уравнений в зависимости от значения параметра.
2. Ко второму типу отнесем задачи, в условии которых спрашивается о необходимости нахождения значений параметра, при которых задача имеет заданное количество решений (единственное, *k* решений, бесконечно много).
3. Третий тип представляют задачи, в которых необходимо получить решение для всех значений параметра или для значений параметра из заданного промежутка.
4. Четвертый тип представляют задач, в которых необходимо найти значения параметра, при которых множество решений удовлетворяет заданным условиям.

Печатные и электронные ресурсы

Школьные учебники.

Пособия для подготовки к ЕГЭ по математике.

Журналы «Математика в школе», «Математика для школьников»,

«Математика», «Потенциал»

Сайты: alexlarin.net, abiturient.ru (МИЭТ),

mathus.ru/math/ , reshuege.ru,

ege-ok.ru/category/zadachi-s-parametrom/

Контакты

Спасибо за внимание!

aaprokof@yandex.ru

05.12.14