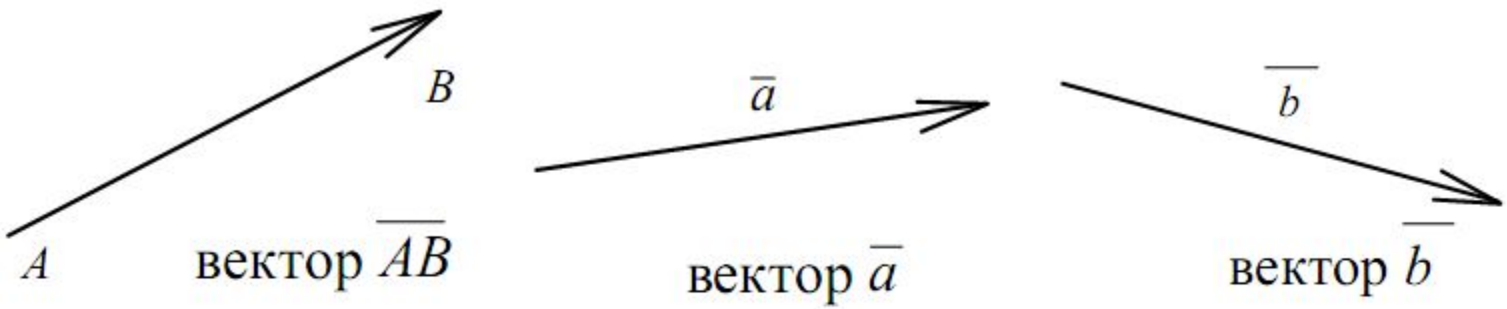
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Основные определения

Векторы

Определение. Вектором назовём направленный отрезок, т.е. отрезок прямой, ограниченный двумя точками, одна из которых называется начальной, а другая конечной.

Изображение и обозначения



Определение 2.2. Модуль *вектора есть положительное число, равное длине вектора, т. е. расстоянию между его начальной и конечной точками.*

Обозначение модуля: $\left|\overline{AB}\right|$, $|\overline{a}|$, $|\overline{b}|$.

Вектор, у которого конечная точка совпадает с начальной, называется нуль-вектор и обозначается $\overline{0}$. *Направление нулевого вектора не определено.*

Определение 2.3. *Векторы равны, если они одинаково направлены и длины их равны.*

Определение 2.4. *Вектор, длина которого равна единице, называют единичным вектором.*

Определение 2.5. *Векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной или на параллельных прямых.*

Два коллинеарных вектора называются одинаково направленными, если их концы B и D лежат по одну сторону от прямой AC, содержащей их начала (см. рис. 2.2). В противном случае они называются противоположно направленными.

Два вектора, противоположно направленные, но имеющие одинаковые длины, называются противоположными.

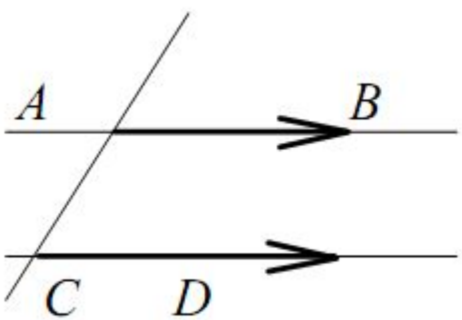


Рис. 2.2

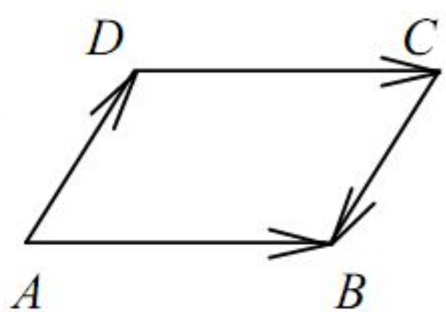


Рис. 2.3

Компланарные векторы

Определение 2.6. *Векторы, лежащие в одной плоскости (или в параллельных плоскостях), называются компланарными.*

Вектор, точка приложения которого может быть выбрана произвольно, называют свободным.

Линейные операции над векторами

К линейным операциям относятся операции умножения вектора на число, сложения и вычитания векторов.

Умножение вектора на число. *Произведением вектора $\overline{a}$ на число λ называется вектор $\overline{c}$, коллинеарный вектору $\overline{a}$, имеющий длину $|\overline{c}| = |\lambda||\overline{a}|$, одинаково направленный с вектором $\overline{a}$ при $\lambda > 0$ и противоположно направленный при $\lambda < 0$.*

Таким образом, векторы $\overline{a}$, $\overline{c}$ *коллинеарны* тогда, и только тогда, когда $\overline{c} = \lambda\overline{a}$.

Сложение векторов. *Отложим вектор* $\overline{a} = \overline{AB}$ *от некоторой точки* A *(рис. 2.4), затем от точки* B *отложим вектор* $\overline{b} = \overline{BC}$.

Вектор $\overline{AC}$*, соединяющий начало первого вектора и конец второго, называется* суммой *и обозначается* $\overline{a} + \overline{b}$. *Эту же сумму можно получить другим способом. Пусть точка* A *– общее начало векторов,* $\overline{AB} = \overline{a}$ *и* $\overline{AC} = \overline{b}$. *Построим на этих векторах как на сторонах параллелограмм (рис. 2.5).*

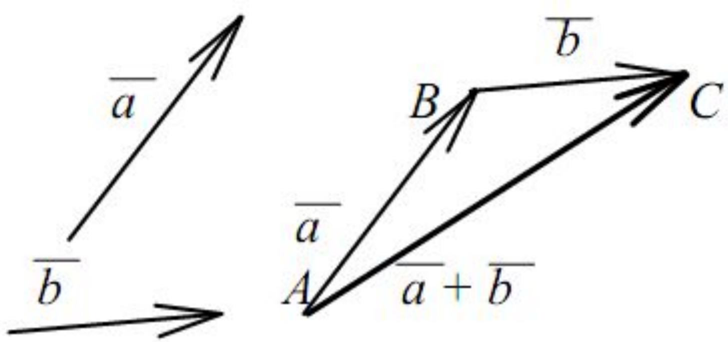


Рис. 2.4

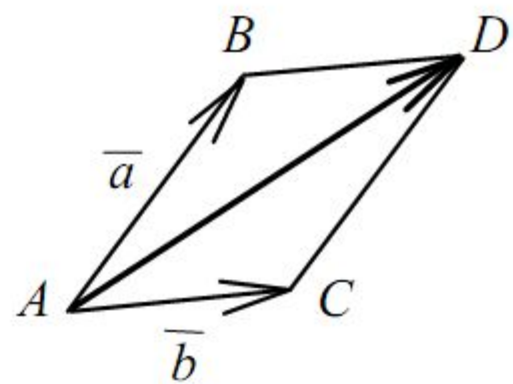


Рис. 2.5

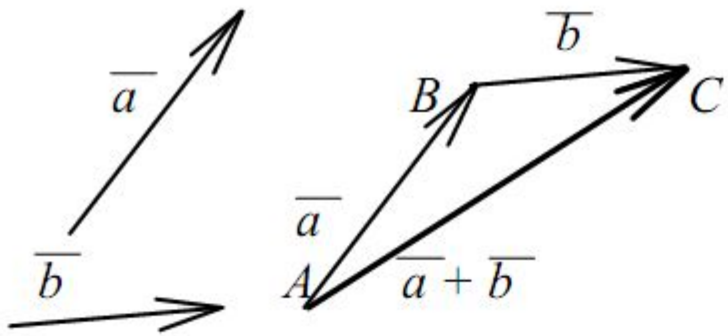


Рис. 2.4

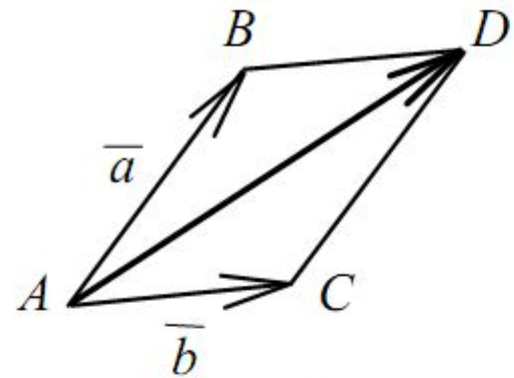


Рис. 2.5

Диагональ параллелограмма – вектор

$$\overline{AD}=\overline{a}+\overline{b}=\begin{cases}\overline{AB}+\overline{BD},\\ \overline{AC}+\overline{CD}\end{cases}$$

является суммой векторов $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$, *т. к. вектор в пространстве можно переносить параллельно самому себе и, значит,* $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$.

Замечание. Операция сложения векторов распространяется на любое конечное число слагаемых векторов. Чтобы сложить три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ (рис. 2.6), расположим их так, чтобы конец первого служил началом второго, а конец второго – началом третьего, т. е. $\bar{a} = \overline{AB}$, $\bar{b} = \overline{BC}$, $\bar{c} = \overline{CD}$. Суммой векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ является вектор $\overline{AD}$, соединяющий начало первого и конец последнего вектора (*метод замыкающей*) $\overline{AD} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$.

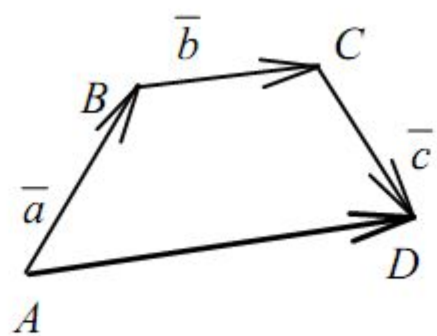


Рис. 2.6

Вычитание векторов. *Разностью двух векторов* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ *называется третий вектор* $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$, *равный сумме векторов* $\overline{a}$ *и* $\left(-\overline{b}\right)$, *если* $\overline{a} = \overline{b} + \overline{c}$ *(см. рис 2.7).*

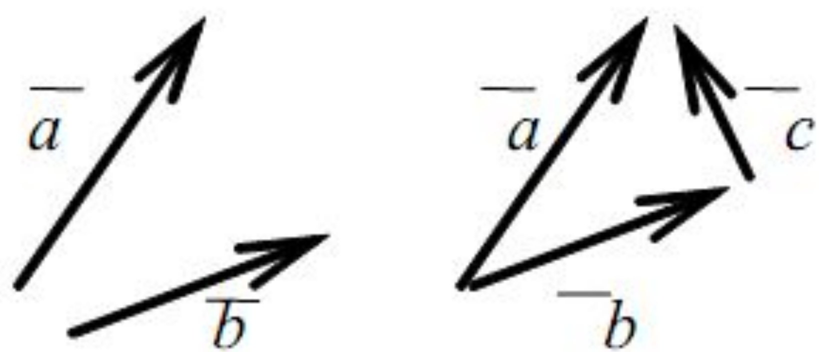


Рис. 2.7

Свойства линейных операций над векторами

1. Переместительный закон (коммутативности):

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}.$$

2. Сочетательный закон (ассоциативности):

$$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right).$$

3. Нулевой вектор играет роль нуля на множестве векторов:

$$\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}.$$

4. Сумма противоположных векторов равна нуль-вектору:

$$\overline{a}+\left(-\overline{a}\right)=\overline{0}.$$

3. Если каждый из векторов умножить на число α, то и сумма этих векторов умножится на число α:

$$\alpha\left(\bar{a}+\bar{b}\right)=\alpha\bar{a}+\alpha\bar{b}.$$

4. Модуль суммы векторов не больше суммы модулей этих векторов:

$$\left|\bar{a}+\bar{b}\right|\leq\left|\bar{a}\right|+\left|\bar{b}\right|.$$

5. Модуль суммы векторов не меньше разности модулей этих векторов:

$$\left|\bar{a}+\bar{b}\right|\geq\left|\bar{a}\right|-\left|\bar{b}\right|.$$

Линейная зависимость векторов. Аффинный базис

Определение 2.8. *Система векторов* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$ *называется линейно зависимой, если существуют числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, *не все равные нулю, для которых справедливо равенство*

$$\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \cdots + \alpha_k\overline{a}_k = 0. \qquad (2.1)$$

При этом левая часть равенства (2.1) называется линейной комбинацией векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$.

Векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$ *называются линейно независимыми, если равенство (2.1) выполняется только при* $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

Теорема 1.4. *Если система векторов линейно зависима, то хотя бы один из векторов всегда можно представить в виде линейной комбинации остальных.*

Действительно, пусть в равенстве (2.1) $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$\bar{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\bar{a}_2 - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\bar{a}_k$$

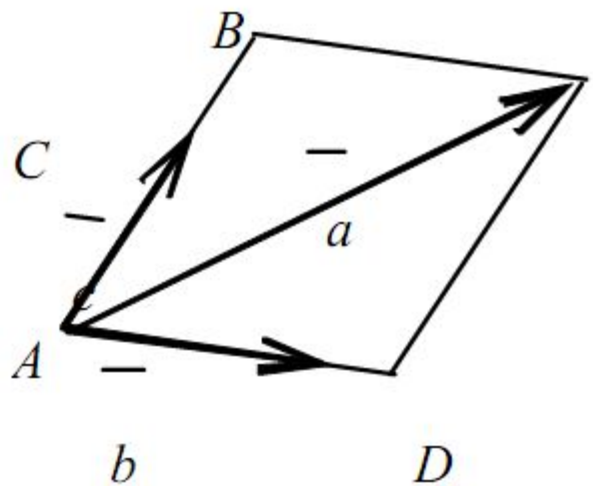
Справедливо и обратное утверждение: если один из векторов представлен в виде линейной комбинации остальных, то эта система векторов линейно зависима.

Следствие. *Коллинеарные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ линейно зависимы, поскольку*

$$\bar{b} = \lambda \bar{a}. \tag{2.3}$$

Справедливо и обратное утверждение: два линейно зависимых вектора коллинеарны.

Теорема 1.5. *Всякие три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, принадлежащие одной плоскости, линейно зависимы.*



Следствие. Для того чтобы три вектора в трёхмерном пространстве были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно зависимы. Если три вектора не компланарны, то они линейно независимы.

Базис на плоскости

Определение 2.9. *Базисом на плоскости (в двухмерном пространстве, которое будем обозначать E2) называются любые два линейно независимых вектора.*

Пусть $\overline{a}$ – любой вектор на плоскости, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ – базис. По теореме 5 следует: $\overline{a} = \alpha_1 \overline{b} + \alpha_2 \overline{c}$. Говорят, что вектор $\overline{a}$ разложен по базису $\overline{b}$, $\overline{c}$; числа α_1 и α_2 называются *аффинными координатами* вектора $\overline{a}$ на плоскости (или в пространстве E_2): $\overline{a} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$.

Базис в трехмерном пространстве

Определение 2.10. *В трёхмерном пространстве (будем обозначать E3) базисом называются любые три линейно независимых вектора, т. е. всякие три некомпланарных вектора.*

Пусть $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – базис. Тогда любой четвёртый вектор можно представить в виде их линейной комбинации (см. формулу 2.2)

$$\bar{d} = \alpha_1\bar{a} + \alpha_2\bar{b} + \alpha_3\bar{c}, \quad \text{или} \quad \bar{d} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – *координаты вектора* $\bar{d}$ *в базисе* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ имеют общее начало в точке O и точка M является концом вектора $\bar{d}$, то вектор

$$\bar{d} = \overline{OM} = \alpha_1\bar{a} + \alpha_2\bar{b} + \alpha_3\bar{c}$$

называется *радиус-вектором точки M в базисе* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, при этом числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ называются *аффинными координатами точки M*.

Проекция вектора на ось

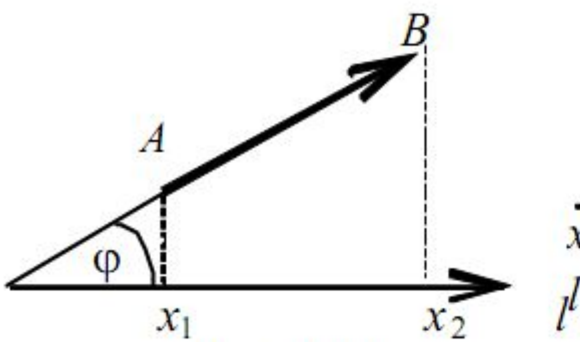


Рис. 2.11

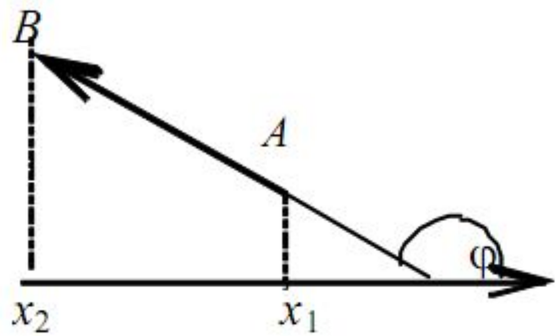


Рис. 2.12

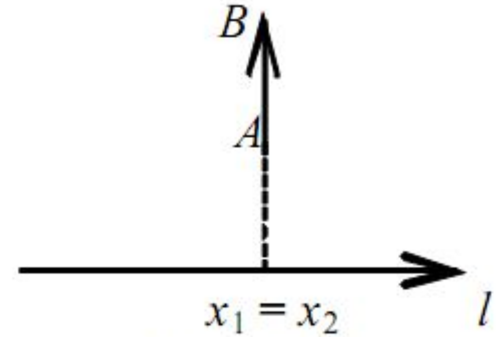


Рис. 2.13

Определение 2.11. *Разность $x_2 - x_1$ называется проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l.*

При этом:

если угол φ между осью и вектором – острый, то $x1 < x2$ и проекция положительна (рис. 2.11);

если угол φ между осью и вектором – тупой, то $x_1 > x_2$ и проекция отрицательна (рис. 2.12);

если угол $\varphi = 90°$, то $x_1 = x_2$ и проекция равна нулю (рис. 2.13).

Теоремы о проекциях

Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось l обозначается символом $\text{пр}_l\,\overline{AB}$.

Теорема 2.1. *Проекция вектора $\overline{a}$ на ось l равна произведению модуля вектора $\overline{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью:*

$$\text{пр}_l\,\overline{a} = |\overline{a}|\cos\varphi = |a|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{l}}).$$

Теорема 2.2. *Проекция суммы двух векторов на ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось:*

$$\text{пр}_l(\overline{a}+\overline{b}) = \text{пр}_l\,\overline{a} + \text{пр}_l\,\overline{b}.$$

Следствие. $\text{пр}_l(\overline{a}-\overline{b}) = \text{пр}_l\,\overline{a} - \text{пр}_l\,\overline{b}$.

Теорема 2.3. *Если вектор $\overline{a}$ умножить на число $\lambda > 0$, то его проекция на ось l увеличится в λ раз:*

$$\text{пр}_l(\lambda\overline{a}) = \lambda\,\text{пр}_l\,\overline{a}.$$

Прямоугольный декартов базис

Рассмотрим прямоугольную систему координат в пространстве E_3, образованную тремя взаимно перпендикулярными осями с общим началом в точке O (рис. 2.14). Одну из осей называют *осью абсцисс* и обозначают Ox, вторую – *осью ординат* и обозначают Oy, третью – *осью аппликат* и обозначают Oz. На каждой из осей выберем единичный вектор, направление которого совпадает с положительным направлением оси:

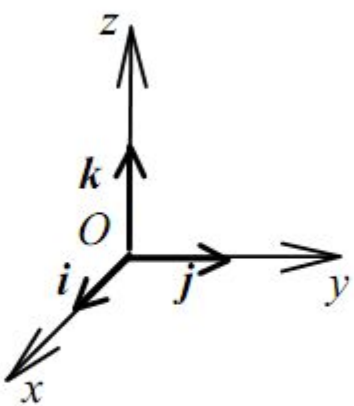


Рис. 2.14

$$\bar{i} \in Ox\,,\ \bar{j} \in Oy\,,\ \bar{k} \in Oz\,;\ |\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1.$$

Эти векторы называются *ортами*. Так как орты некомпланарны, то они образуют базис, который называется *декартовым ортогональным базисом*. Орты можно записывать ***i***, ***j***, ***k***, ввиду их единственности, без черты.

Рассмотрим вектор $\overline{a}$ в пространстве E_3. Перенесём его параллельно самому себе в точку O (см. рис. 2.15).

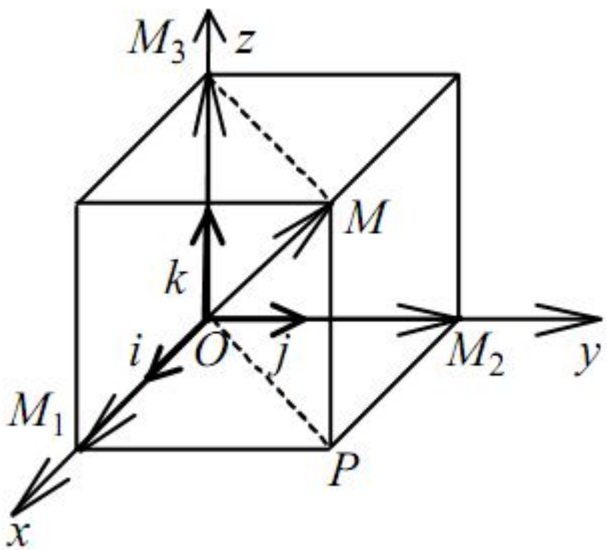


Рис. 2.15

$\overline{a} = \overline{OM}$ – радиус-вектор точки M.

$$\overline{a} = a_x i + a_y j + a_z k$$

$$\overline{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$$

числа a_x, a_y, a_z – проекции вектора $\overline{a}$ на координатные оси

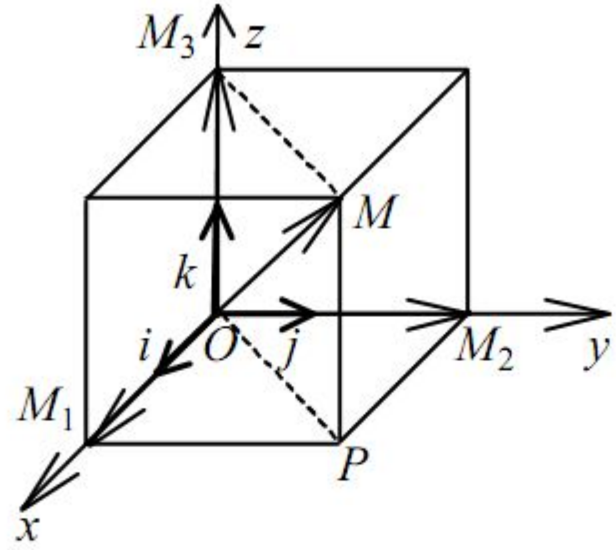
$a_x i, a_y j, a_z k$ – составляющие вектора $\overline{a}$

Длина вектора

$$|\bar{a}|^2 = OM^2 = OM_1^2 + OM_2^2 + OM_3^2,$$

$$OM_1 = a_x, \quad OM_2 = a_y, \quad OM_3 = a_z,$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$



Длина вектора, заданного концами – расстояние между точками

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \; .$$

Направляющие косинусы вектора

Направление вектора в пространстве определяется углами α, β и γ между вектором и положительным направлением соответствующих осей координат OX, OY, OZ; cos α, cos β и cos γ называются направляющими косинусами вектора.

$$\left.\begin{aligned} a_x &= |\bar{a}|\cos\alpha \\ a_y &= |\bar{a}|\cos\beta \\ a_z &= |\bar{a}|\cos\gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},\ \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Введём единичный вектор $\bar{a}_0$ по направлению $\bar{a}$

$$\bar{a} = |\bar{a}|\bar{a}_0,$$

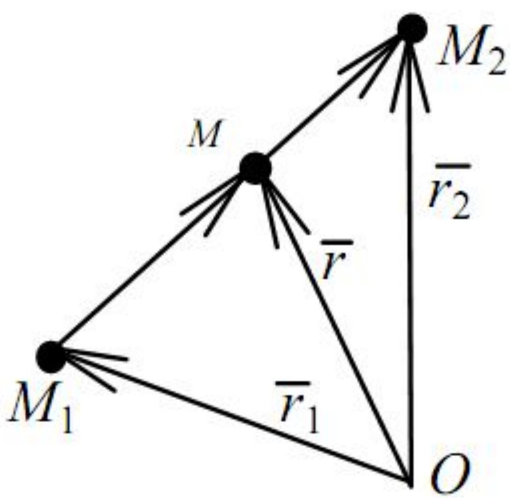
$$\bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{a_x}{|\bar{a}|}i + \frac{a_y}{|\bar{a}|}j + \frac{a_z}{|\bar{a}|}k,$$

$$\bar{a}_0 = i\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos\gamma,$$

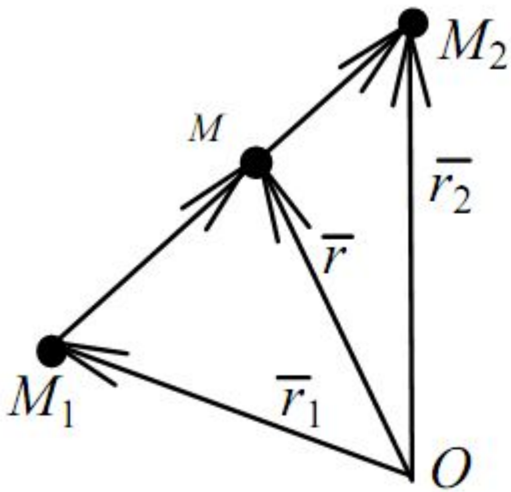
Деление отрезка в данном отношении

Разделить отрезок M_1M_2 в данном отношении $\lambda > 0$ – значит найти такую точку M, что

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda, \text{ или } M_1M = \lambda MM_2. \qquad (2.12)$$



$$\bar{r} - \bar{r}_1 = \lambda(\bar{r}_2 - \bar{r}), \text{ или } \bar{r}(1+\lambda) = \lambda\bar{r}_2 + \bar{r}_1$$



$$\bar{r} - \bar{r}_1 = \lambda(\bar{r}_2 - \bar{r}), \text{ или } \bar{r}(1+\lambda) = \lambda\bar{r}_2 + \bar{r}_1$$

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_1 + \lambda\bar{r}_2}{1+\lambda} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y_M = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \\ z_M = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}, \end{cases}$$

Скалярное произведение

Определение 2.12. *Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется скаляр – число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.*

Скалярное произведение обозначается

$$(\overline{a},\overline{b}) = \overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right), \qquad (2.17)$$

или $\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi$, где φ – угол между векторами

Свойства скалярного произведения

1. Коммутативность: $\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\left(\overline{b},\overline{a}\right)$.

2. Скалярный множитель можно выносить за знак скалярного произведения:

$$(\lambda\cdot\overline{a},\overline{b})=(\overline{a},\lambda\overline{b})=\lambda(\overline{a},\overline{b}).$$

3. Скалярное произведение подчиняется сочетательному закону:

$$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}.$$

4. Если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то либо один из векторов равен нулю, либо равен нулю косинус угла между ними, т. е. векторы перпендикулярны. Обратно: если $\bar{a} \perp \bar{b}$, то $\cos\varphi = 0$ и $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$.

5. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$(\bar{a}, \bar{a}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cos 0 = |\bar{a}|^2, \quad |\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$$

Вычисление проекции вектора на вектор

$$(a,b)=|b|\cdot \text{пр}_{\bar b}\bar a=|a|\cdot \text{пр}_{\bar a}\bar b,$$

$$\text{пр}_{\bar b}\bar a=\frac{(\bar a,\bar b)}{|\bar b|},\ \text{или}\ \text{пр}_{\bar a}\bar b=\frac{(\bar a,\bar b)}{|\bar a|}.$$

Скалярное произведение в декартовой системе координат

$$\bar{a}\{a_x, a_y, a_z\} \text{ и } \bar{b}\{b_x, b_y, b_z\}$$

скалярные произведения единичных векторов:

$$i \cdot i = |i|^2 \cos 0 = 1, \quad j \cdot j = 1, \quad k \cdot k = 1,$$

$$i \cdot j = |i| \cdot |j| \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad i \cdot k = 0, \quad j \cdot k = 0.$$

Скалярное произведение орт

	i	j	k
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

Теперь вычислим скалярное произведение, воспользовавшись его свойствами:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = (a_x i + a_y j + a_z k) \cdot (b_x i + b_y j + b_z k) =$$

$$\underline{a_x b_x i \cdot i} + a_x b_y i \cdot j + a_x b_z i \cdot k +$$

$$+ a_y b_x j \cdot i + \underline{a_y b_y j \cdot j} + a_y b_z j \cdot k + a_z b_x k \cdot i + a_z b_y k \cdot j + \underline{a_z b_z k \cdot k}.$$

Все слагаемые, кроме подчёркнутых, обращаются в ноль, окончательно получаем

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z . \qquad (2.18)$$

Скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных проекций

Итоговые формулы

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi, \text{где } \varphi = \left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right),$$

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}},$$

$$\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Векторное произведение

Определение 2.13. *Векторным произведением вектора* $\bar{a}$ *на вектор* $\bar{b}$ *называется вектор* $\bar{c}$*, который подчиняется следующим условиям:*

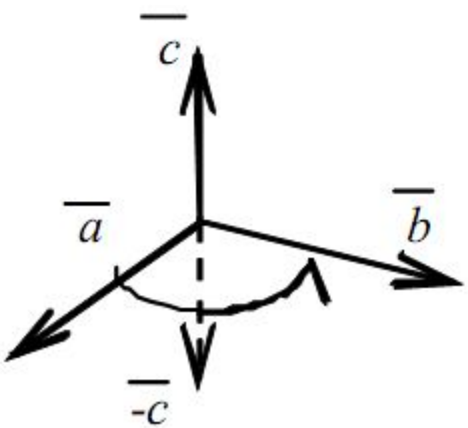


Рис. 2.24

- *вектор* $\bar{c}$ *перпендикулярен плоскости перемножаемых векторов (рис. 2.24), т. е.* $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$;
- *вектор* $\bar{c}$ *направлен так, что если смотреть с его конца вдоль вектора, то поворот от* $\bar{a}$ к $\bar{b}$ *совершается против часовой стрелки (т. е. ориентирован так же, как вектор* $\bar{k}$ *относительно векторов* $\bar{i}$ *и* $\bar{j}$*);*

Модуль векторного произведения

• *модуль вектора* $\bar{c}$ *численно равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *как на его сторонах:*

$$S_{\text{параллелогр.}} = |\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right). \qquad (2.21)$$

Обозначается векторное произведение символами

$$\bar{a} \times \bar{b} \text{ или } [\bar{a}, \bar{b}].$$

Основные свойства векторного произведения

1. *При перемене мест сомножителей векторное произведение меняет знак на противоположный:*

$$[\overline{a},\overline{b}]=-[\overline{b},\overline{a}].$$

2. *Константу можно выносить за знак векторного произведения, т. е. векторное произведение подчиняется сочетательному закону относительно числового множителя:*

$$\lambda[\overline{a},\overline{b}]=[\lambda\overline{a},\overline{b}]=[\overline{a},\lambda\overline{b}].$$

3. Векторное произведение подчиняется распределительному закону:

$$(\overline{a}+\overline{b})\times\overline{c}=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}.$$

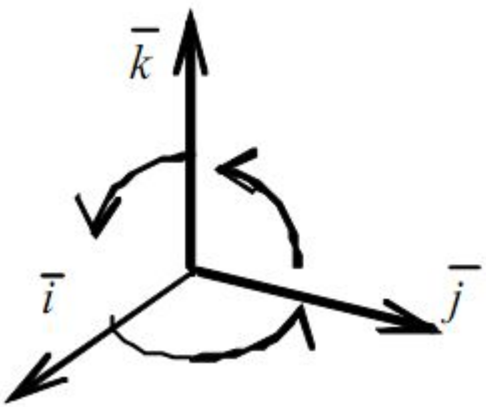
4. Если векторное произведение двух векторов равно нулю, то либо один из векторов равен $\overline{0}$, *либо* $\sin\varphi=0$, *т. е. векторы коллинеарны. В частности,*

$$|\overline{a}\times\overline{a}|=|\overline{a}|\cdot|\overline{a}|\cdot\sin 0=0.$$

Таким образом, для того чтобы два ненулевых вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение равнялось нуль-вектору $[\overline{a},\overline{b}]=\overline{0}$.

Векторное произведение в декартовой системе координат

$$\overline{a} = a_x i + a_y j + a_z k, \ \ \overline{b} = b_x i + b_y j + b_z k$$



$$[i\ ,\ i] = [j\ ,\ j] = [k\ ,\ k] = 0$$

$$[i\ ,\ j] = k$$

$$[j, k] = i\ ,\ [k, j] = -i\ ,\ [k, i] = j\ ,\ [i, k] = -j\ ,\ [j, i] = -k$$

Векторное произведение орт

	i	j	k
i	0	k	$-j$
j	$-k$	0	i
k	j	$-i$	0

$$[\bar{a}\ ,\bar{b}\,] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

С помощью определения векторного произведения можно решать задачу о вычислении площади треугольника, построенного на векторах как на сторонах (рис 2.26).

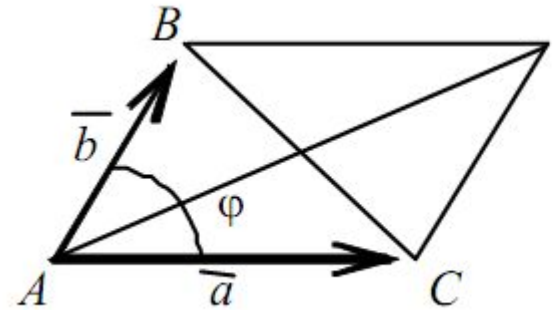


Рис. 2.26

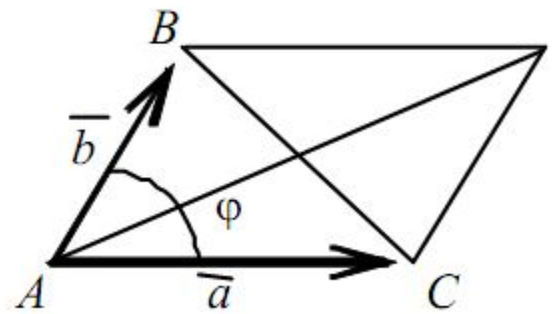


Рис. 2.26

По определению *модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах:*

Sпараллелогр. = $|\,\overline{a} \times \overline{b}\,| = |\,\overline{a}\,| \cdot |\,\overline{b}\,| \sin\varphi$,

где $\varphi = \left(\overline{a} \,\widehat{,}\, \overline{b}\right)$.

следовательно, $$\frac{1}{2}\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = S_{\Delta}.$$

Смешанное произведение трёх векторов

Определение 2.14. *Смешанным произведением трёх векторов* $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ *называется* **число**, *равное скалярному произведению вектора* $\overline{a}$ *на векторное произведение векторов* $\left[\overline{b}, \overline{c}\right]$.

Обозначается оно так: $\overline{a} \cdot \left[\overline{b}, \overline{c}\right] = \left(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right)$.

Смешанное произведение в декартовой системе координат

Пусть даны векторы

$$\bar{a} = a_x i + a_y j + a_z k, \quad \bar{b} = b_x i + b_y j + b_z k, \quad \bar{c} = c_x i + c_y j + c_z k.$$

Найдём $[\bar{a}, \bar{b}] \cdot \bar{c}$.

Вычислим предварительно векторное произведение

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} k = d_x i + d_y j + d_z k,$$

где $\bar{d} = [\bar{a}, \bar{b}]$.

скалярное произведение

$$(\bar{d},\bar{c}) = d_x c_x + d_y c_y + d_z c_z\,.$$

Окончательно смешанное произведение равно

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z.$$

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Геометрический смысл смешанного произведения

Построим на векторах как на рёбрах параллелепипед

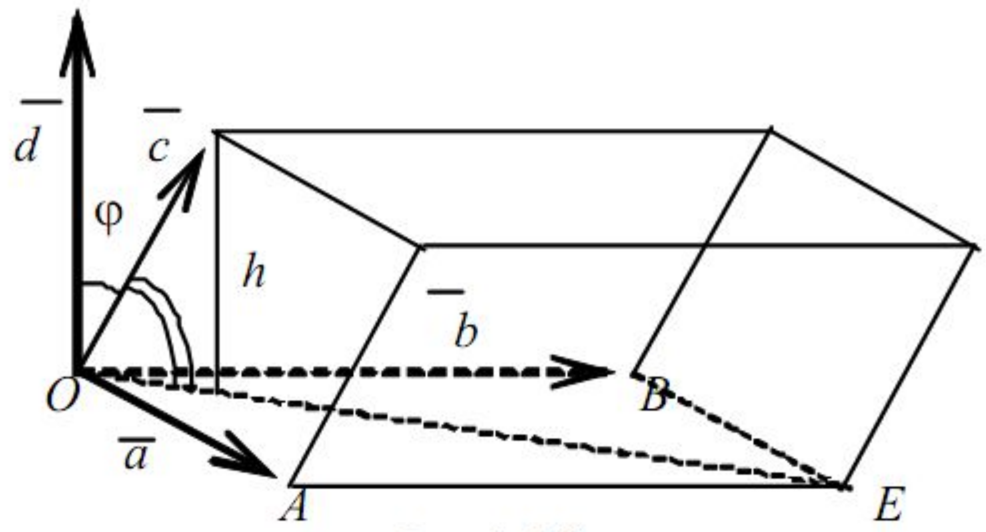
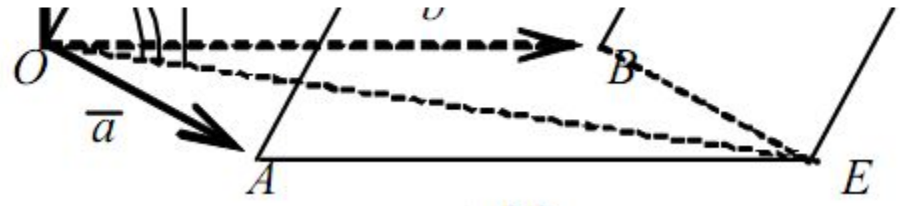


Рис 2.28

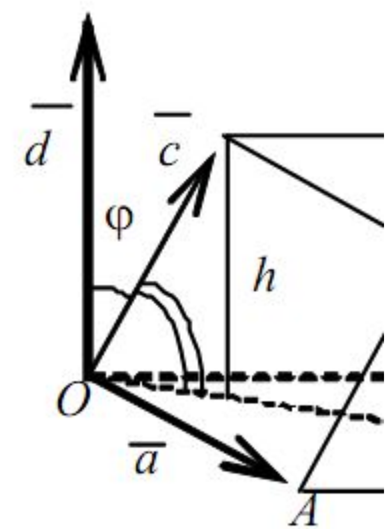
Найдём вектор $\bar{d} = \bar{a} \times \bar{b}$, модуль которого равен площади параллелограмма $OBEA$:

$$\left|\bar{d}\right| = \left|[\bar{a}, \bar{b}]\right| = S .$$



Далее, умножив скалярно $\bar{d} \cdot \bar{c}$, вычислим смешанное произведение векторов

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \bar{d} \cdot \bar{c} = \left|\bar{d}\right| \cdot \left|\bar{c}\right| \cdot \cos\varphi = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right| \cdot \left|\bar{c}\right| \cos\varphi,$$



где φ – угол между векторами $\bar{d}$ и $\bar{c}$,

$$\left|\bar{c}\right| \cdot \cos\varphi = \left|\bar{c}\right| \cdot \sin(90 - \varphi) = h ,$$

где – h высота параллелепипеда.

$$V_{\text{пар}} = S_{\text{осн}} \cdot h = \pm \bar{a}\bar{b}\bar{c}.$$

- Если угол $\varphi < \dfrac{\pi}{2}$, то $|\bar{c}| \cdot \cos\varphi > 0$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = V$.
- Если угол $\varphi > \dfrac{\pi}{2}$, то $|\bar{c}| \cdot \cos\varphi < 0$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -V$.

Вывод: модуль смешанного произведения трёх векторов равен объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах как на рёбрах.

Свойства смешанного произведения

1. • При перемене мест двух сомножителей смешанное произведение меняет знак на противоположный:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c}.$$

5. • Циклическая перестановка векторов не меняет знака смешанного произведения:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b}.$$

6. • Операции векторного умножения и скалярного переставимы:

$$\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c}\ .$$

Все свойства смешанного произведения доказываются с помощью свойств определителя!

Условие компланарности трех векторов

Теорема 2.6. *Чтобы векторы* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ *были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю.*