

Предел последовательности.

Урок 1.

Алгебра и начала математического анализа. 11 класс :
А45 учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и
профил. уровни / [Ю. М. Колягин, М. В.
Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин]; под ред.
А. Б. Жижченко. —
2-е изд. —
М. : Просвещение,
2010.— 336 с.

Цели урока:

- ввести понятие предела последовательности;
- рассмотреть свойства сходящихся последовательностей.

Числовые последовательности

- Кратко последовательность обозначают символом $\{X_n\}$ или (X_n) , при этом X_n называют членом или элементом этой последовательности, n — номером члена X_n .
- Числовая последовательность — это функция, область определения которой есть множество \mathbb{N} всех натуральных чисел. Множество значений этой функции, т. е. совокупность чисел X_n , $n \in \mathbb{N}$, называют множеством значений последовательности. Множество значений последовательности может быть как конечным, так и бесконечным.

Множество значений последовательности $\{(-1)^n\}$ состоит из двух чисел 1 и -1, а множества значений последовательностей $\{n^2\}$ и $\{1/n\}$ — бесконечны.

Последовательность, у которой существует предел, называют **сходящейся**. Последовательность, не являющуюся сходящейся, называют **расходящейся**; иначе говоря, последовательность называют расходящейся, если никакое число не является ее пределом.

Предел числовой последовательности.

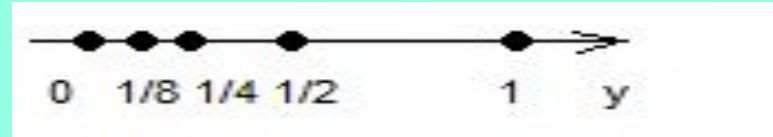
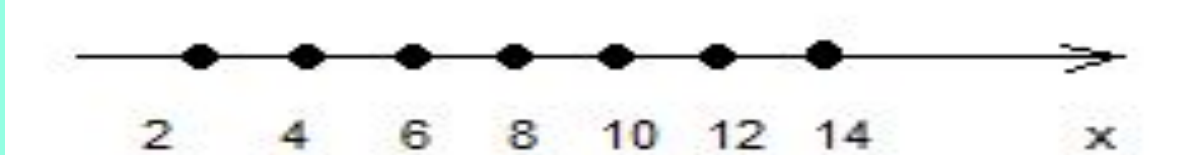
Рассмотрим две числовые последовательности:

$$(x_n) : 2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2n, \dots;$$

$$(y_n) : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

Изобразим члены этих последовательностей точками на координатных прямых.

Обратите внимание как ведут себя члены последовательности.



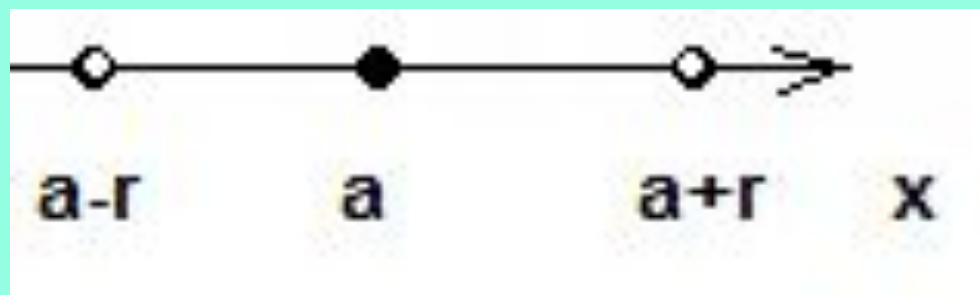
y_n

Замечаем, что члены последовательности y_n как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности x_n таковой точки не наблюдается.

Но, естественно, не всегда удобно изображать члены последовательности, чтобы узнать есть ли точка «сгущения» или нет.

Определение 1. Пусть a - точка прямой, а r - положительное число. Интервал $(a-r, a+r)$ называют **окрестностью точки a** , а число r - **радиусом окрестности**.

Геометрически это выглядит так:



Например:

$(-0.1, 0.5)$ – окрестность точки 0.2 , радиус окрестности равен 0.3 .

Теперь можно перейти к определению точки «сгущения», которую математики называли *«пределом последовательности»*.

Определение 2. Число b называют пределом последовательности y_n , если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Пишут: $y_n \rightarrow b$

Читают: y_n стремится к b .

Либо пишут: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$

Читают: предел последовательности y_n при стремлении n к бесконечности равен b .

Сходящиеся и расходящиеся последовательности.

- Последовательность, у которой существует предел, называют **сходящейся**.
- Последовательность, не являющуюся сходящейся, называют **расходящейся**; иначе говоря, последовательность называют расходящейся, если никакое число не является ее пределом.

Теорема 1

Если последовательность $\{X_n\}$ является возрастающей (или неубывающей) и ограничена сверху, т. е. $X_n \leq M$ для всех n , то она имеет предел.

Теорема 2

Если последовательность $\{X_n\}$ является убывающей (или невозрастающей) и ограничена снизу, т. е. $X_n \geq M$ для всех n , то она имеет предел.

Пример:

Существует ли номер n_0 , начиная с которого все члены последовательности (x_n) попадают в окрестность точки a радиуса $r = 0.1$, если

1. $x_n = \frac{1}{n^2}$, $a = 0$;

Решение.

$$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < 0.1$$

$$\left| \frac{1}{n^2} \right| < 0.1$$

$$\frac{1}{n^2} < 0.1$$

$$n^2 > 10 \Rightarrow (\sqrt{10}; +\infty) \ni n \Rightarrow n_0 = 4$$

Определение: Число a называют **пределом числовой последовательности**

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N , что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Условие того, что число a является пределом числовой последовательности

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$

записывают с помощью обозначения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

и произносят так: «Предел a_n при n , стремящемся к бесконечности, равен a ».

Предел числовой последовательности

Пример 1. Для любого числа $k > 0$ справедливо равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

Пример 2. Для любого числа $k > 0$ справедливо равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty$$

Пример 3. Для любого числа a такого, что $|a| < 1$, справедливо равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$$

Пример 4. Для любого числа a такого, что $|a| > 1$, справедливо равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$$

Пример 5. Последовательность:

$-1, 1, -1, 1, \dots$,

заданная с помощью формулы общего члена

$$a_n = (-1)^n,$$

предела не имеет.

На уроке:

- №1(1,3),
- №4(1)

Домашнее задание.

- §1 стр. 44
- №1(2,4)
- №2(2,4,6)
- №4(2)

Предел последовательности.

Урок 2.

Алгебра и начала математического анализа. 11 класс :
А45 учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и
профил. уровни / [Ю. М. Колягин, М. В.
Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин]; под ред.
А. Б. Жижченко. —
2-е изд. —
М. : Просвещение,
2010.— 336 с.

МБОУ СОШ №103.
г.Нижнего Новгорода.
Учитель : Лукьянова Е.Ю.

Цель урока.

- Рассмотреть свойства пределов числовых последовательностей;
- Сформировать умения вычисления пределов.

Свойства пределов числовых последовательностей

Рассмотрим две последовательности

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$.

Если при $n \rightarrow \infty$ существуют такие числа a и b , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b,$$

то при $n \rightarrow \infty$ существуют также и **пределы суммы, разности и произведения** этих последовательностей, причем


●
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b$$

●
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a - b$$

●
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$$

Если, выполнено условие, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$

то при $n \rightarrow \infty$ существует **предел дроби** $\frac{a_n}{b_n}$


$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

Пример 6. Найти предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+1} + 3^{n+2}}{4^{n+2} + 5}$$

Решение. Сначала преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, воспользовавшись [свойствами степеней](#):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+1} + 3^{n+2}}{4^{n+2} + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4^n + 9 \cdot 3^n}{16 \cdot 4^n + 5}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4^n + 9 \cdot 3^n}{16 \cdot 4^n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4^n \left(1 + \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^n \right)}{16 \cdot 4^n \left(1 + \frac{5}{16} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^n \right)} = \frac{1}{8}$$

Вынося за скобки «самое большое» слагаемое в числителе дроби и «самое большое» слагаемое в знаменателе дроби, а также, используя [свойства пределов последовательностей](#) и результат [примера 3](#), получаем

Ответ. $\frac{1}{8}$

Пример 7 . Найти предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n\sqrt{n} - 2}{5n^2 - 7\sqrt[3]{n} + 1}$$

Решение. Вынося за скобки «самое большое» слагаемое в числителе дроби и «самое большое» слагаемое в знаменателе дроби, а также, используя [свойства пределов последовательностей](#) и результат [примера 1](#), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n\sqrt{n} - 2}{5n^2 - 7\sqrt[3]{n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{3}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n^2} \right)}{5n^2 \left(1 - \frac{7}{5\sqrt[3]{n^2}} + \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{1}{5}$$

Ответ. $\frac{1}{5}$

Пример 8 . Найти предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{2n + 1} - \frac{4n^2 + 1}{8n + 1} \right)$$

Решение. Сначала преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, приводя дроби к общему знаменателю:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{2n + 1} - \frac{4n^2 + 1}{8n + 1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 1) \cdot (8n + 1) - (4n^2 + 1) \cdot (2n + 1)}{(2n + 1) \cdot (8n + 1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 + 8n + n^2 + 1 - 8n^3 - 2n - 4n^2 - 1}{(2n + 1) \cdot (8n + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2 + 6n}{(2n + 1) \cdot (8n + 1)}\end{aligned}$$

Вынося за скобки «самое большое» слагаемое в числителе дроби и «самое большое» слагаемое в каждой из скобок знаменателя дроби, а также, используя [свойства пределов последовательностей](#) и результат [примера 1](#), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2 + 6n}{(2n+1) \cdot (8n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2 \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{2n \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \cdot 8n \left(1 + \frac{1}{8n}\right)} = -\frac{3}{16}$$

Ответ. $-\frac{3}{16}$

Пример 9. Найти предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^4 + 2n^2 + n + 1} - \sqrt{n^4 - 3n^2 + 5} \right)$$

Решение. В рассматриваемом примере неопределенность типа $\infty - \infty$ возникает за счет разности двух корней, каждый из которых стремится к ∞ . Для того, чтобы раскрыть неопределенность, домножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сумму этих корней и воспользуемся формулой сокращенного умножения «разность квадратов».

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^4 + 2n^2 + n + 1} - \sqrt{n^4 - 3n^2 + 5} \right) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{n^4 + 2n^2 + n + 1} - \sqrt{n^4 - 3n^2 + 5} \right) \cdot \left(\sqrt{n^4 + 2n^2 + n + 1} + \sqrt{n^4 - 3n^2 + 5} \right)}{\left(\sqrt{n^4 + 2n^2 + n + 1} + \sqrt{n^4 - 3n^2 + 5} \right)} = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + n + 1 - (n^4 - 3n^2 + 5)}{\sqrt{n^4 + 2n^2 + n + 1} + \sqrt{n^4 - 3n^2 + 5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + n - 4}{\sqrt{n^4 + 2n^2 + n + 1} + \sqrt{n^4 - 3n^2 + 5}} \end{aligned}$$

Вынося за скобки «самое большое» слагаемое в числителе дроби и «самое большое» слагаемое из-под каждого корня в знаменателе дроби, а также, используя [свойства пределов последовательностей](#) и результат [примера 1](#), получаем

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + n - 4}{\sqrt{n^4 + 2n^2 + n + 1} + \sqrt{n^4 - 3n^2 + 5}} = \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 \left(1 + \frac{1}{5n} - \frac{4}{n^2}\right)}{n^2 \sqrt{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}} + n^2 \sqrt{1 - \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^4}}} = \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \left(1 + \frac{1}{5n} - \frac{4}{n^2}\right)}{\sqrt{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}} + \sqrt{1 - \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^4}}} = \frac{5}{1+1} = \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{5}{2}$

Пример 10. Найти предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right)$$

Решение. Замечая, что для всех $k = 2, 3, 4, \dots$ выполнено равенство

$$\frac{1}{(k-1) \cdot k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right) &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1 \end{aligned}$$

Ответ. 1.

На уроке:

- №5(1,3,5)
- №6(1,3)

Домашнее задание:

- №5(2,4,6)
- №6(2,4),стр.52

Практические задания

1. Запишите окрестность точки a радиуса r в виде интервала, если:

а) $a = 0, r = 0.2;$ *б)* $a = -3, r = 0.5;$

2. Окрестностью какой точки и какого радиуса является интервал:

а) $(2.1, 2.3);$ *б)* $(-7, -5)?$

3. Принадлежит ли точка x_1 окрестности точки a радиуса r , если:

а) $x_1 = 1, a = 2, r = 0.5;$ *б)* $x_1 = -0.2, a = 0, r = 0.4?$

Итоговое практическое задание

Существует ли номер n_0 , начиная с которого все члены последовательности (x_n) попадают в окрестность точки a радиуса r .

$$a) x_n = \frac{1}{2n}, \quad a = 0, \quad r = 0,1; \quad б) x_n = 3 + \frac{1}{n^2}, \quad a = 3, \quad r = 0,2.$$

2. Постройте график последовательности y_n и составьте, если это возможно, уравнение горизонтальной асимптоты графика:

$$a) y_n = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n; \quad б) y_n = 5 - \frac{2}{n}.$$

Итоговое практическое задание

3. Найдите n -й член геометрической прогрессии (b_n) если:

$$a) S = 21, q = \frac{2}{3}, n = 3; \quad б) S = 20, q = 22, n = 4.$$

4. Вычислить:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(n-3)}{n^2}; \quad б) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-2n)(1+n)}{(n+2)^2};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(11 - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \left(-\frac{7}{x^2} - 2 \right); \quad г) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4}{x+3};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + 2x - 7}{x-1}; \quad е) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{27 - x^3}.$$

Важно!

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Можно доказать, что $\{x_n\}$ — возрастающая и ограниченная сверху последовательность. По теореме 1 она имеет предел, который обозначается e , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n = 0$$

Для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение.

Рефлексия :

(Обучающиеся ставят звезду на картинку, которая соответствует их усвоению материала и внутреннему восприятию урока (Эффект множественного клонирования))

- **узнал новое**

- **буду**

ИСПОЛЬЗОВАТЬ

- **расскажу
друзьям**

- **было
интересно**

Итог урока.

- Сегодня на уроке мы познакомились с понятием предела числовой последовательности, правилами вычисления пределов последовательностей.