Предел последовательности.

Урок 1.

Алгебра и начала математического анализа. 11 класс :
А45 учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и
профил. уровни / [Ю. М. Колягин, М. В.
Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин]; под ред.
А. Б. Жижченко. —
2-е изд. —
М. : Просвещение,
2010.— 336 с.

Цели урока:

- ввести понятие предела последовательности;
- рассмотреть свойства сходящихся последовательностей.

Числовые последовательности

- Кратко последовательность обозначают символом {Xn} или (Xn), при этом Xn называют членом или элементом этой последовательности, n —номером члена Xn.
- Числовая последовательность —это функция, область определения которой есть множество N всех натуральных чисел. Множество значений этой функции, т. е. совокупность чисел Xn, n € N, называют множеством значений последовательности. Множество значений последовательности может быть как конечным, так и бесконечным.

Множество значений последовательности {(-1)"} состоит из двух чисел 1 и -1, а множества значений последовательностей $\{n^2\}$ и $\{1/n\}$ — бесконечны.

Последовательность, у которой существует предел, называют сходящейся. Последовательность, не являющуюся сходящейся, называют расходящейся; иначе говоря, последовательность называют расходящейся, если никакое число не является ее пределом.

Предел числовой последовательности.

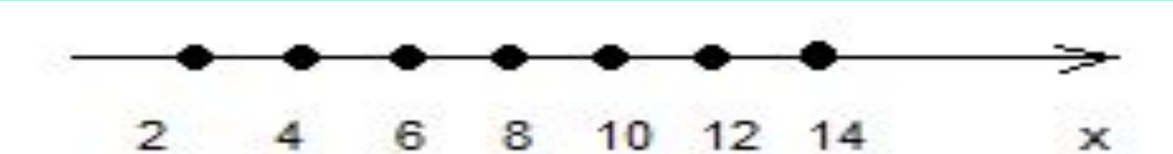
Рассмотрим две числовые последовательности:

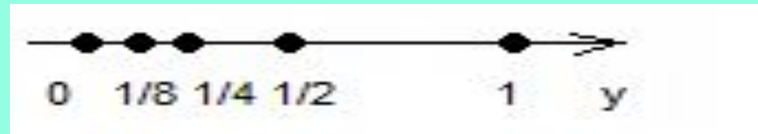
(x_n) : 2, 4, 6, 8, 10, …, $2n$,…;

(y_n) : 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, … $\frac{1}{2^n}$, …

Изобразим члены этих последовательностей точками на координатных прямых.

Обратите внимание как ведут себя члены последовательности.





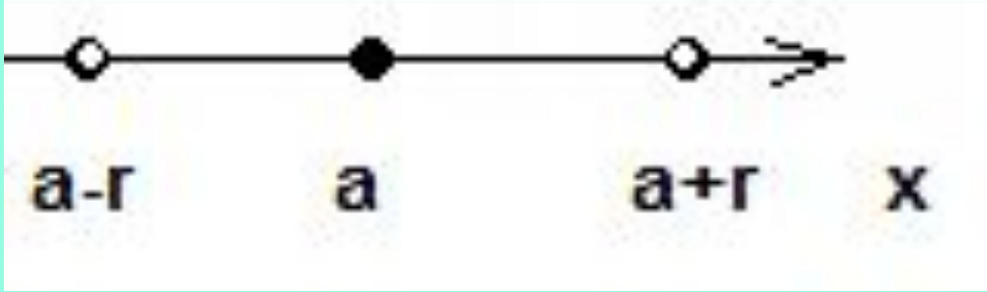
y_n

Замечаем, что члены последовательности как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности x_n таковой точки не наблюдается.

Но, естественно, не всегда удобно изображать члены последовательности, чтобы узнать есть ли точка «сгущения» или нет.

Определение 1. *Пусть* a *- точка прямой, а r - положительное число. Интервал* $(a-r, a+r)$ *называют* ***окрестностью точки*** a *, а число* r *-* ***радиусом окрестности****.*

Геометрически это выглядит так:



Например:

(-0.1, 0.5) – окрестность точки 0.2, радиус окрестности равен 0. 3.

Теперь можно перейти к определению точки «сгущения», которую математики назвали «*пределом последовательности*».

Определение 2*. Число* b *называют* ***пределом последовательности*** y_n *, если в любой заранее выбранной окрестности точки* b *содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.*

Пишут: $y_n \to b$.

Читают: y_n стремится к b.

Либо пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Читают: предел последовательности y_n при стремлении n к бесконечности равен b.

Сходящиеся и расходящиеся последовательности.

- Последовательность, у которой существует предел, называют сходящейся.
- Последовательность, не являющуюся сходящейся, называют расходящейся; иначе говоря, последовательность называют расходящейся, если никакое число не является ее пределом.

Теорема 1

Если последовательность $\{X_n\}$ является возрастающей(или неубывающей) и ограничена сверху, т. е. $X_n \leq M$
для всех n, то она имеет предел.

Теорема 2

Если последовательность $\{X_n\}$ является убывающей (или невозрастающей) и ограничена снизу, т. е. $X_n \geq M$ для
всех n, то она имеет предел.

Пример:

Существует ли номер n_0, начиная с которого все члены последовательности (x_n) попадают в окрестность точки a радиуса $r = 0.1$, если

1. $x_n = \dfrac{1}{n^2},\ a = 0;$

Решение.

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < 0.1$$

$$\left|\frac{1}{n^2}\right| < 0.1$$

$$\frac{1}{n^2} < 0.1$$

$$n^2 > 10 \Rightarrow \left(\sqrt{10}; +\infty\right) \ni n \Rightarrow n_0 = 4$$

Определение: Число a называют ***пределом числовой последовательности***

$a_1, \ a_2, \dots a_n, \dots$

если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$|a_n - a| < \varepsilon$.

Условие того, что число a является пределом числовой последовательности

$a_1, \ a_2, \dots a_n, \dots,$

записывают с помощью обозначения $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

и **произносят** так: «Предел a_n при n, стремящемся к бесконечности, равен a».

Предел числовой последовательности

Пример 1. Для любого числа $k > 0$ справедливо равенство:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

Пример 2 . Для любого числа $k > 0$ справедливо равенство:

$$\lim_{n \to \infty} n^k = \infty$$

Пример 3. Для любого числа a такого, что $|a| < 1,$ справедливо

равенство: $$\lim_{n \to \infty} a^n = 0$$

Пример 4. Для любого числа a такого, что $|a| > 1,$ справедливо равенство: $$\lim_{n \to \infty} a^n = \infty$$

Пример 5 . Последовательность:

$– 1 , 1 , – 1 , 1 , \ldots ,$

заданная с помощью формулы общего члена

$a_n = (– 1)^n ,$

предела не имеет.

На уроке:

- №1(1,3),
- №4(1)

Домашнее задание.

- §1стр. 44
- №1(2,4)
- №2(2,4,6)
- №4(2)

Предел последовательности.

Урок 2.

Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : А45 учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / [Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин]; под ред. А. Б. Жижченко. — 2-е изд. — М. : Просвещение, 2010.— 336 с.

МБОУ СОШ №103.
г.Нижнего Новгорода.
Учитель : Лукьянова Е.Ю.

Цель урока.

- Рассмотреть свойства пределов числовых последовательностей;
- Сформировать умения вычисления пределов.

Свойства пределов числовых последовательностей

Рассмотрим две последовательности

$a_1,\ a_2, \dots a_n, \dots,$ и $b_1,\ b_2, \dots b_n, \dots .$

Если при $n \to \infty$ существуют такие числа a и b, что

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$,

то при $n \to \infty$ существуют также и ***пределы суммы, разности и произведения*** этих последовательностей, причем

- $$\lim_{n \to \infty}\left(a_n + b_n\right) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n = a + b$$

- $$\lim_{n \to \infty}\left(a_n - b_n\right) = \lim_{n \to \infty} a_n - \lim_{n \to \infty} b_n = a - b$$

- $$\lim_{n \to \infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot \lim_{n \to \infty} b_n = a \cdot b$$

Если, выполнено условие, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

то при $n \to \infty$ существует ***предел дроби*** $\dfrac{a_n}{b_n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

Пример 6. Найти предел последовательности

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^{2n+1} + 3^{n+2}}{4^{n+2} + 5}$$

Решение. Сначала преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, воспользовавшись свойствами степеней:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}+3^{n+2}}{4^{n+2}+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4^n+9\cdot 3^n}{16\cdot 4^n+5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4^n+9\cdot 3^n}{16\cdot 4^n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4^n\left(1+\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{16\cdot 4^n\left(1+\frac{5}{16}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}=\frac{1}{8}$$

Выноcя за скобки «самое большое» слагаемое в числителе дроби и «самое большое» слагаемое в знаменателе дроби, а также, используя свойства пределов последовательностей и результат примера 3, получаем

Ответ. $\frac{1}{8}$

Пример 7 . Найти предел последовательности

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 3n\sqrt{n} - 2}{5n^2 - 7\sqrt[3]{n} + 1}$$

Решение. Вынося за скобки «самое большое» слагаемое в числителе дроби и «самое большое» слагаемое в знаменателе дроби, а также, используя свойства пределов последовательностей и результат примера 1, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n\sqrt{n}-2}{5n^2-7\sqrt[3]{n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\dfrac{3}{\sqrt{n}}-\dfrac{2}{n^2}\right)}{5n^2\left(1-\dfrac{7}{5\sqrt[3]{n^2}}+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\frac{1}{5}$$

Ответ. $\frac{1}{5}$

Пример 8 . Найти предел последовательности

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{n^2+1}{2n+1}-\frac{4n^2+1}{8n+1}\right)$$

:

Решение. Сначала преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, приводя дроби к общему знаменателю:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n+1}-\frac{4n^2+1}{8n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+1\right)\cdot(8n+1)-\left(4n^2+1\right)\cdot(2n+1)}{(2n+1)\cdot(8n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3+8n+n^2+1-8n^3-2n-4n^2-1}{(2n+1)\cdot(8n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^2+6n}{(2n+1)\cdot(8n+1)}$$

Вынося за скобки «самое большое» слагаемое в числителе дроби и «самое большое» слагаемое в каждой из скобок знаменателя дроби, а также, используя свойства пределов последовательностей и результат примера 1, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^2+6n}{(2n+1)\cdot(8n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)}{2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cdot 8n\left(1+\frac{1}{8n}\right)}=-\frac{3}{16}$$

Ответ. $-\frac{3}{16}$

Пример 9. Найти предел последовательности

$$\lim_{n \to \infty}\left(\sqrt{n^4 + 2n^2 + n + 1} - \sqrt{n^4 - 3n^2 + 5}\right)$$

Решение. В рассматриваемом примере неопределенность типа $\infty - \infty$ возникает за счет разности двух корней, каждый из которых стремится к ∞. Для того, чтобы раскрыть неопределенность, домножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сумму этих корней и воспользуемся формулой сокращенного умножения «разность квадратов».

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+2n^2+n+1}-\sqrt{n^4-3n^2+5}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^4+2n^2+n+1}-\sqrt{n^4-3n^2+5}\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+2n^2+n+1}+\sqrt{n^4-3n^2+5}\right)}{\left(\sqrt{n^4+2n^2+n+1}+\sqrt{n^4-3n^2+5}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^2+n+1-\left(n^4-3n^2+5\right)}{\sqrt{n^4+2n^2+n+1}+\sqrt{n^4-3n^2+5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+n-4}{\sqrt{n^4+2n^2+n+1}+\sqrt{n^4-3n^2+5}}$$

Вынося за скобки «самое большое» слагаемое в числителе дроби и «самое большое» слагаемое из-под каждого корня в знаменателе дроби, а также, используя свойства пределов последовательностей и результат примера 1, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+n-4}{\sqrt{n^4+2n^2+n+1}+\sqrt{n^4-3n^2+5}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2\left(1+\frac{1}{5n}-\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\sqrt{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}+n^2\sqrt{1-\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^4}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5\left(1+\frac{1}{5n}-\frac{4}{n^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}+\sqrt{1-\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^4}}}=\frac{5}{1+1}=\frac{5}{2}$$

Ответ. $\frac{5}{2}$

Пример 10. Найти предел последовательности

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right)$$

Решение. Замечая, что для всех $k = 2, 3, 4, \ldots$ выполнено равенство

$$\frac{1}{(k-1)\cdot k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots \frac{1}{(n-1)\cdot n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

Ответ. 1 .

На уроке:

- №5(1,3,5)
- №6(1,3)

Домашнее задание:

- №5(2,4,6)
- №6(2,4),стр.52

Практические задания

1. Запишите окрестность точки a радиуса r в виде интервала, если:

$$а)\ \ a = 0,\ \ r = 0.2; \qquad б)\ \ a = -3,\ \ r = 0.5;$$

2. Окрестностью какой точки и какого радиуса является интервал:

$$а)\ \ (2.1,\ 2.3); \qquad б)\ \ (-7,\ -5)?$$

3. Принадлежит ли точка x_1 окрестности точки a радиуса r, если:

$$а)\ \ x_1 = 1,\ \ a = 2,\ \ r = 0.5; \quad б)\ \ x_1 = -0.2,\ \ a = 0,\ \ r = 0.4?$$

Итоговое практическое задание

Существует ли номер n_0, начиная с которого все члены последовательности (x_n) попадают в окрестность точки a радиуса r:

$$a)\ \ x_n = \frac{1}{2n},\ \ a = 0,\ \ r = 0{,}1; \qquad б)\ \ x_n = 3 + \frac{1}{n^2},\ \ a = 3,\ \ r = 0{,}2.$$

2. Постройте график последовательности y_n и составьте, если это возможно, уравнение горизонтальной асимптоты графика:

$$a)\ \ y_n = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n; \qquad б)\ \ y_n = 5 - \frac{2}{n}.$$

Итоговое практическое задание

3. Найдите n - й член геометрической прогрессии (b_n) если:

$$а)\ S = 21,\ q = \frac{2}{3},\ n = 3;\quad б)\ S = 20,\ q = 22,\ n = 4.$$

4. Вычислить:

$$а)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n-3)}{n^2};\quad б)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(1-2n)(1+n)}{(n+2)^2};$$

$$в)\ \lim_{x\to\infty}\left(11-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(-\frac{7}{x^2}-2\right);\quad г)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x-4}{x+3};$$

$$д)\ \lim_{x\to 1}\frac{5x^2+2x-7}{x-1};\quad г)\ \lim_{x\to 3}\frac{9-x^2}{27-x^3}.$$

Важно!

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
Можно доказать, что $\{x_n\}$ — возрастающая и ограниченная сверху последовательность. По теореме 1 она имеет предел, который обозначается e, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

$$\lim_{n\square\ \infty}\left(\frac{\square\square}{\square\square^{\square\square}}\right) = 0$$

Для любого натурального показателя *m* и любого коэффициента *k* справедливо соотношение.

Рефлексия :
(Обучающиеся ставят звезду на картинку, которая соответствует их усвоению материала и внутреннему восприятию урока (Эффект множественного клонирования))

- **узнал новое**
- **буду использовать**
- **расскажу друзьям**
- **было интересно**

Итог урока.

- *Сегодня на уроке мы познакомились с понятием предела числовой последовательности, правилами вычисления пределов последовательностей.*