Теория пределов

http://www.ltk-college.ru/files/teor_pred.pdf

План

1. Последовательности. Предел последовательности.
2. Функции. Предел функции.
3. Геометрический смысл предела. (самостоятельно
4. Бесконечно малые, бесконечно большие.
5. Основные неопределенности. Замечательные пределы.

<u>Определение</u>: *Бесконечной числовой последовательностью* ***(или последовательностью)***

$$\{u_n\} = u_1; u_2; \ldots; u_n; \ldots$$

называют бесконечное множество чисел (членов последовательности), расположенных в определенном порядке одно за другим и построенных по определенному правилу.

Это правило удобнее задавать в виде формулы для общего члена последовательности u_n, выражающей функциональную зависимость u_n от целочисленного аргумента $n \in N$, т.е.

$$u_n = f(n)$$

Примеры:

1) ***Общий член*** $u_n = \frac{1}{n}$ ***определяет последовательность*** $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots\right\}$

2) Общий член $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ***определяет последовательность членов геометрической прогрессии со знаменателем*** $q = \frac{1}{2}$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots; \frac{1}{2^{n-1}}; \ldots\right\}$$

3) Общий член $u_n = \frac{n}{n+1}$ ***определяет последовательность*** $\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{1; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \ldots; \frac{n}{n+1}; \ldots\right\}$

Некоторые последовательности обладают тем свойством, что члены ее по мере роста номера n неограниченно приближаются к постоянному числу a.

Так, например, члены последовательностей 1 и 2 неограниченно приближаются к $a = 0$, члены последовательности 3 приближаются к $a = 1$.

Определение: ***Число в называется пределом функции в точке а, если для всех значений х, достаточно близких к а и отличных от а, значение функции f(x) сколь угодно мало отличается от в.***

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

- ***Функция f(x) называется бесконечно малой при $x \to a$, если***

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$

- ***Функция f(x) называется бесконечно большой при $x \to a$, если***

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

или

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

Основные теоремы о пределах

- Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)$$

- Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)$$

- Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to x_0} c\ f(x)=c\cdot\lim_{x\to x_0} f(x)$$

- Функция может иметь только один предел при $x\to x_0$

Основные теоремы о пределах

- Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^n = (\lim_{x\to x_0} f(x))^n$$

- Предел дроби равен пределу числителя, делённому на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)},\ \ (\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0)$$

Замечательные пределы

- I ЗП (первый замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

- I I ЗП (второй замечательный предел)

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

или

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$$

Непрерывность функции

Функция f (x) называется непрерывной в точке x = a, если предел функции при x→ a равен значению функции при x = a:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Непрерывность функции

Функция f (x) называется непрерывной в точке x = a, если она в этой точке определена и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое значение функции:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

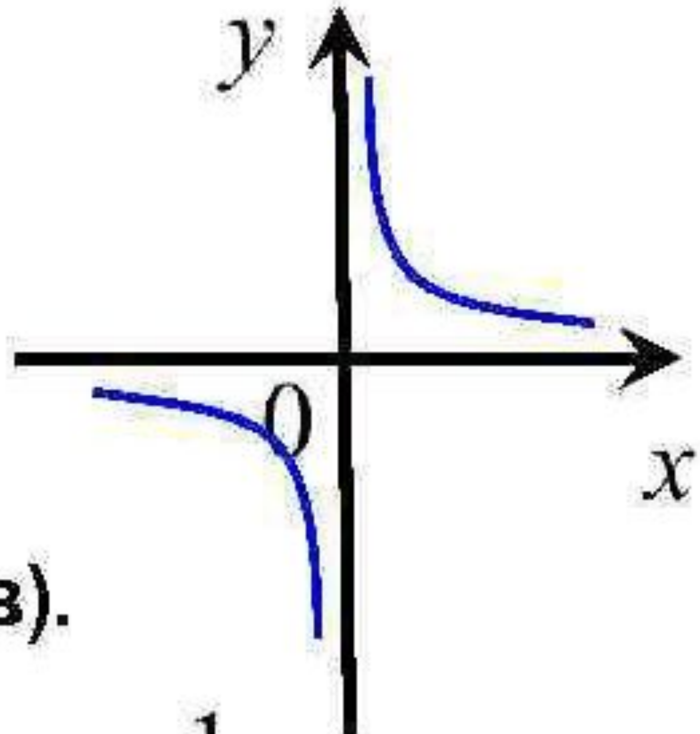
Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются точками разрыва этой функции.

<u>Для элементарных функций справедливы следующие положения:</u>

- ***область непрерывности элементарной функции совпадает с её областью определения, т.е. элементарная функция непрерывна во всей области определения;***
- ***элементарная функция может иметь разрыв только в отдельных точках какого-либо промежутка, но не во всех его точках;***
- ***элементарная функция может иметь разрыв только в той точке, в которой она не определена.***

Пример.

$$y(x) = \frac{1}{x}.$$



$x_0 = 0$ - точка разрыва (бесконечный разрыв).

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty; \qquad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Способы вычисления пределов.

Вычисление пределов $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A, a \in R$

$a \in D(f)$

Непосредственное вычисление

$a \notin D(f)$

Неопределенность

∞/∞

1^{∞}

0/0

$\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$

Неопределенность

$$\frac{0}{0}$$

Алгебраическое преобразование

Умножение на сопряженное выражение

Замена переменной

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{или}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1$$

Неопределенность

∞/∞

$\infty-\infty$, $0\cdot\infty$

Деление числителя и знаменателя на х высших степеней или замена $x = 1/a$

Путем преобразований приводятся к виду 0/0 или ∞/∞

Неопределенность

$$1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \qquad \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

Запомнить!

Необходимо помнить, что

$$\frac{C}{\infty}=0,\ \frac{\infty}{C}=\infty,\ \infty+C=\infty,\ \frac{0}{C}=0,\ \frac{C}{0}=\infty,\ 0+C=C.$$

C=const (любое постоянное число)

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ∞/∞

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{3x^2-4x}$;

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-4x}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{3x^2}{x^2}-\dfrac{4x}{x^2}}=\frac{2-0}{3-0}=\frac{2}{3}.$$

Ответ: 2/3.

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ∞/∞

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-7x}{1-2x^3}$;

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-7x}{1-2x^3}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^3}-\frac{7x}{x^3}}{\frac{1}{x^3}-\frac{2x^3}{x^3}}=\frac{5-0}{0-2}=-\frac{5}{2}=-2{,}5$$

Ответ: - 2,5.

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ∞/∞

$$4)\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{2x-1};$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{2x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2x^2+1}{(2x-1)^2}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2x^2+1}{4x^2-4x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}=\sqrt{\frac{2+0}{4-0+0}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ 0 / 0

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-1^2}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$$

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ 0 / 0

$$6)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1};$$

Решение:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{0}{0}=\left|\begin{array}{l} x=t^6, \sqrt{x}=t^3 \\ \sqrt[3]{x}=t^2, x\to 1, t\to 1 \end{array}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)\cdot(t^2+t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{(t^2+t+1)}=\frac{2}{3}$$

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ 0 / 0

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$;

Решение:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 =$$

$$= 2 \cdot 1 = 2$$

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ 1^{∞}

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{x}$;

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}=e^{2}$$

ДЗ

Вариант 1:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+1}{x^2+4}$ б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2-4x-5}$ в) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x-7}{\sqrt{2x+11}-5}$

Вариант 2:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+4}{2x^2+3x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}$ в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{4x-3}-3}$

Вариант 3:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x+1)(x+2)}{2x^3+5}$ б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+6x-16}{3x^2-5x-2}$ в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{20-x}-x}{x^2-16}$

Вариант 4:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x+5}{3x^2+7}$ б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2+4x-7}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9-x}-3}{x^2+x}$