

Теория пределов

http://www.ltk-college.ru/files/teor_pred.pdf

План

1. Последовательности. Предел последовательности.
2. Функции. Предел функции.
3. Геометрический смысл предела. (самостоятельно)
4. Бесконечно малые, бесконечно большие.
5. Основные неопределенности. Замечательные пределы.

Определение: Бесконечной числовой

последовательностью (или последовательностью)

$$\{u_n\} = u_1; u_2; \dots; u_n; \dots$$

называют бесконечное множество чисел (членов последовательности), расположенных в определенном порядке одно за другим и построенных по определенному правилу.

Это правило удобнее задавать в виде формулы для общего члена последовательности u_n , выражающей функциональную зависимость u_n от целочисленного аргумента $n \in \mathbb{N}$, т.е.

$$u_n = f(n)$$

Примеры:

1) *Общий член $u_n = \frac{1}{n}$ определяет*

последовательность $\left\{ \frac{1}{n} \right\} = \left\{ 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{n}; \dots \right\}$

2) Общий член $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ определяет
последовательность членов геометрической
прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2}$

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} = \left\{ 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots; \frac{1}{2^{n-1}}; \dots \right\}$$

3) Общий член $u_n = \frac{n}{n+1}$ определяет

последовательность $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\} = \left\{ 1; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \dots; \frac{n}{n+1}; \dots \right\}$

Некоторые последовательности обладают тем свойством, что члены ее по мере роста номера n неограниченно приближаются к постоянному числу a .

Так, например, члены последовательностей 1 и 2 неограниченно приближаются к $a = 0$, члены последовательности 3 приближаются к $a = 1$.

Определение: Число **b** называется **пределом** функции в точке **a** , если для всех значений **x** , достаточно близких к **a** и отличных от **a** , значение функции **$f(x)$** сколь угодно мало отличается от **b** .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

□ Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой**

при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

□ Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой**

при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ или

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

Основные теоремы о пределах

- Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

- Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

- Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

- Функция может иметь только один предел при $x \rightarrow x_0$

Основные теоремы о пределах

- Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))^n$$

- Предел дроби равен пределу числителя, делённому на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad (\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0)$$

Замечательные пределы

- I ЗП (первый замечательный предел)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- II ЗП (второй замечательный предел)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{или} \quad \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$$

Непрерывность функции

Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке $x = a$, если предел функции при $x \rightarrow a$ равен значению функции при $x = a$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Непрерывность функции

Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке $x = a$, если она в этой точке определена и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое значение функции:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

*Точки, в которых нарушается
непрерывность функции, называются
точками разрыва этой функции.*

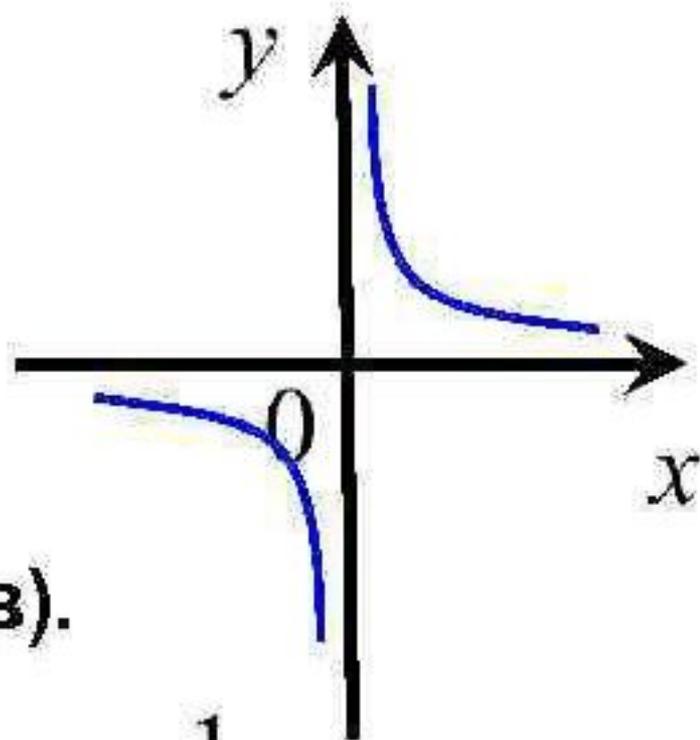
Для элементарных функций справедливы следующие положения:

- ✓ область непрерывности элементарной функции совпадает с её областью определения, т.е. элементарная функция непрерывна во всей области определения;
- ✓ элементарная функция может иметь разрыв только в отдельных точках какого-либо промежутка, но не во всех его точках;
- ✓ элементарная функция может иметь разрыв только в той точке, в которой она не определена.

Пример.

$$y(x) = \frac{1}{x}.$$

$x_0 = 0$ - точка
разрыва
(бесконечный разрыв).



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Способы вычисления пределов.

Вычисление пределов $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, a \in R$

$$a \in D(f)$$



**Непосредственное
вычисление**

$$a \notin D(f)$$



Неопределенность



0/0



∞/∞



$\infty-\infty, 0 \cdot \infty$



1^∞

Неопределенность

$\frac{0}{0}$

Алгебраическое
преобразование

Умножение на
сопряженное
выражение

Замена
переменной

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{или}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1$$

Неопределенность

$$\infty/\infty$$

Деление числителя и знаменателя на x высших степеней или замена $x = 1/a$

$$\infty-\infty, 0 \cdot \infty$$

Путем преобразований приводятся к виду $0/0$ или ∞/∞

Неопределенность

1^∞

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^\frac{1}{\alpha} = e$$

Запомнить!

Необходимо помнить, что
 $\frac{C}{\infty} = 0$, $\frac{\infty}{C} = \infty$, $\infty + C = \infty$, $\frac{0}{C} = 0$, $\frac{C}{0} = \infty$, $0 + C = C$.

C=const (любое постоянное число)

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ∞/∞

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 4x};$$

Решение: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 4x} = \frac{\infty}{\infty} =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2}} = \frac{2 - 0}{3 - 0} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $2/3$.

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ∞/∞

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x}{1 - 2x^3};$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x}{1 - 2x^3} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^3}{x^3} - \frac{7x}{x^3}}{\frac{1}{x^3} - \frac{2x^3}{x^3}} = \frac{5 - 0}{0 - 2} = -\frac{5}{2} = -2,5$$

Ответ: - 2,5.

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ∞/∞

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{2x - 1};$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{2x - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2x^2 + 1}{(2x - 1)^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2x^2 + 1}{4x^2 - 4x + 1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}} = \sqrt{\frac{2 + 0}{4 - 0 + 0}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ 0/0

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x};$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2 - 1^2}{x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}$$

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ 0 / 0

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1};$$

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} &= \frac{0}{0} = \left| \begin{array}{l} x = t^6, \sqrt{x} = t^3 \\ \sqrt[3]{x} = t^2, x \rightarrow 1, t \rightarrow 1 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1}{t^3 - 1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t+1)}{(t-1) \cdot (t^2 + t + 1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t+1}{t^2 + t + 1} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ 0 / 0

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2};$$

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = \\ &= 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ 1^∞

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^x;$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^x = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{\frac{x}{2} \cdot 2} = e^2$$

ДЗ

Вариант 1:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x + 1}{x^2 + 4}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 - 4x - 5}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x - 7}{\sqrt{2x + 11} - 5}$$

Вариант 2:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 4}{2x^2 + 3x + 1}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{4x - 3} - 3}$$

Вариант 3:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x + 1)(x + 2)}{2x^3 + 5}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 6x - 16}{3x^2 - 5x - 2}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{20 - x} - x}{x^2 - 16}$$

Вариант 4:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x + 5}{3x^2 + 7}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 + 4x - 7}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 - x} - 3}{x^2 + x}$$