

# Лекция № 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

- 1) Предмет динамики. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета.
- 2) Сила. Масса. Импульс тела (материальной точки).
- 3) Второй и третий законы Ньютона.
- 4) Механические системы. Закон сохранения импульса.
- 5) Центр масс. Закон движения центра масс.
- 6) Центр тяжести тела.



# 1. Предмет динамики. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчёта.

*Первый закон Ньютона (закон инерции):* существуют такие системы отсчета, относительно которых движущиеся тела (материальные точки) сохраняют состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, до тех пор, пока силовое воздействие со стороны других тел не изменит их состояние.

Такие системы отсчета называются *инерциальными*.

*Инертность тела* – это свойство тела (или материальной точки) сохранять неизменным состояние своего движения или покоя при отсутствии внешних воздействий.

*Гелиоцентрическая система отсчета* – система отсчета, начало координат которой находится в центре Солнца, а оси направлены на соответствующим образом выбранные звезды.

Любая система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно гелиоцентрической системы, будет инерциальной.

## 2. Сила. Масса. Импульс тела (материальной точки).

**Масса  $m$  тела** – физическая величина, являющаяся мерой его инерционных и гравитационных свойств.

**Основные свойства массы:**

1) масса – величина инвариантная. *Инвариантом* называется величина, имеющая одинаковое значение в любой системе отсчета в классической механике;

2) масса – величина аддитивная (например,  $m = m_1 + m_2$ );

3) закон сохранения массы: полная масса  $m$  замкнутой системы является постоянной величиной ( $m = const$ ).



## 2. Сила. Масса. Импульс тела (материальной точки).

**Сила  $\vec{F}$**  – векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение и (или) изменяет свою форму и размеры.

**Свойства силы:**

- 1) материальное происхождение;
- 2) инвариантность по отношению к переходу в другую систему отсчета;
- 3) силы характеризуются модулем, направлением, точкой приложения.

**Закон – принцип независимости действия сил:** результат действия одного тела на другое не зависит от того, взаимодействует ли данное тело с какими-либо другими телами

**Импульс  $\vec{p}$  точки (количество движения)** – физическая величина, равная произведению массы точки на ее скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v} . \quad (2.1)$$

### 3. Второй и третий законы Ньютона.

*Второй закон Ньютона* в наиболее общей форме: скорость изменения импульса  $\vec{p}$  материальной точки равна равнодействующей силе  $\vec{F}$ , действующей на эту точку

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \text{или} \quad \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}, \quad \vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (2.2)$$

Если  $m = \text{const}$ ,

$$\frac{m d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \text{или} \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (2.3)$$

### 3. Второй и третий законы Ньютона.

*Третий закон Ньютона* – всякое действие материальных точек (тел) друг на друга имеет характер взаимодействия.

Силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, равны по величине, противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, которая соединяет эти точки (рис. 2.1):

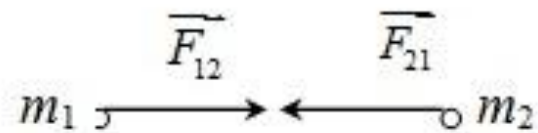


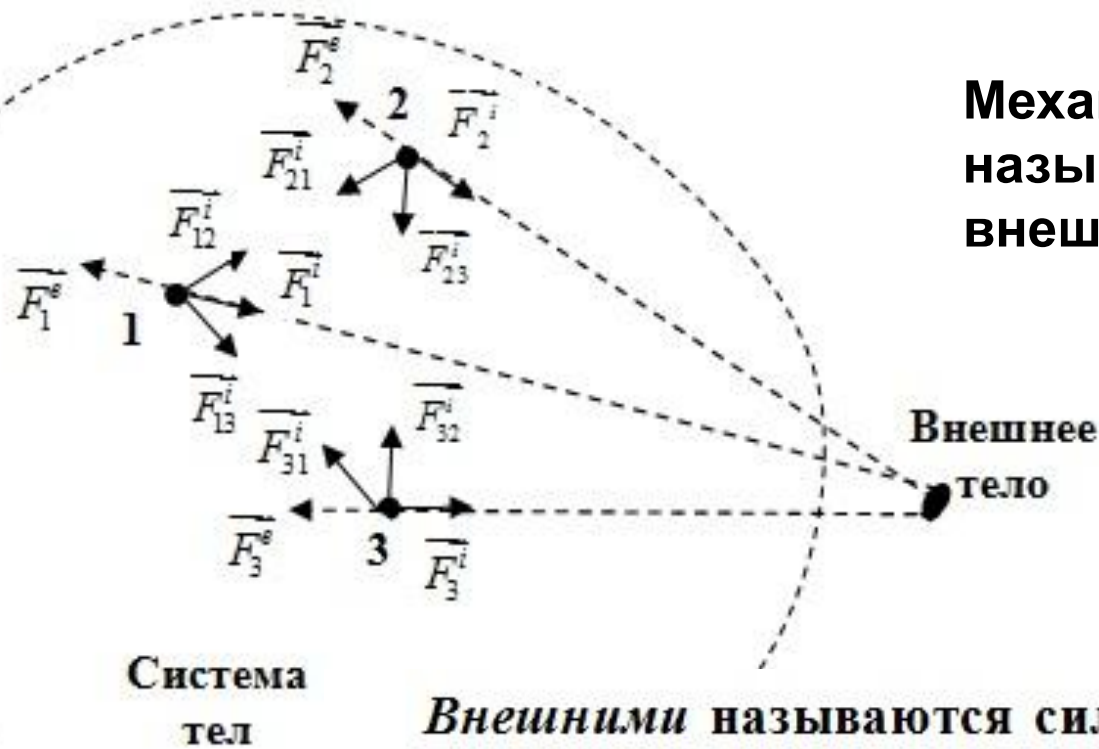
Рис. 2.1.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (2.4)$$



## 4. МЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА.

**Механическая система** – совокупность материальных точек (тел), взаимодействующих и обменивающихся энергией, как между собой, так и с другими телами (внешней средой).



Механическая система называется **замкнутой**, если внешних сил нет.

**Внешними** называются силы  $\vec{F}^e$ , которые действуют на точки или тела системы со стороны тел, которые не входят в данную систему.

**Внутренние силы**  $\vec{F}^i$  – это силы взаимодействия между телами или точками рассматриваемой системы.

## 4. Механические системы. Закон сохранения импульса.

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из  $N$  тел с массами  $m_1, m_2, \dots, m_N$ .

Обозначим скорости этих тел соответственно через  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N$ , а внутренние силы – через  $\vec{F}_{ik}$ .

На основании 2-го закона Ньютона:

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1) = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1N},$$

$$\frac{d}{dt}(m_2\vec{v}_2) = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{2N},$$

.....

$$\frac{d}{dt}(m_N\vec{v}_N) = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \dots + \vec{F}_{N(N-1)}.$$

⇓

$$\sum_{i=1}^N \frac{d(m_i\vec{v}_i)}{dt} = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}) + \dots + (\vec{F}_{(N-1)N} + \vec{F}_{N(N-1)}).$$

(2.5)



## 4. Механические системы. Закон сохранения импульса.

Согласно 3-му закону Ньютона  $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki} \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^N \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = 0.$$

$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \vec{P}$  – *вектор импульса всей системы.*  $\Rightarrow$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = 0,$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.6)$$

где  $i$  – номер точки (тела) механической системы.



**вектор импульса замкнутой системы тел с течением времени не изменяется – закон сохранения импульса для замкнутой механической системы.**

## 5. Центр масс. Закон движения центра масс.

*Центр масс* (или *центр инерции*) системы – геометрическая точка  $C$ , положение которой характеризует распределение масс в механической системе (или теле) и задается радиус-вектором  $\vec{R}_c$ :

$$\vec{R}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i\vec{r}_i}{M}, \quad (2.7)$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -ой частицы;  $\vec{r}_i$  – радиус-вектор, определяющий положение этой частицы;  $M$  – масса системы.

Декартовы координаты центра масс равны проекциям  $\vec{R}_c$  на координатные оси:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{M}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{M}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{M}. \quad (2.8)$$

## 5. Центр масс. Закон движения центра масс.

Скорость центра масс получается путем дифференцирования радиус-вектора  $\vec{R}_c$  (2.7) по времени:

$$\vec{V}_c = \frac{d\vec{R}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{M}, \quad (2.9)$$

где  $\vec{v}_i$  – скорость  $i$ -ой частицы.



$$\vec{V}_c = \vec{P} / M \Rightarrow \vec{P} = M\vec{V}_c. \quad (2.10)$$

Т. к.  $\vec{P} = const$ , то:

$$\vec{V}_c = const. \quad (2.11)$$



## 5. Центр масс. Закон движения центра масс.

Т. к.  $\vec{V}_C = const$ , то связав с ее центром масс систему отсчета, получим инерциальную систему отсчета, называемую *системой центра масс (центра инерции)*.

Импульс системы материальных точек в такой системе отсчета равен нулю.

*Уравнение движения центра масс системы:*

$$M \frac{d\vec{V}_C}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^e \quad \text{или} \quad M\vec{a}_C = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^e, \quad (2.12)$$

где  $\vec{a}_C = \frac{d\vec{V}_C}{dt}$  – *ускорение центра масс*;  $\vec{F}_i^e$  – *равнодействующая всех внешних сил, приложенных к  $i$ -тому телу системы.*



Если система замкнута, то  $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^e = 0$  и  $\vec{V}_C = const$ .

## 6. Центр тяжести тела.

*Центр тяжести* – геометрическая точка, неизменно связанная с твердым телом, через которую проходит равнодействующая всех сил тяжести, действующих на частицы тела при любом его положении в пространстве.

Разбивая тело на части (точки) с *весами*  $p_k$ , для которых координаты  $x_k, y_k, z_k$  их центров тяжести известны, можно найти координаты центра тяжести всего тела:

$$x = \frac{\sum_{k=1}^N p_k x_k}{\sum_{k=1}^N p_k}, y = \frac{\sum_{k=1}^N p_k y_k}{\sum_{k=1}^N p_k}, z = \frac{\sum_{k=1}^N p_k z_k}{\sum_{k=1}^N p_k}. \quad (2.13)$$

Тогда радиус-вектор центра тяжести тела равен

$$\vec{r}_{\text{цт}} = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N p_k \vec{r}_k, \quad (2.14)$$

где  $p_k$  – численное значение веса  $k$ -ой материальной точки;

$$P = \sum_{k=1}^N p_k.$$

## 6. Центр тяжести тела.

Поскольку  $\underline{p}_k = \underline{m}_k \underline{g}$ , то  $P = Mg$  и положение центра тяжести твердого тела в однородном поле тяжести совпадает с положением его центра масс:

$$\vec{r}_{\text{цт}} = \frac{1}{Mg} \sum_{k=1}^N m_k g \vec{r}_k = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k \equiv \vec{R}_C. \quad (2.15)$$

Центр тяжести однородного тела, имеющего центр симметрии (прямоугольная или круглая пластины, шар, цилиндр и др.), находится в этом центре.



## 6. Центр тяжести тела. (пластина с отрезанным углом)

