18.01.21.

Тема:
Комплексные числа. Понятие мнимой единицы. Алгебраическая форма комплексного числа. Последовательности.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://youtu.be/cTzO4wyt0t0

Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

Комплексные числа и арифметические операции над ними

Числа — один из основных математических объектов. Вам уже знакомы натуральные, целые, рациональные, иррациональные числа. Все вместе они образуют множество действительных чисел. В этой главе мы познакомимся с новой числовой системой — системой *комплексных чисел* (в слове *комплексных* предпочтительнее делать ударение на втором слоге). Термин *система* здесь употребляется не в том смысле, как вы привыкли, говоря о решении системы уравнений или системы неравенств; термин *система* означает множество объектов вместе с некоторым набором свойств и отношений. В математике часто говорят не «множество натуральных чисел» или «множество целых чисел», а «система натуральных чисел», «система целых чисел».

Понятие числа развивалось и изменялось на протяжении всей истории человечества. С течением времени числовые системы расширялись, становились более сложными, включая как составные части ранее известные числовые системы (например, система целых чисел включает в себя систему натуральных чисел). Каждая из числовых систем имела свои преимущества и свои недостатки. У более сложной системы больше различных возможностей по ее использованию и применению, но при этом и само построение такой системы, и знание многочисленных деталей, очевидно, требуют бóльших усилий и большего времени.

Об истории развития понятия числа можно написать отдельный учебник. Мы ограничимся только одной, чисто алгебраической, точкой зрения.

Рассмотрим «плюсы» и «минусы» основных числовых систем, они указаны в таблице на с. 241. Мы видим, что по мере продвижения по строкам этой таблицы от N к R список во втором столбце расширяется как раз за счет сужения списка в третьем столбце. Осталась частично допустимая операция извлечения корней из произвольных чисел, которая, как мы увидим, станет допустимой в системе комплексных чисел.

Числовая система	Допустимые алгебраические операции	Частично допустимые алгебраические операции
Натуральные числа, $\boldsymbol{N}$	Сложение, умножение	*Вычитание*, деление, извлечение корней. Например, можно вычислить $7 - 5$, $48 : 4$, $\sqrt[3]{27}$; но, с другой стороны, уравнения $3x + 2000 = 1001$, $4x = 3$, $x^2 = 10$ не имеют корней в $\boldsymbol{N}$
Целые числа, $\boldsymbol{Z}$	Сложение, *вычитание*, умножение	*Деление*, извлечение корней. Например, можно вычислить $(-48) : (-3)$, $\sqrt{36}$; но, с другой стороны, уравнения $5x - 3 = 2004$, $x^2 = 999$ не имеют корней в $\boldsymbol{Z}$
Рациональные числа, $\boldsymbol{Q}$	Сложение, вычитание, умножение, *деление*	*Извлечение корней из неотрицательных чисел.* Например, можно вычислить $\sqrt{\frac{81}{169}}$; но, с другой стороны, уравнения $x^2 = 2$, $3x^4 - 5 = 2003$ не имеют корней в $\boldsymbol{Q}$
Действительные числа, $\boldsymbol{R}$	Сложение, вычитание, умножение, деление, *извлечение корней из неотрицательных чисел*	*Извлечение корней из произвольных чисел.* Например, можно вычислить $\sqrt[3]{7}$; но, с другой стороны, уравнения $x^2 = -1$, $2x^4 + 5x^2 + 3 = 0$ не имеют корней в $\boldsymbol{R}$
Комплексные числа, $\boldsymbol{C}$	Все операции	

Переходим к непосредственному построению множества (системы) $\boldsymbol{C}$ комплексных чисел, но сначала напомним еще раз схему взаимного расположения основных, последовательно расширяющихся числовых систем:

$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}.$$

Несколько слов по поводу обозначений. $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{C}$ — это начальные буквы слов соответственно «natural», «real», «complex». Обозначение $\boldsymbol{Z}$ для множества целых чисел напоминает об исключительной роли нуля — «zero». Буква $\boldsymbol{Q}$ для множества рациональных чисел выбрана в связи с тем, что рациональные числа представимы в виде отношения или частного, а слово «quotient» как раз и переводится как «отношение».

Перечислим сначала те минимальные условия, которым должны удовлетворять комплексные числа.

C_1) *Существует комплексное число, квадрат которого равен −1.*

C_2) *Множество комплексных чисел содержит все действительные числа.*

C_3) *Операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел удовлетворяют обычным законам арифметических действий* (сочетательному, переместительному, распределительному).

Оказывается, выполнение этих минимальных условий позволяет определить все множество $\boldsymbol{C}$ комплексных чисел.

Условия C_1 и C_2 заставляют добавить к множеству $\boldsymbol{R}$ действительных чисел, как минимум, один новый элемент и по определению считать, что квадрат этого элемента равен −1. Такой элемент называют *мнимой единицей* и обозначают i. Это обозначение предложил в XVIII веке Л. Эйлер. Символ i в данном случае просто сокращение от «imaginary» («imaginaire») , что переводится с английского (с французского) как «мнимый, воображаемый».

$$\boxed{i^2 = -1,\ i \text{ — мнимая единица.}}$$

Условия C_2 и C_3 позволяют умножать действительные числа на мнимую единицу. Такие произведения называют *чисто мнимыми* числами. Например, i, $2i$, $-0{,}3i$, $\frac{2}{7}i$, $\sqrt{10}\cdot i$ — чисто мнимые числа. Арифметические операции над чисто мнимыми числами выполняются в соответствии с условием C_3. Например,

$$3i + 13i = (3 + 13)i = 16i,$$

$$3i \cdot 13i = (3 \cdot 13)(i \cdot i) = 39i^2 = -39,$$

$$i^7 = (i^2)^3 \cdot i = (-1)^3 i = -i.$$

В общем виде правила арифметических операций с чисто мнимыми числами таковы:

$$ai + bi = (a + b)i; \quad ai - bi = (a - b)i;$$
$$a(bi) = (ab)i; \quad (ai)(bi) = abi^2 = -ab$$
$$(a \text{ и } b \text{ — действительные числа}).$$

Кроме того, удобно (и естественно), по определению, считать, что $0 \cdot i = 0$. Число 0 — единственное число, являющееся одновременно и действительным, и чисто мнимым.

Условия C_2 и C_3 позволяют не только перемножать, но и складывать действительные числа и чисто мнимые числа, т. е. рассматривать суммы вида $a + bi$, где a и b — любые действительные числа. Если $a = 0$, то $a + bi = 0 + bi = bi$ — чисто мнимое число. Если $b = 0$, то $bi = 0 \cdot i = 0$ и $a + bi = a + 0 = a$ — действительное число. В остальных случаях суммы $a + bi$ не являются ни действительными, ни чисто мнимыми числами, они являются новыми, более сложными, «составными» числами. Заметим, что прилагательное «complex» как раз и переводится как «сложный, составной». Оказывается, что такими суммами исчерпываются вообще все комплексные числа.

Определение 1. **Комплексным числом** называют сумму действительного числа и чисто мнимого числа.

$$\boxed{\begin{gathered} z = a + bi \in C \Leftrightarrow a \in R, b \in R, \\ i \text{ — мнимая единица.} \end{gathered}}$$

В записи $z = a + bi$ число a называют *действительной* частью комплексного числа z, а число b — *мнимой* частью комплексного числа z.

Определение 2. Два комплексных числа называют **равными**, если равны их действительные части и равны их мнимые части:

$$\boxed{a + bi = c + di \;\Leftrightarrow\; a = c, b = d.}$$

Между комплексным числом $a + 0 \cdot i$ и действительным числом a обычно не делают никакой разницы, подобно тому, как, например, говорят о числе 3 на оси абсцисс, хотя, формально, полагалось бы говорить о точке (3; 0). Действительные числа — это комплексные числа с нулевой мнимой частью. Значит, выполняется соотношение $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$.

Арифметические операции над комплексными числами выполняются в соответствии с условием C_3. Например, найдем сумму комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (bi + di) = \\ = (a + c) + (b + d)i.$$

Аналогично находится разность комплексных чисел:

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Для произведения комплексных чисел формула получается более сложной. Вот она:

$$\boxed{(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i.}$$

Можно, конечно, выучить ее, но надежнее понимать, как она получена. В соответствии с условием C_3, следует в произведении $(a + bi) \cdot (c + di)$ раскрыть скобки и привести подобные члены:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + (bi)c + a(di) + (bi)(di) = \\ = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

Пример 1. Даны комплексные числа $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 3 + i$, $z_3 = -7i$. Вычислить:

а) $z_1 z_2$; б) $z_1 + z_2 z_3$; в) $z_1(z_2 - z_3)$; г) $z_1 + (z_2)^2 + (z_3)^3$.

Решение.

а) $z_1 z_2 = (1 - 2i)(3 + i) = 3 - 6i + i - 2i^2 = 3 - 5i + 2 = 5 - 5i = 5(1 - i)$.

б) $z_1 + z_2 z_3 = (1 - 2i) + (3 + i)(-7i) = 1 - 2i - 21i - 7i^2 = 8 - 23i$.

в) $z_1(z_2 - z_3) = (1 - 2i)(3 + i + 7i) = (1 - 2i)(3 + 8i) = 3 - 6i + 8i - 16i^2 = 19 + 2i$.

г) Найдем отдельно второе и третье слагаемые:

$(z_2)^2 = (3 + i)(3 + i) = 9 + 3i + 3i + i^2 = 8 + 6i$;

$(z_3)^3 = (-7i)(-7i)(-7i) = (-7)^3 i^3 = -343(i^2)i = 343i$.

Значит, $z_1 + (z_2)^2 + (z_3)^3 = (1 - 2i) + (8 + 6i) + 343i = 9 + 347i$.

Заметим, что $(z_2)^2$ можно было вычислить изящнее. Ведь мы говорили, что на множестве комплексных чисел действуют привычные правила и законы арифметических действий; в частности, выполняются привычные формулы сокращенного умножения. Поэтому можно было действовать так:

$$(z_2)^2 = (3 + i)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot i + i^2 = 9 + 6i - 1 = 8 + 6i. \quad \blacksquare$$

Практическая часть.

Вычислите:

32.5. а) i^3; б) i^5; в) i^{22};

32.10. а) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$; в) $z_1 = -i$, $z_2 = 1 - i$;
б) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + 2i$; г) $z_1 = i^3 + 4i^4$, $z_2 = i^2 - 3(-i)^3$.

Вычислите:

32.19. а) $i(1 + i)$; в) $(4 - 3i)i$;
б) $i(-3 + 2i)$; г) $i(4 - 3i)i(4 + 3i)$.

32.20. а) $(1 - 2i)(1 + i)$; в) $(4 - 3i)(-4 + 3i)$;
б) $(1 - i)(1 + i)$; г) $(12 + 5i)(12 - 5i)$.