1.2 Логика

Для занятий по логике может быть полезна книга [6].

1.2.1 Что такое «контрпример»? Все и некоторые

Знаете ли вы, что такое «**контрпример**»? Сейчас объясним. Допустим, на заборе написано:

Каждый семиклассник знает, что такое контрпример.

Согласны ли вы с этим утверждением? Нет? Если вы — семиклассник и не знаете, что такое контрпример, то **вы как раз и являетесь контрпримером к этому утверждению**!

Пример 6. Приведём теперь пример из арифметики. Однажды Незнайка заявил:

$\boxed{\text{Произведение двух двузначных чисел всегда четырёхзначно!}}$

$\boxed{\rightarrow}$

и в качестве подтверждения добавил:
«Например, $32 \cdot 50 = 16 \cdot 100 = 1600$, а $99 \cdot 11 = 990 + 99 = 1089$!».
Убеждает ли вас Незнайкино «подтверждение»? Верно ли его заявление?

Незнайка вспомнил, что утром покупал 10 пачек мороженого по 85 рублей за пачку, и заплатил всего 850 рублей. Это воспоминание обрушило все его «подтверждающие примеры»: как сказать «всегда четырёхзначно», если утром было трёхзначно!

Равенство «$10 \cdot 85 = 850$» является *контрпримером* к утверждению «*Произведение двух двузначных чисел всегда четырёхзначно*», т.к. оно показывает, что *иногда* такое произведение не четырёхзначное, а, например, трёхзначное.

Ответ. Утверждение Незнайки неверно (и, тем более, его «подтверждение» нас не убеждает).

Пример 7. Осознав ошибку, Незнайка сказал:

$\boxed{\rightarrow}$ $\boxed{\text{Произведение двух двузначных чисел либо трёхзначно, либо четырёхзначно}}$

и добавил: «Ведь $15 \cdot 16 = 30 \cdot 8 = 240$, а $64 \cdot 16 = 32 \cdot 32 = 1024$!».
Верно ли теперь Незнайкино заявление? А его новое «подтверждение»?

Воспоминание о покупке мороженого указало Незнайке на неправильность его утверждения, но пока не научило его правильно обосновывать свои утверждения. Что будет толку в его примерах («$15 \cdot 16 = 30 \cdot 8 = 240$» и «$64 \cdot 16 = 32 \cdot 32 = 1024$»), если кто-нибудь придумает всего один *контрпример*, в котором результат будет не трёхзначным и не четырёхзначным?

Чтобы обосновать Незнайкино утверждение, нужно *доказать*, что оно верно, т.е. что контрпримера к нему не существует. Есть разные способы доказательства.

$\boxed{\mathcal{M}}$ *Способ 1:* **перебор**. Если вычислить *все* произведения двух двузначных чисел и для каждого проверить, сколько цифр у произведения, то мы либо найдём контрпример, либо докажем, что контрпримера нет, т.е. утверждение верно. Однако таких произведений много. . .

$\boxed{?}$ **Вопрос 9.** Кстати, сколько пришлось бы вычислить произведений, чтобы проверить Незнайкино утверждение методом перебора?

$\boxed{\mathcal{M}}$ *Способ 2: оценка.* **Оценим** возможную величину произведения двух двузначных чисел. Ясно, что самое маленькое произведение получится в случае $10 \cdot 10 = 100$, а самое большое в случае $99 \cdot 99 = (100-1)(100-1) = 10000 - 100 - 100 + 1 = 9801$. Между 100 и 9801 есть только трёхзначные и четырёхзначные числа, значит, все произведения будут иметь только 3 или 4 знака. Утверждение доказано!

Ответ. Заявление Незнайки верно, но его «подтверждение» не является доказательством.

Замечание 5. В следующих задачах есть слова «постарайтесь доказать». Однако в ряде случаев ребятам может не хватать алгебраической подготовки и / или опыта абстрактных рассуждений. На усмотрение учителя вполне можно оставлять строгие доказательства на потом. Главное сейчас — начать говорить о необходимости доказательств и учиться отличать настоящие доказательства от рассуждений вроде «дважды сошлось, значит, всегда сойдётся».

Задача 78. Проверьте, какие из следующих утверждений верны, а какие — нет. Опровергните неверные утверждения, а верные — постарайтесь доказать.

а) Сумма двух двузначных чисел всегда двузначна.

б) Сумма двух нецелых чисел — всегда нецелое число.

в) Некоторые пары нецелых чисел имеют целочисленное произведение.

г) Все положительные обыкновенные дроби уменьшаются, если их знаменатель увеличивают, а числитель оставляют неизменным.

д) Сумма двух десятичных дробей, у каждой из которых один знак после запятой, не может иметь два знака после запятой.

е) Сумма двух десятичных дробей, у каждой из которых два знака после запятой, не может иметь только один знак после запятой.

ж) Произведение двух десятичных дробей, у каждой из которых один знак после запятой, не может иметь один знак после запятой.

з) Произведение нецелой десятичной дроби и нечётного числа — всегда нецелое число.

и) Сумма трёх несократимых дробей с различными знаменателями не может быть 1.

к*) Сумма трёх несократимых дробей с различными числителями и различными знаменателями не может быть равна 1.

Задача 79. Проверьте, какие из следующих утверждений верны, а какие — нет. Опровергните неверные утверждения, а верные — постарайтесь доказать.

а) Сумма двух чётных чисел всегда чётна.

б) Сумма чётного и нечётного числа всегда нечётна.

в) Сумма двух последовательных натуральных чисел не может быть равна 45.

г) Сумма двух последовательных натуральных чисел не может быть равна 46.

д) Все чётные числа делятся на 2.

е) Некоторые чётные числа делятся на 2.

ж) Все нечётные числа делятся на 3.

з) Некоторые нечётные числа делятся на 3.

и) Некоторые трёхзначные числа делятся на 37.

1.2.2 Логика: если – то, $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$. Признаки делимости

Значком $\Rightarrow$ в математике обозначается следствие. Например, вместо «если число двузначное, то оно меньше 100» можно написать $\boxed{\text{число двузначное}} \Rightarrow \boxed{\text{число меньше 100}}$.

Ко всякому утверждению типа «если..., то...» можно сформулировать *обратное*, поменяв местами *посылку* (то, что стоит после «если») и *следствие* (стоящее после «то»). Иными словами, направив стрелочку в противоположную сторону.

Например, обратным утверждением к нашему примеру будет: «если число меньше 100, то оно двузначное». Как вы понимаете, это неверно, потому что, например, число 8 меньше 100, но оно не двузначное. Можно записать: $\boxed{\text{число меньше 100}} \not\Rightarrow \boxed{\text{число двузначное}}$.

Бывает, что верно и *прямое* (данное) утверждение, и обратное к нему. Например, утверждения «$x = 0{,}1 \Rightarrow 10x = 1$» и «$10x = 1 \Rightarrow x = 0{,}1$» оба верны. В таких случаях говорят, что посылка и следствие *равносильны* и используют значок $\Leftrightarrow$: $x = 0{,}1 \Leftrightarrow 10x = 1$.

Мы пока не будем углубляться во множество вопросов, связанных со следствиями и равносильностями, лишь научимся различать прямое и обратное утверждения, посылку и следствие, а также опровергать утверждения с помощью контрпримера и доказывать признаки делимости. Желающим глубже вникнуть в логику рекомендуем книгу [6].

Пример 8. Расставьте стрелочки $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$ между утверждениями про целое число N: $\boxed{N \text{ делится на } 2}$, $\boxed{N \text{ делится на } 4}$, $\boxed{N \text{ оканчивается на } 36}$, $\boxed{N \text{ делится на } 6}$.

Решение. Первое утверждение просто означает, что число чётно. Не всякое чётное число делится на 4 (например, чётное число 10 на 4 не делится). Зато число, которое можно нацело разделить на 4, обязательно делится на 2. Просто при делении на 2 частное получится вдвое больше, чем при делении на 4. Иными словами, $\frac{N}{2} = 2 \cdot \frac{N}{4}$.

Итак, $\boxed{N \text{ делится на } 4} \Rightarrow \boxed{N \text{ делится на } 2}$, но не наоборот.

Посмотрим на третье утверждение. Число 120, например, делится на 2, 4, 6, но на 36 не оканчивается, поэтому третье утверждение не вытекает ни из одного из остальных. Число 136 оканчивается на 36, но на 6 не делится ($136 = 6 \cdot 22 + 4$, т.е. остаток от деления 136 на 6 равен 4). Значит, между третьим и четвёртым утверждением никаких следствий поставить нельзя. Зато числа 36, 136, 236, 336 и т.д. чётны и, кроме того, делятся на 4.

Докажем, что любое число, оканчивающееся на 36, делится на 4.

Пусть дано любое натуральное число, оканчивающееся на 36. Вычтем из него 36 — получим число, оканчивающееся на два нуля. Это число состоит из целого числа сотен, например $536 - 36 = 500 = 5 \cdot 100 =$ пять сотен, $1836 - 36 = 1800 = 18 \cdot 100 =$18 сотен. Каждая сотня состоит из 25 четвёрок, то есть делится на 4. Значит и целое число сотен делится на 4, а вместе с ним и наше число, уменьшенное на 36. Но и 36 делится на 4, поэтому прибавление 36 не испортит делимость на 4. Например, $536 = 36 + 5 \cdot 100 = 9 \cdot 4 + 5 \cdot 25 \cdot 4 = (9 + 5 \cdot 25) \cdot 4$, $1836 = 36 + 18 \cdot 100 = 9 \cdot 4 + 18 \cdot 25 \cdot 4 = (9 + 18 \cdot 25) \cdot 4$.

Осталось разобраться с последним утверждением: $\boxed{N \text{ делится на } 6}$. Понятно, что на 6 могут делиться только чётные числа (доказательство аналогично доказательству следствия $\boxed{N \text{ делится на } 4} \Rightarrow \boxed{N \text{ делится на } 2}$). Поэтому $\boxed{N \text{ делится на } 6} \Rightarrow \boxed{N \text{ делится на } 2}$. Но не наоборот (контрпример: 10), а также неверны стрелки $\boxed{N \text{ делится на } 6} \Rightarrow \boxed{N \text{ делится на } 4}$ (контрпример: 18) и $\boxed{N \text{ делится на } 4} \Rightarrow \boxed{N \text{ делится на } 6}$ (контрпример: 8). Связи с третьим утверждением мы уже проверяли.

Итак, мы доказали, что

$\boxed{N \text{ оканчивается на } 36} \Rightarrow \boxed{N \text{ делится на } 4} \Rightarrow \boxed{N \text{ делится на } 2} \Leftarrow \boxed{N \text{ делится на } 6}$.

кроме того, как видно из нашей схемы, $\boxed{N \text{ оканчивается на } 36} \Rightarrow \boxed{N \text{ делится на } 2}$, но больше между этими утверждениями верных следствий поставить нельзя.

Ответ. $\boxed{N \text{ оканчивается на } 36} \Rightarrow \boxed{N \text{ делится на } 4} \Rightarrow \boxed{N \text{ делится на } 2} \Leftarrow \boxed{N \text{ делится на } 6}$.

Замечание 6. Разбирая решение примера 8, мы доказали, что число, оканчивающееся на 36, делится на 4. Это частный случай известного признака делимости на 4:

$\boxed{\text{данное число делится на 4}} \Leftrightarrow \boxed{\text{число, образованное последними двумя цифрами в десятичной записи данного числа, делится на 4}}$

Задача 87. Укажите, какие из следующих утверждений верны, а какие — нет. Опровергните неверные утверждения с помощью *контрпримера*, а верные утверждения докажите.

а) Если число оканчивается на 4, то оно делится на 4.

б) Если число оканчивается на 5, то оно делится на 5.

в) Если число делится на 5, то оно оканчивается на 5.

г) Если число оканчивается на 24, то оно делится на 4.

д) Если число оканчивается на 5, то оно делится на 5.

е) Если число оканчивается на 7, то оно не делится на 6.

Задача 88. Докажите признак делимости на 4 из замечания 6, а также сформулируйте и докажите аналогичные признаки делимости на

а) 2; **б)** 8; **в)** 5; **г)** 25; **д)** 125.

Задача 89. Расставьте стрелочки $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ между утверждениями про целое число N:

$\boxed{N \text{ делится на } 24}$, $\boxed{N \text{ делится на } 6 \text{ и на } 4}$, $\boxed{N \text{ делится на } 12}$, $\boxed{N \text{ делится на } 9}$.