

Лекция 8.
Тема: Плоскость

Теорема. В пространстве каждая плоскость может быть задана линейным уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

и наоборот, т.е. любое линейное уравнение в пространстве определяет плоскость.

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы о прямой линии на плоскости.

Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ называется общим уравнением плоскости.

Замечание 1. Аналогично следует, что вектор $\vec{N}(A; B; C)$ является нормальным вектором плоскости.

Пример 1. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости Oyz .

Поскольку в этом случае $\bar{N}(A; 0; 0)$, то уравнение искомой плоскости будет иметь следующий вид $Ax + D = 0$.

Удобно и наглядно строить плоскость по её следам на координатных плоскостях, которые определяются из следующих систем уравнений:

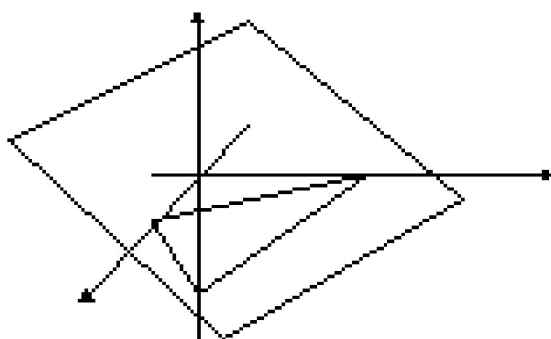
$$\begin{cases} Ax + By + D = 0; \\ z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} By + Cz + D = 0; \\ x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} Ax + Cz + D = 0; \\ y = 0. \end{cases}$$

Пример 2. Построить z плоскость, заданную общим уравнением $2x + y - z - 2 = 0$.

Определим координаты точек пересечения с осями координат:

$$(1, 0, 0), (0, 2, 0) \text{ и } (0, 0, -2)$$

и соединим эти точки отрезками.



Пусть требуется составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}(A; B; C)$. Пусть точка $M(x; y; z)$ – текущая точка плоскости. Тогда вектор $\overline{M_0M}$, лежащий на плоскости, перпендикулярен вектору \vec{N} .

Таким образом, из этого условия получаем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) является искомым уравнением плоскости.

Пример 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz .

В этом случае вектор нормали к плоскости $\vec{N}(A; B; 0)$, а в качестве точки M_0 выберем начало координат. Тогда из уравнения (1) имеем $Ax + By = 0$.

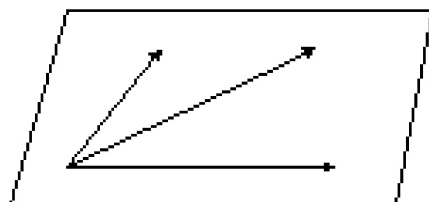
Уравнение в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Требуется составить уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$M_1(x_1; y_1; z_1); M_2(x_2; y_2; z_2); M_3(x_3; y_3; z_3).$$

Пусть точка $M(x; y; z)$ – текущая точка плоскости. Построим векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$.



Они компланарны, т.е. их смешанное произведение $(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}) = 0$

$$\text{ИЛИ} \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Уравнение плоскости через три точки

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точки $A(2; 1; 3)$; $B(1; -2; -4)$.

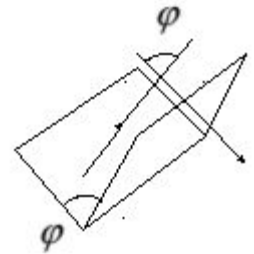
Из уравнения (2) получим
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 11y - 5z = 0.$$

Угол между плоскостями

Пусть две плоскости заданы общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$



Очевидно, угол между двумя плоскостями равен углу между их нормальными векторами.

Из этого следует φ

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (3)$$

Если плоскости перпендикулярны, то $\cos \varphi = 0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Если плоскости параллельны, то их нормальные векторы коллинеарны и тогда условие параллельности принимает вид $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Пример 5. Найти угол между плоскостями, заданными уравнениями $2x + y - 2z - 1 = 0$ и $x + 4y + 3z + 2 = 0$.

По формуле (3) получаем

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3}{\sqrt{4 + 1 + 4} \sqrt{1 + 16 + 9}} = 0,$$

т.е. данные плоскости перпендикулярны.

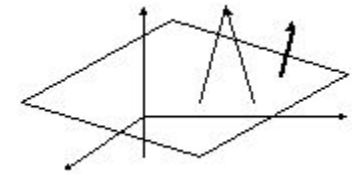
Условие параллельности плоскостей

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \iff \overline{n_1} \parallel \overline{n_2} \implies \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Условие перпендикулярности плоскостей

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \iff \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \implies \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0$$

Расстояние от точки до ПЛОСКОСТИ



Требуется найти расстояние от плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ до точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Рассуждая аналогично, как и для случая прямой на плоскости, получаем

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax - By - Cz|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (4)$$

Пример 6. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x - 2y - z + 3 = 0$ и отстоящей от неё на расстояние $d = 5$.

Уравнение искомой плоскости в силу условия параллельности имеет вид $2x - 2y - z + D = 0$. Возьмём любую точку, принадлежащую плоскости, например, точку $M(0; 0; 3)$. Тогда, используя формулу (4), получим

$$\frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 + D|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 5$$

или

$$|-3 + D| = 15 \Rightarrow -3 + D = \pm 15,$$

т.е. $D_1 = -18$; $D_2 = 12$ и тогда получаем две плоскости, удовлетворяющие условию задачи, $2x - 2y - z - 18 = 0$; $2x - 2y - z + 12 = 0$.

Прямая в пространстве

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{q}$$

Параметрические уравнения

$$x = mt + x_0, \quad y = pt + y_0, \quad z = qt + z_0$$

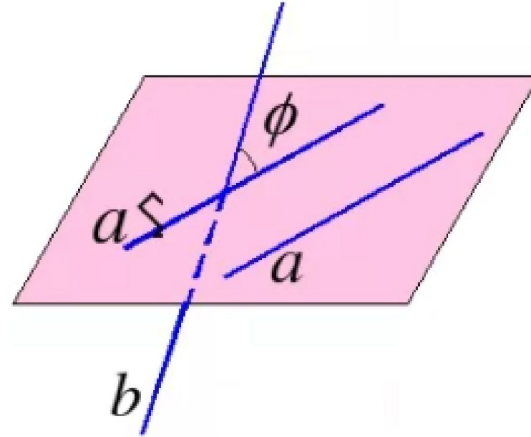
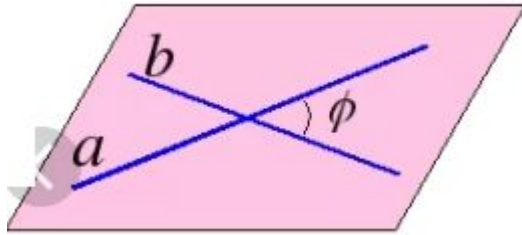
Уравнение прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Общие уравнения прямой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

Угол между прямыми



$$\cos \phi = \frac{\overline{a_1} \cdot \overline{a_2}}{|\overline{a_1}| \cdot |\overline{a_2}|} = \frac{m_1 m_2 + p_1 p_2 + q_1 q_2}{\sqrt{m_1^2 + p_1^2 + q_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + p_2^2 + q_2^2}}.$$

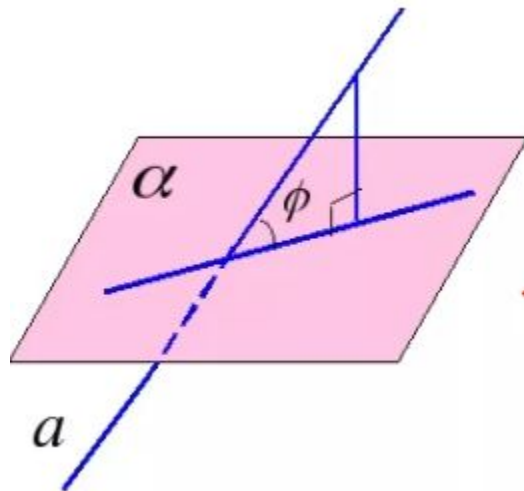
Параллельность прямых

Если $\overline{a_1} \parallel \overline{a_2}$, то $\overline{a_1} \parallel \overline{a_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2}$.

Перпендикулярность прямых

Если $\ell_1 \perp \ell_2$ то $\overline{a_1} \perp \overline{a_2} \Rightarrow \overline{a_1} \cdot \overline{a_2} = 0$

Угол между прямой и плоскостью



$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{|Am + Bp + Cq|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + p^2 + q^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости

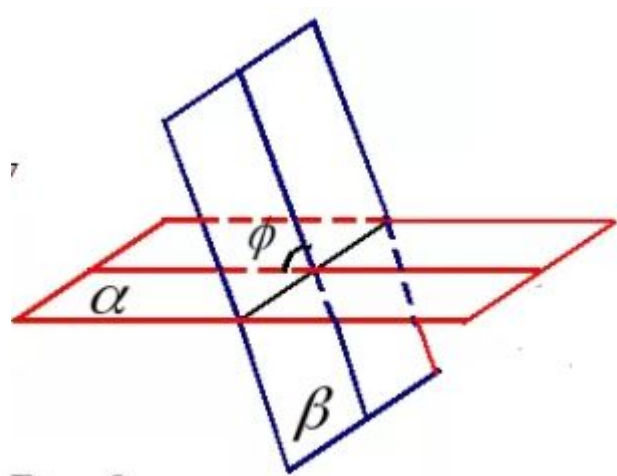
Если $\square \parallel \alpha$, то $Am + Bp + Cq = 0$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости

Если $\square \perp \alpha$,

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{p} = \frac{C}{q}$$

Угол между плоскостями



$$A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \quad ,$$
$$A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0 \quad .$$

$$\cos \varphi = \frac{\overline{N_1} \cdot \overline{N_2}}{|\overline{N_1}| \cdot |\overline{N_2}|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} .$$