Лекция 8.
Тема: Плоскость

Теорема. В пространстве каждая плоскость может быть задана линейным уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

и наоборот, т.е. любое линейное уравнение в пространстве определяет плоскость.

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы о прямой линии на плоскости.

Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ называется общим уравнением плоскости.

Замечание 1. Аналогично следует, что вектор $\bar{N}(A; B; C)$ является нормальным вектором плоскости.

Пример 1. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости Oyz.

Поскольку в этом случае $\bar{N}(A;\,0;\,0)$, то уравнение искомой плоскости будет иметь следующий вид $Ax + D = 0$.

Удобно и наглядно строить плоскость по её следам на координатных плоскостях, которые определяются из следующих систем уравнений:

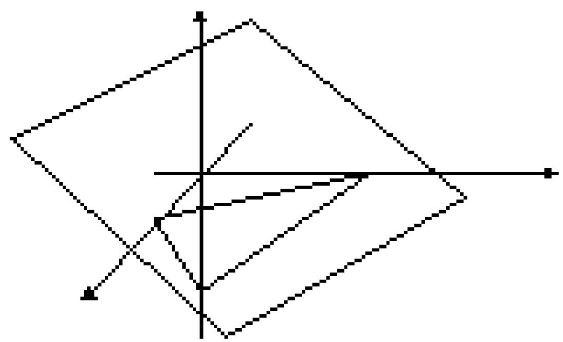
$$\begin{cases} Ax + By + D = 0; \\ z = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} By + Cz + D = 0; \\ x = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} Ax + Cz + D = 0; \\ y = 0. \end{cases}$$

Пример 2. Построить z плоскость, заданную общим уравнением $2x + y - z - 2 = 0$.

Определим координаты точек пересечения с осями координат:

$$(1\ ,\ 0\ ,\ 0)\ ,\ (0\ ,\ 2\ ,\ 0)\ \text{ и } (0\ ,\ 0\ ,\ -2)$$

и соединим эти точки отрезками.



Пусть требуется составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{N}(A;\,B;\,C)$. Пусть точка $M(x;\,y;\,z)$ – текущая точка плоскости. Тогда вектор $\overline{M_0M}$, лежащий на плоскости, перпендикулярен вектору $\bar{N}$.

Таким образом, из этого условия получаем

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \quad (1)$$

Уравнение (1) является искомым уравнением плоскости.

Пример 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz.

В этом случае вектор нормали к плоскости $\bar{N}(A; B; 0)$, а в качестве точки M_0 выберем начало координат. Тогда из уравнения (1) имеем $Ax + By = 0$.

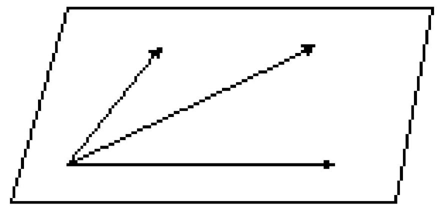
Уравнение в отрезках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{в}+\frac{z}{c}=1.$$

Требуется составить уравнение плоскости, проходящей через три точки

$M_1(x_1\,;\,y_1\,;\,z_1);\;\; M_2(x_2\,;\,y_2\,;\,z_2);\;\; M_3(x_3\,;\,y_3\,;\,z_3).$

Пусть точка $M(x;\,y;\,z)$ – текущая точка плоскости. Построим векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$.



Они компланарны, т.е. их смешанное произведение $(\overline{M_1M},\ \overline{M_1M_2},\ \overline{M_1M_3})=0$

или
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \quad (2)$$

Уравнение плоскости через три точки

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

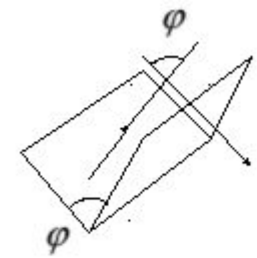
Пример 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точки $A(2;1;3)$; $B(1;-2;-4)$.

Из уравнения (2) получим $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 11y - 5z = 0.$

Угол между плоскостями

Пусть две плоскости заданы общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$



Очевидно, угол между двумя плоскостями равен углу между их нормальными векторами.

Из этого следует φ

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (3)$$

Если плоскости перпендикулярны, то $\cos\varphi = 0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Если плоскости параллельны, то их нормальные векторы коллинеарны и тогда условие параллельности принимает вид $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Пример 5. Найти угол между плоскостями, заданными уравнениями $2x + y - 2z - 1 = 0$ и $x + 4y + 3z + 2 = 0$.

По формуле (3) получаем

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot 4 - 2\cdot 3}{\sqrt{4+1+4}\,\sqrt{1+16+9}} = 0,$$

т.е. данные плоскости перпендикулярны.

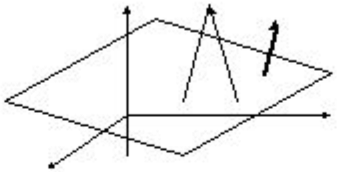
Условие параллельности плоскостей

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \parallel \overline{n_2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Условие перпендикулярности плоскостей

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \iff \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \Rightarrow \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0$$

Расстояние от точки до плоскости



Требуется найти расстояние от плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ до точки $M_0(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$. Рассуждая аналогично, как и для случая прямой на плоскости, получаем

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0-Ax-By-Cz\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.\quad(4)$$

Пример 6. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x-2y-z+3=0$ и отстоящей от неё на расстояние $d=5$.

Уравнение искомой плоскости в силу условия параллельности имеет вид $2x-2y-z+D=0$. Возьмём любую точку, принадлежащую плоскости, например, точку $M(0;\ 0;\ 3)$. Тогда, используя формулу (4), получим

$$\frac{|2\cdot 0-2\cdot 0-1\cdot 3+D|}{\sqrt{4+4+1}}=5$$

или

$$|-3+D|=15 \quad\Rightarrow\quad -3+D=\pm 15,$$

т.е. $D_1=-18;\ D_2=12$ и тогда получаем две плоскости, удовлетворяющие условию задачи, $2x-2y-z-18=0$; $2x-2y-z+12=0$.

Прямая в пространстве

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{q}$$

Параметрические уравнения

$$x = mt + x_o\,,\;\; y = pt + y_o\,,\;\; z = qt + z_o$$

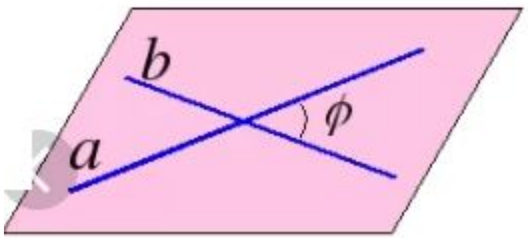
Уравнение прямой, проходящей через две точки

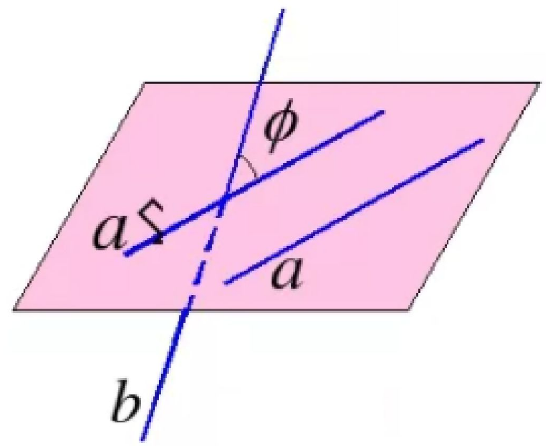
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Общие уравнения прямой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

Угол между прямыми





$$\cos\varphi = \frac{\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}}{\left|\overline{a_1}\right|\cdot\left|\overline{a_2}\right|} = \frac{m_1m_2 + p_1p_2 + q_1q_2}{\sqrt{m_1^2 + p_1^2 + q_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2 + p_2^2 + q_2^2}}.$$

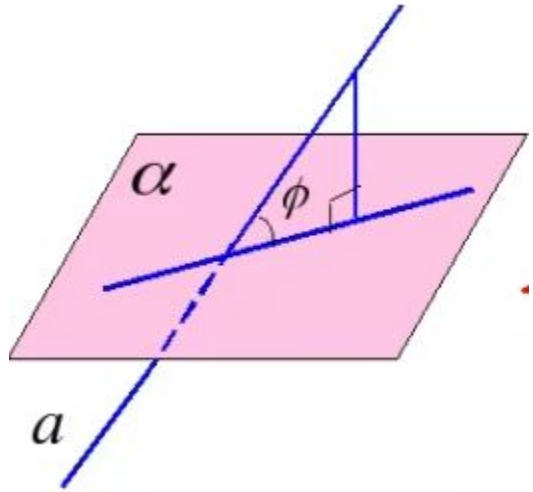
Параллельность прямых

Если $\ell_1 \| \ell_2$, то $$\overline{a_1} \| \overline{a_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2}.$$

Перпендикулярность прямых

Если $\boxtimes_1 \perp \boxtimes_2$ то $\overline{a_1} \perp \overline{a_2} \Rightarrow \overline{a_1} \cdot \overline{a_2} = 0$

Угол между прямой и плоскостью



$$\sin\varphi = \frac{\left|\overline{n}\cdot\overline{a}\right|}{\left|\overline{n}\right|\cdot\left|\overline{a}\right|} = \frac{\left|Am+Bp+Cq\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+p^2+q^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости

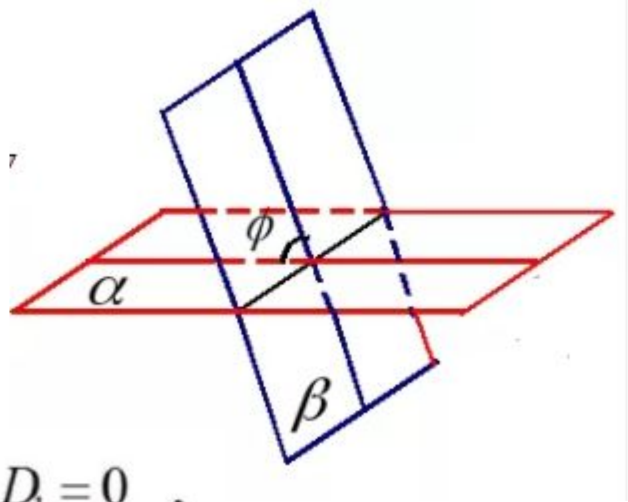
Если $\boxtimes \parallel \alpha$, то $Am + Bp + Cq = 0$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости

Если □ $\perp \alpha$,

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{p} = \frac{C}{q}$$

Угол между плоскостями



$$A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \quad ,$$

$$A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0 \quad .$$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N_1} \cdot \overline{N_2}}{\left|\overline{N_1}\right| \cdot \left|\overline{N_2}\right|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} .$$