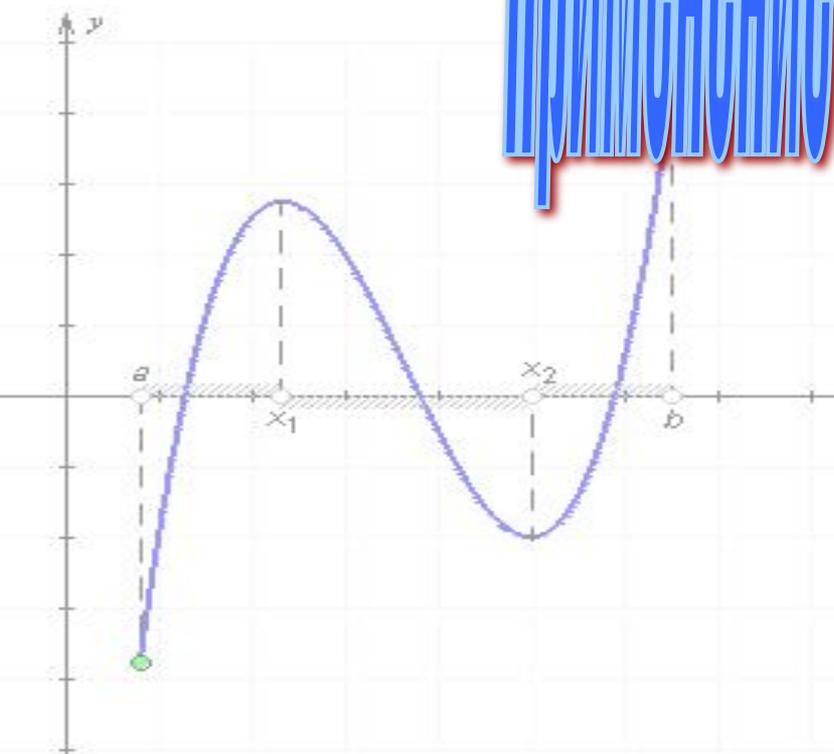


Применение производной к исследованию функции



Виноградова Татьяна Игоревна.
учитель математики
школа №26 Невский район

Исторические сведения.

Дифференциальное исчисление создано **Ньютоном и Лейбницем** в конце **17** столетия.

Понятие производной встречалось в работах итальянского математика **Тартальи** (около **1500 - 1557** гг.) – здесь появилась касательная в ходе изучения вопроса об угле наклона орудия, при котором обеспечивается наибольшая дальность полета снаряда.

В **17** веке на основе учения **Г.Галилея** о движении активно развивалась кинематическая концепция производной. Различные изложения стали встречаться в работах у **Декарта**, французского математика **Роберваля**, английского ученого **Л. Грегори**, а также в работах **Ньютона**. Большой вклад в изучение дифференциального исчисления внесли **Лейбниц, Лопиталь, Бернулли, Лагранж, Эйлер, Гаусс**.

Однако у создателей дифференциального исчисления возникли проблемы, связанные с тем, что точные определения таких основных понятий как предел, непрерывность, действительное число, отсутствовали, рассуждения содержали логические пробелы, а иногда были ошибочны.

Таким образом, "новая" математика не отвечала стандартам строгости, привычным для ученых, воспитанных на классических образцах греческих математиков.

Гениальная интуиция таких гигантов, как **Ньютон**, **Лейбниц**, **Эйлер** помогала им избегать ошибок.

Характерны 2 высказывания, относящиеся к **18**-му столетию. Известный математик **М. Ролль** писал, что новая наука есть коллекция гениальных ошибок.

А великий французский мыслитель - **Вольтер** заметил, что это исчисление представляет собой искусство вычислять и точно измерять вещи, существование которых не может быть доказано.

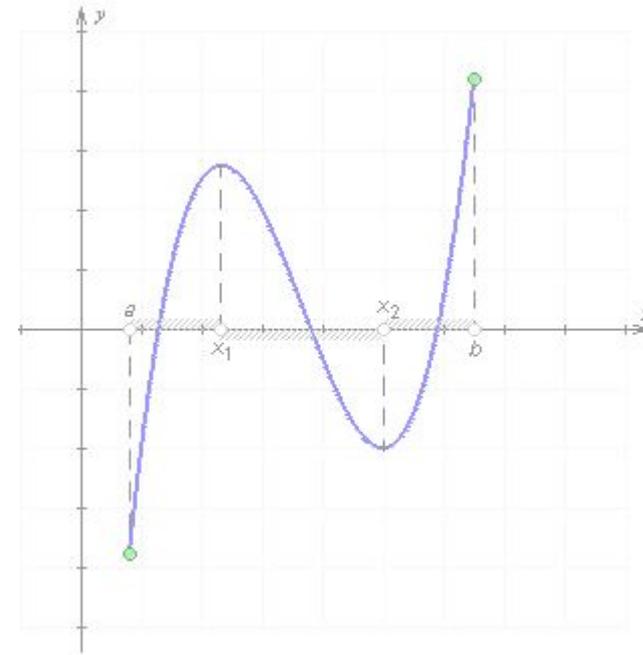
Начальный период развития новых ветвей математики, связанных с понятиями функции, бесконечно малых величин, пределов и производных, был охарактеризован **Марксом** как "мистический".

Лозунгом многих математиков 17 века был: **"Двигайтесь вперед, и вера в правильность результатов к вам придет"**.

Темы

1. Определение производной.
2. Правила вычисления производной.
3. Производная сложной функции.
4. Физический Физический и геометрический смысл производной.
5. Понятие «монотонность функции».
6. Достаточные признаки возрастания функции на промежутке.
7. Понятие «критические точки функции».
8. Необходимые условия экстремума функции;
9. признаки максимума и минимума функции.
10. Решение задач.

ТЕСТ



Производная

Определение. Производной функции f в точке x_0 называется число, к которому стремится отношение

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Операция нахождения производной функции называется **дифференцированием**.

Необходимое условие дифференцируемости функции. Для того, чтобы функция f была дифференцируема (имела производную) в точке x_0 необходимо, но не достаточно, чтобы она была непрерывна в этой точке.

Правила вычисления производной

Пусть u и v дифференцируемые функции, а c – const. Тогда

$$(cu)' = cu'$$

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(x^p)' = px^{p-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$



Производная сложной функции

$$(g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

$$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

?

?

?

?

?

Правило 1:

Если функции $y=f(x)$ $y=g(x)$ имеют производную в точке x , то и их сумма имеет производную в точке x , причем производная суммы равна сумме производных: $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$ На практике это правило формулируют короче: производная суммы равна сумме производных. При этом речь может идти о дифференцировании суммы любого числа функций. Например, $(x^2+\sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$

Правило 2.

Если функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x , то и функция $y=kf(x)$ имеет производную в точке x , причем $(kf(x))' = kf'(x)$. На практике это правило формулируют короче: постоянный множитель можно вынести за знак производной. Например, $(5x^2)' = 5(x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x$

Правило 3:

Если функции $y=f(x)$ $y=g(x)$ имеют производную в точке x , то и их произведение имеет производную в точке x , причем $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ На практике это правило формулируют так: производная произведения двух функций равна сумме двух слагаемых; первое слагаемое есть произведение производной первой функции на вторую функцию, а второе слагаемое есть произведение первой функции на производную второй функции. Например, $((2x+3)\sin x)' = (2x+3)' \sin x + (2x+3) \sin x' = 2 \sin x + (2x+3) \cos x$

Правило 4:

Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют производную в точке x и в этой точке $g(x)$ не равно 0, то и частное имеет производную в точке x , причем

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Геометрический смысл производной

Касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 называется прямая, задаваемая уравнением

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

α – угол наклона касательной к оси Ox .

k – угловой коэффициент касательной.

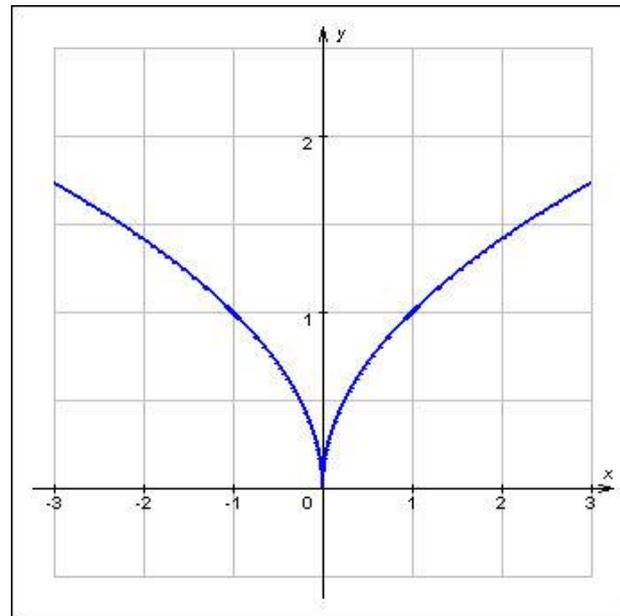
Значение производной функции f в точке касания равно угловому коэффициенту касательной.

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$$

Очень важно! Нужно знать!

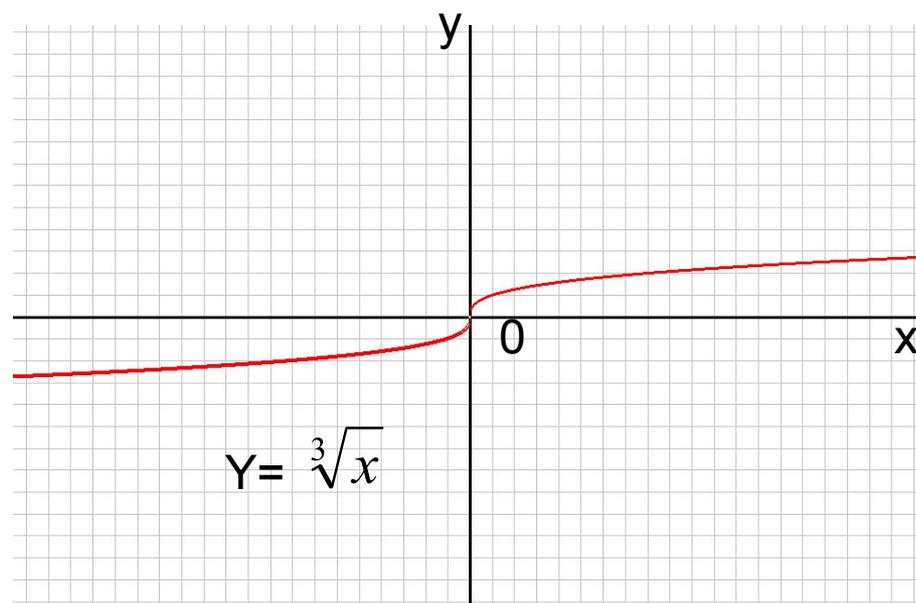
Если функция $f(x)$ не имеет производной в точке x_0 , но непрерывна в этой точке, то у графика функции в данной точке либо вообще нет касательной,

Примеры



Касательной не существует в точке $(0;0)$.

либо есть вертикальная касательная.



Касательная вертикальна в точке (0;0).

Следовательно :

Существование производной функции f в точке x_0 эквивалентно существованию (невертикальной) *касательной* в точке $(x_0; f(x_0))$ графика, при этом угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания.

$$k = f'(x_0)$$

Физический смысл производной

Пусть $S=S(t)$ – зависимость пути от времени, тогда

$$V = V(t) = S'(t)$$

Скорость – производная пути по времени.

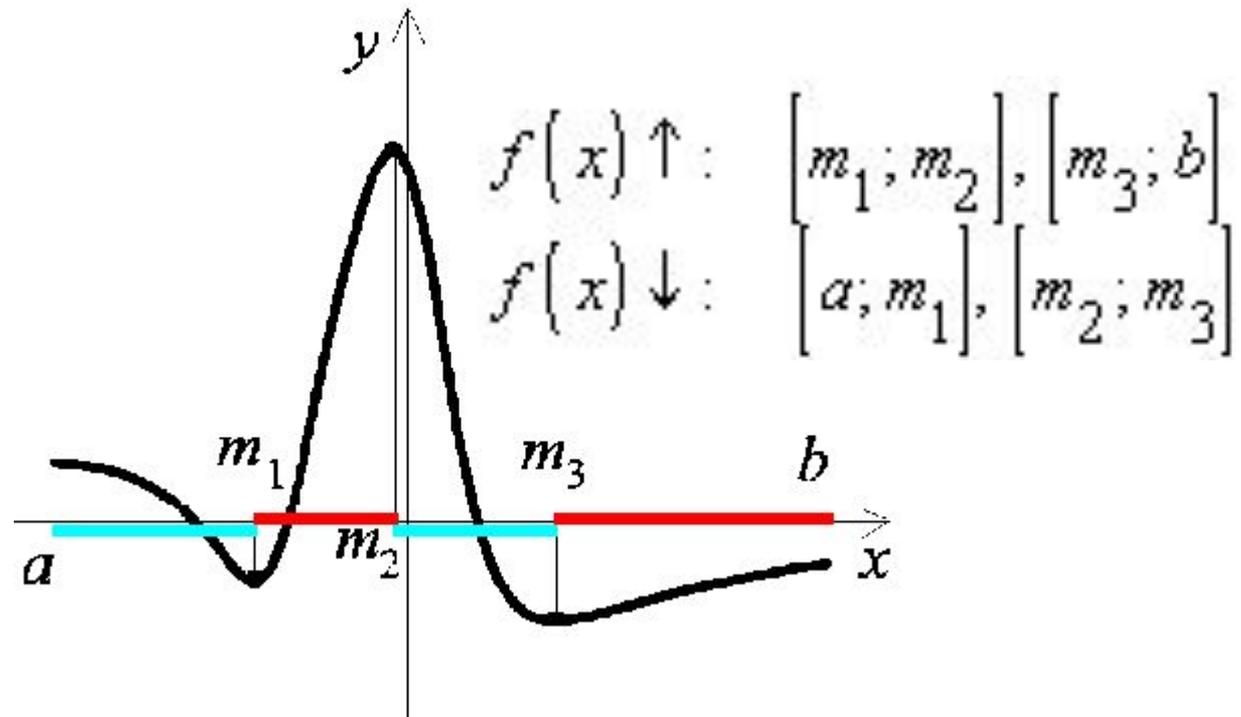
$$a = a(t) = V'(t) = S''(t)$$

Ускорение – производная скорости по времени (вторая производная пути по времени).

Монотонность функции

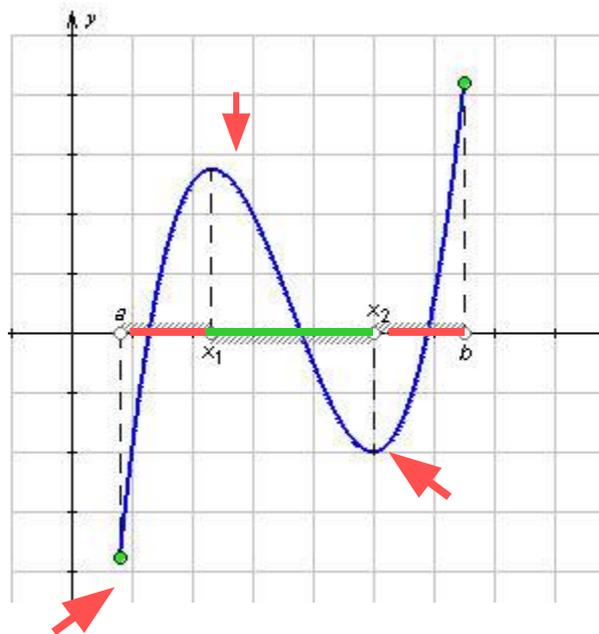
Функция $f(x)$ называется возрастающей на промежутке D , если для любых чисел x_1 и x_2 из промежутка D таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $f(x)$ называется убывающей на промежутке D , если для любых чисел x_1 и x_2 из промежутка D таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.



Задача1 .Найти промежутки возрастания функции.

Геометрически – это интервалы оси ox , где **график** функции идет



Ответ : $[a; x_1]$ и $[x_2; b]$

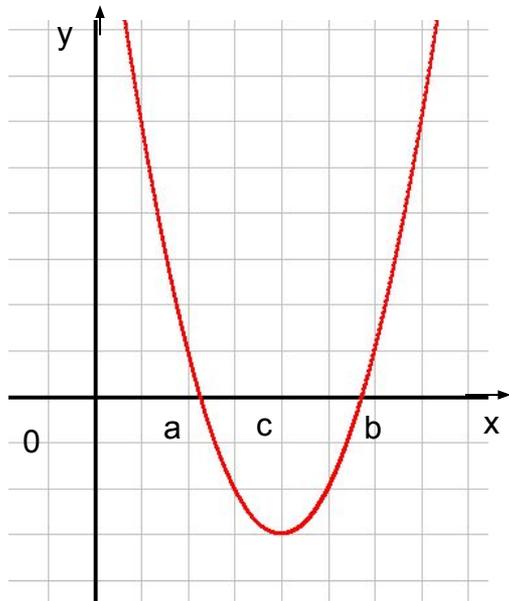
Задача2.Найти промежутки убывания этой же функции:

Геометрически – это интервалы оси ox , где **график** функции идет **вниз** .

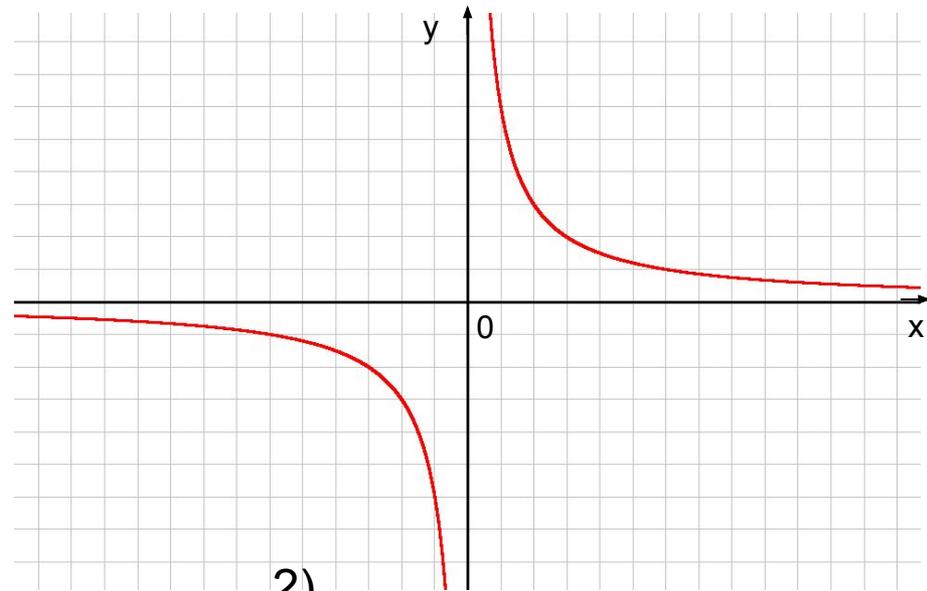
Ответ : $[x_1; x_2]$

Монотонность функции ? ? ?

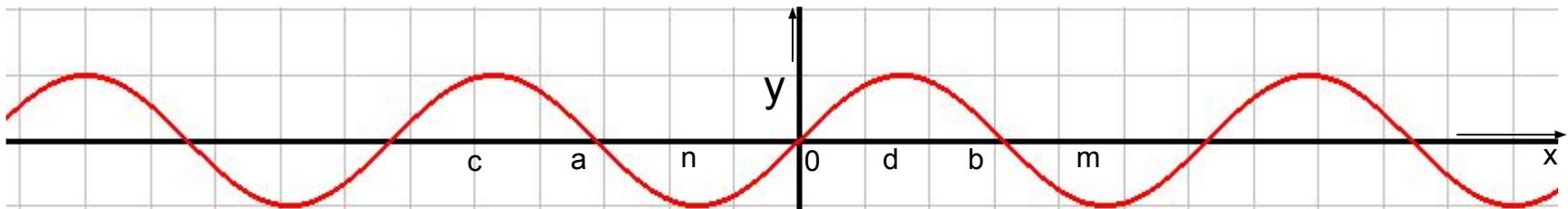
Назовите промежутки возрастания (убывания) для функций:



1)



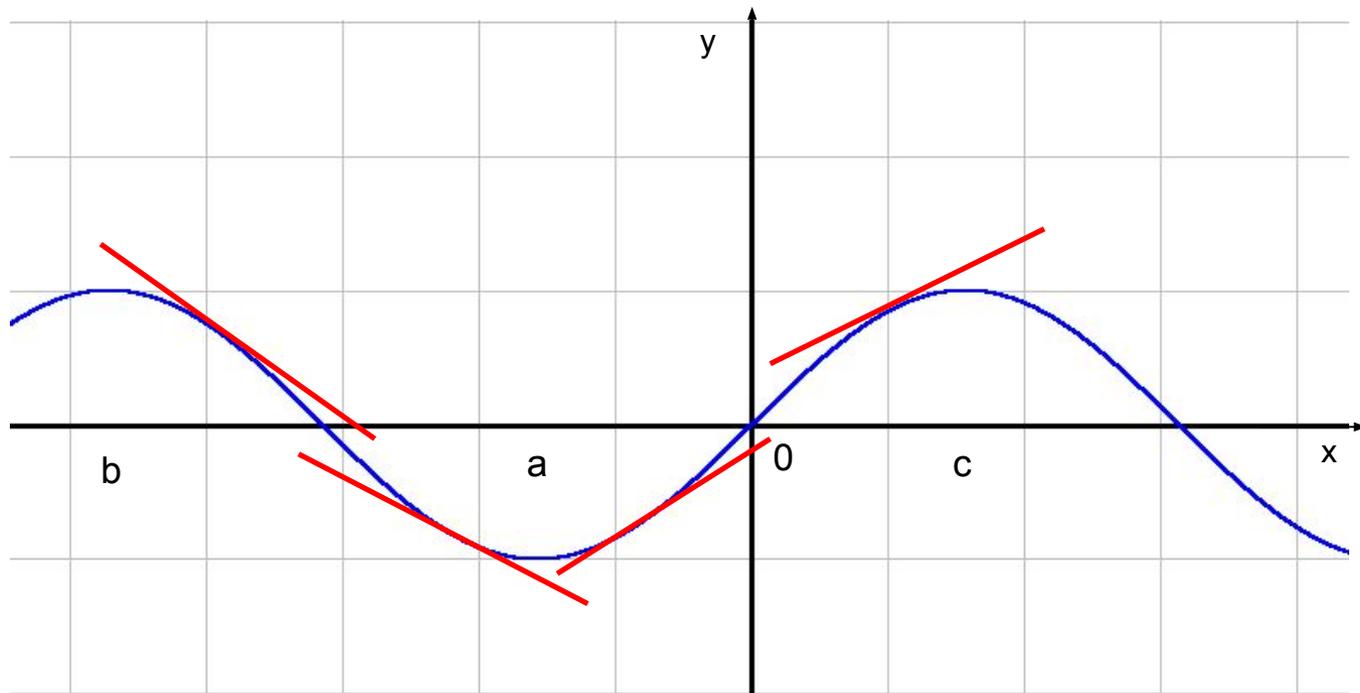
2)



3)

Проблема

Можно ли установить зависимость между видом монотонности (возрастанием или убыванием) функции на промежутке и знаком производной в каждой точке этого промежутка? Как это сделать?



?

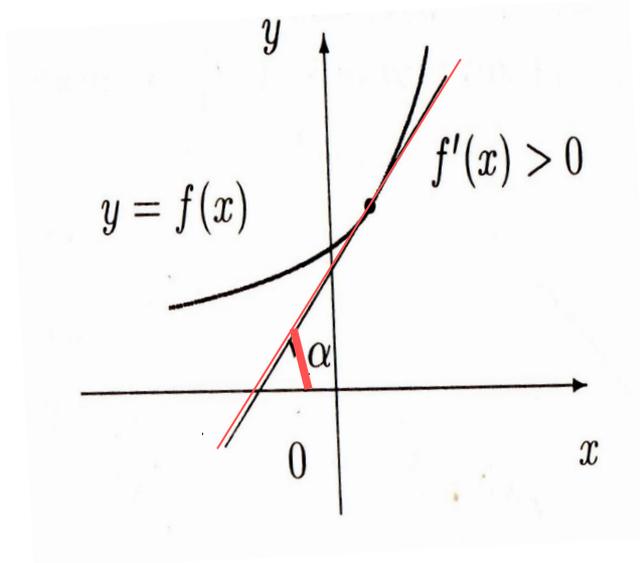
?

?

?

Признак возрастания функции

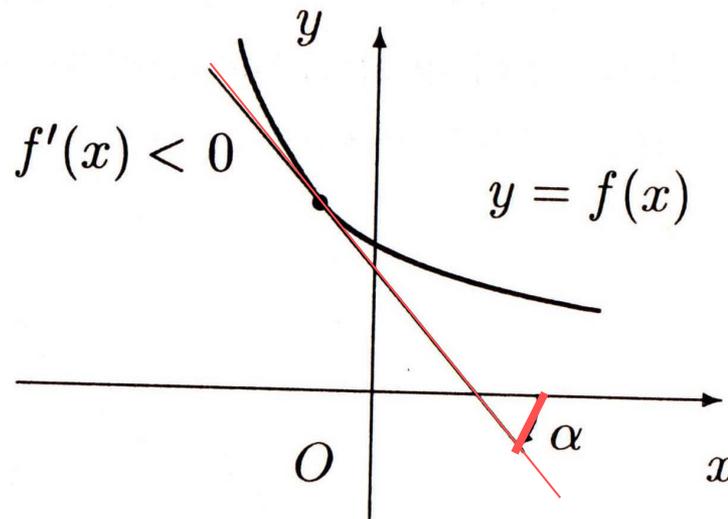
Достаточное условие возрастания функции : Если в каждой точке интервала $(a; b)$ $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ монотонно **возрастает** на этом интервале.



$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

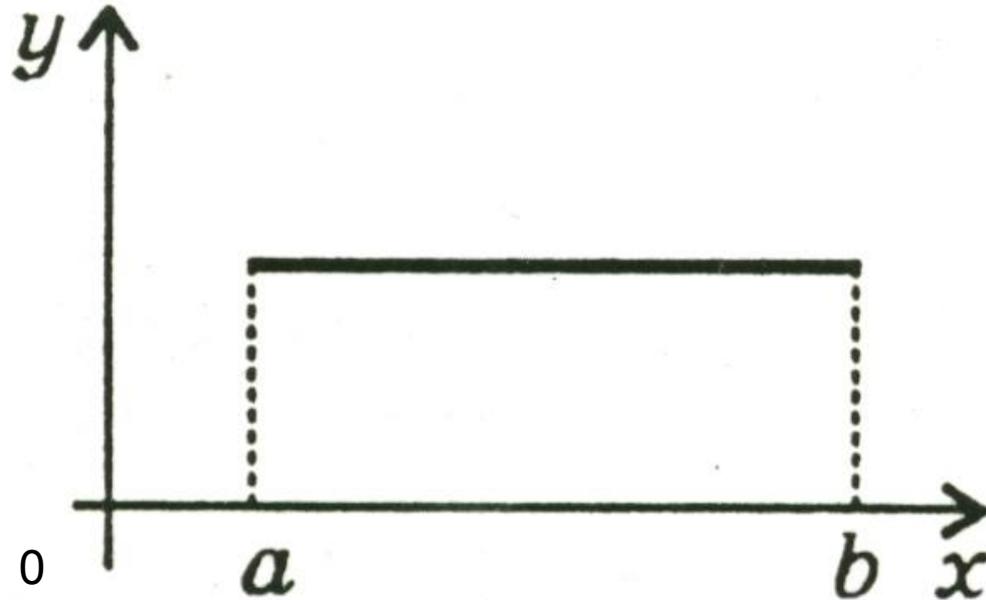
Признак убывания функции

Достаточное условие убывания функции : Если в каждой точке интервала $(a; b)$ $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ монотонно **убывает** на этом интервале.



$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$$

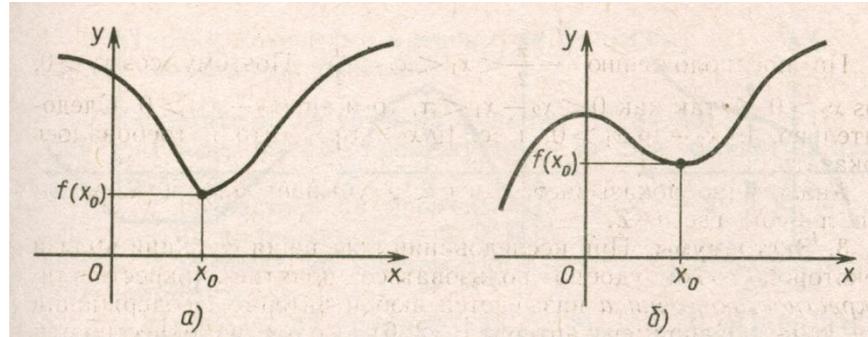
Условие постоянства функции



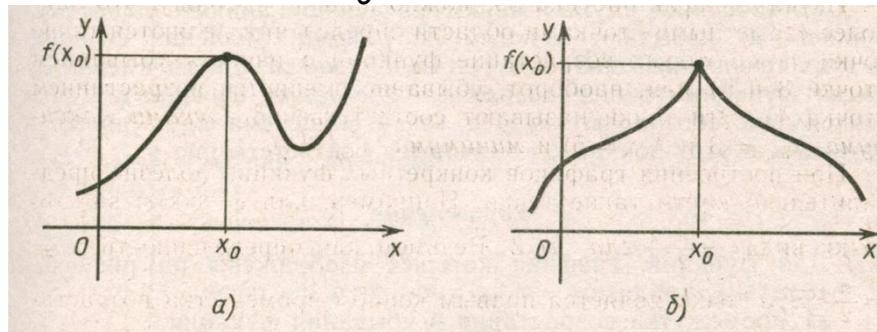
Необходимое и достаточное условие постоянства функции :
Функция f **постоянна** на интервала $(a; b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x)=0$ в каждой точке этого интервала.

Экстремумы функции

Определение. Точка x_0 называется **точкой минимума** функции f , если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.



Определение. Точка x_0 называется **точкой максимума** функции f , если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.



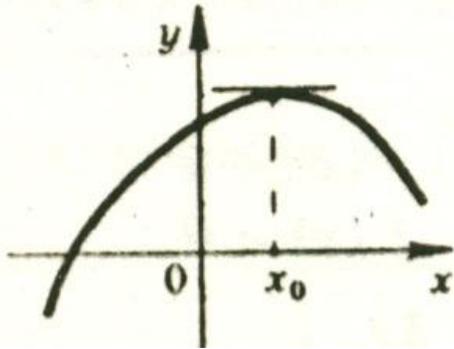
Точки максимума и минимума называются **точками экстремума**. Значения функции в точках максимума и минимума называются **максимумами и минимумами функции**.

Критические точки функции

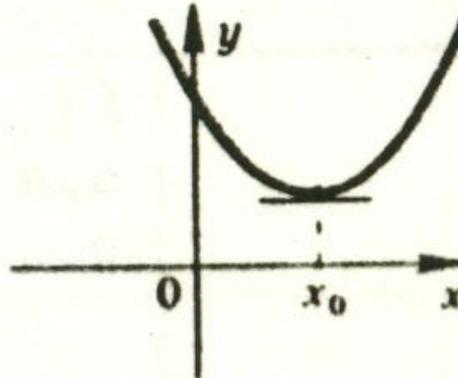
Определение. Внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует, называются критическими точками этой функции.

Роль критических точек – только они могут быть точками экстремума функции.

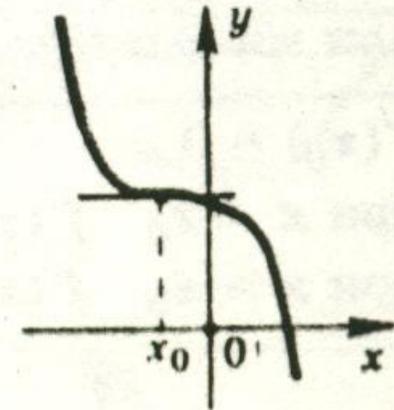
Необходимое условие экстремума. Если x_0 – точка экстремума функции f , то эта точка является критической точкой данной функции.



$f'(x)=0$;
 x_0 – крит. точка;
 $f(x_0)=f_{\max}$.

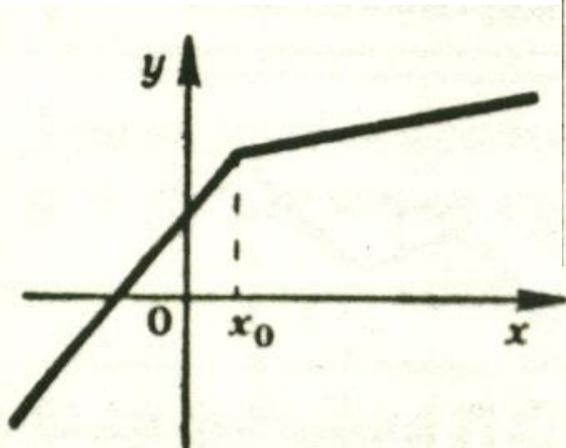


$f'(x)=0$;
 x_0 – крит. точка;
 $f(x_0)=f_{\min}$.

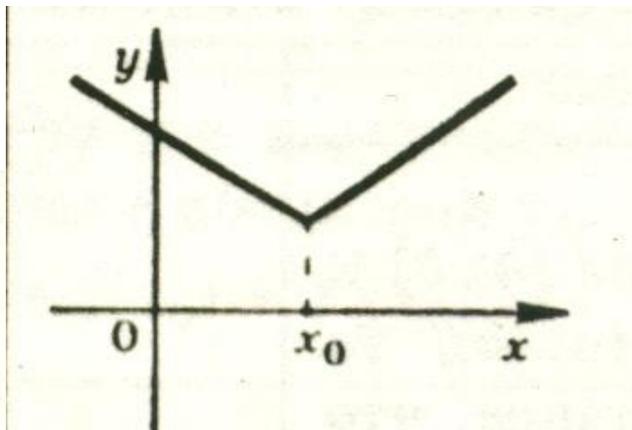


$f'(x)=0$;
 x_0 – крит. точка;
 $f(x_0)$ не является экстремумом.

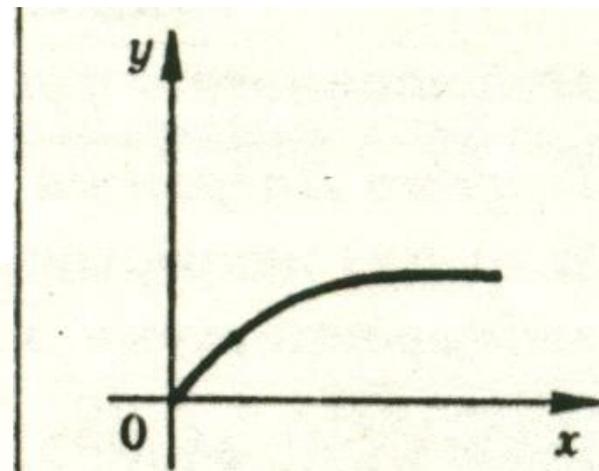
Критические точки (примеры)



$f'(x_0)$ не существует;
 x_0 – крит. точка;
 $f(x_0)$ не является
экстремумом.



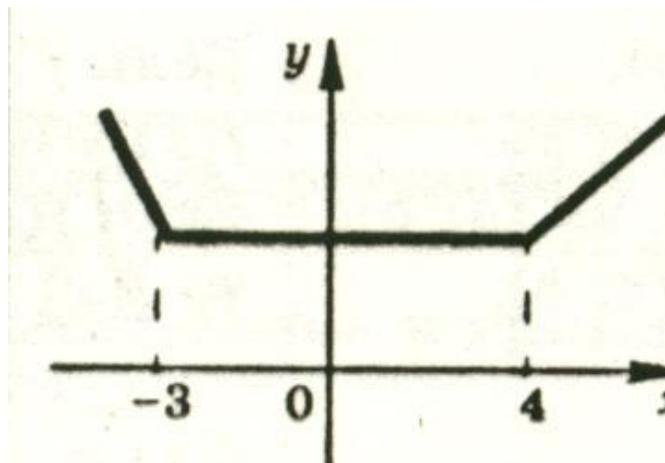
$f'(x_0)$ не существует;
 x_0 – крит. точка;
 $f(x_0) = f_{\min}$.



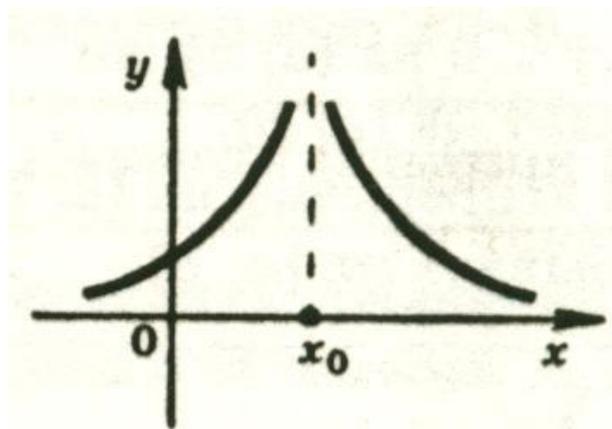
Нет критических точек;
 $x_0 = 0$ не является
внутренней точкой
области определения.

Критические точки (примеры)

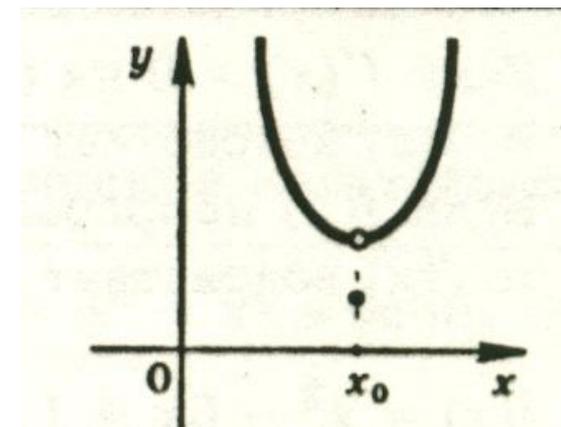
?



?



$f'(x)=0$ при всех $x \in (-3; 4)$;
 $f'(-3)$, $f'(4)$ не существуют;
все $x \in [-3; 4]$ критические точки.



Нет критических точек;
 x_0 – точка разрыва.

?

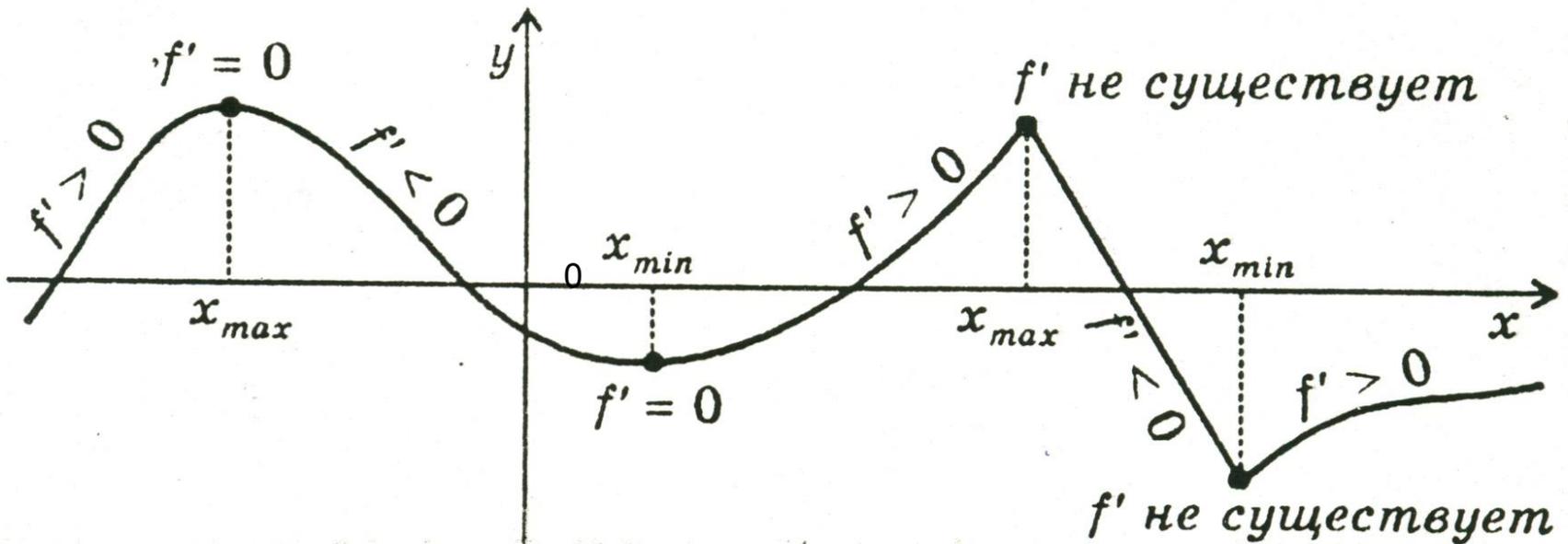
$f'(x_0)$ не существует;
 x_0 – крит. точка;
 $f(x_0)=f_{\min}$.

Проблема



Как установить с помощью производной
наличие экстремума функции и его вид на промежутке?

Примеры экстремумов:



Достаточное условие экстремума

Если функция f непрерывна в точке x_0 и производная $f'(x)$ меняет знак в этой точке, то x_0 – точка экстремума функции f .

Признак максимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0 , а $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции f .

Признак минимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0 , а $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции f .

Схема применения производной для нахождения интервалов монотонности и экстремумов

Пример: $y=2x^3-3x^2-36x+5$

Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.

Найти производную $f'(x)$.

Найти критические точки.

В каждом из интервалов, на которые область определения разбивается критическими точками, определить знак производной и вид монотонности функции.

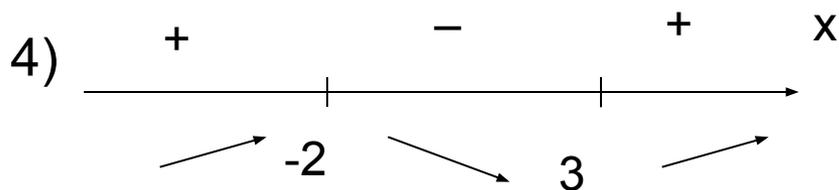
Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

Записать результат исследования: промежутки монотонности и экстремумы.

$$1) D(y) = R$$

$$2) y'(x) = 6x^2 - 6x - 36$$

$$3) y'(x) = 0 \quad x_1 = -2; x_2 = 3$$



5) $x=-2$ точка максимума;
 $x=3$ точка минимума.

ОТВЕТ: $f(x)$ возрастает на
 $(-\infty; -2)$ и на $(3; \infty)$;
 $f(x)$ убывает на $(-2; 3)$;
 $x_{\max}=-2$, $y_{\max}=f(-2)=49$;
 $x_{\min}=3$, $y_{\min}=f(3)=-76$.