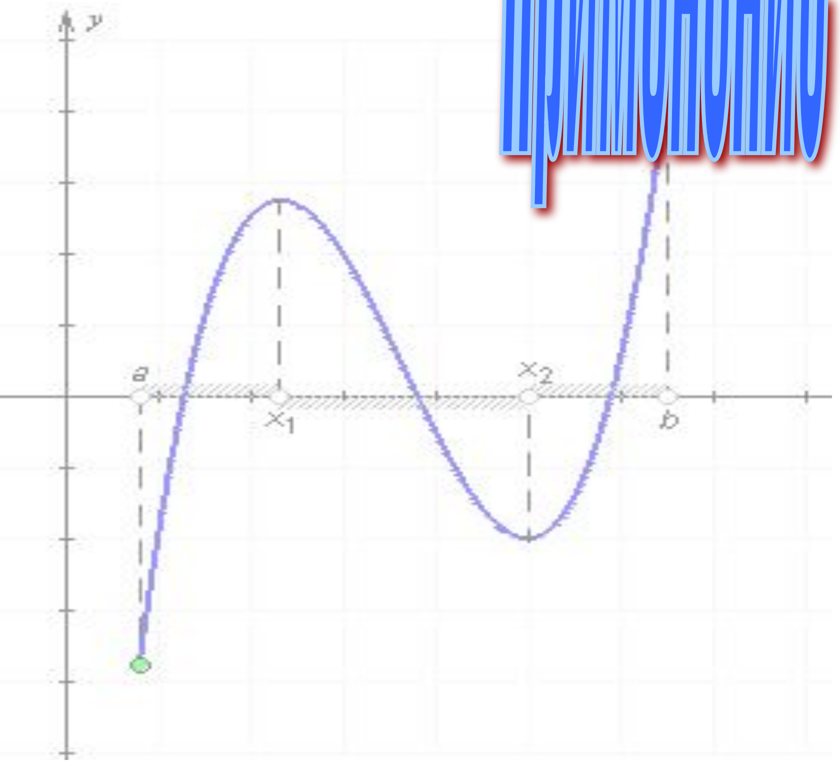
Применение производной к исследованию функци



Виноградова Татьяна Игоревна.
учитель математики
школа №26 Невский район

Исторические сведения.

Дифференциальное исчисление создано **Ньютоном и Лейбницем** в конце **17** столетия.

Понятие производной встречалось в работах итальянского математика **Тартальи** (около **1500 - 1557** гг.) – здесь появилась касательная в ходе изучения вопроса об угле наклона орудия, при котором обеспечивается наибольшая дальность полета снаряда.

В **17** веке на основе учения **Г.Галилея** о движении активно развивалась кинематическая концепция производной. Различные изложения стали встречаться в работах у **Декарта**, французского математика **Роберваля**, английского ученого **Л. Грегори**, а также в работах **Ньютона**. Большой вклад в изучение дифференциального исчисления внесли **Лейбниц, Лопиталь, Бернулли, Лагранж, Эйлер, Гаусс.**

Однако у создателей дифференциального исчисления возникли проблемы, связанные с тем, что точные определения таких основных понятий как предел, непрерывность, действительное число, отсутствовали, рассуждения содержали логические пробелы, а иногда были ошибочны.

Таким образом, "новая" математика не отвечала стандартам строгости, привычным для ученых, воспитанных на классических образцах греческих математиков.

Гениальная интуиция таких гигантов, как **Ньютон, Лейбниц, Эйлер** помогала им избегать ошибок.

Характерны 2 высказывания, относящиеся к **18**-му столетию. Известный математик **М. Ролль** писал, что новая наука есть коллекция гениальных ошибок.

А великий французский мыслитель - **Вольтер** заметил, что это исчисление представляет собой искусство вычислять и точно измерять вещи, существование которых не может быть доказано.

Начальный период развития новых ветвей математики, связанных с понятиями функции, бесконечно малых величин, пределов и производных, был охарактеризован **Марксом** как "мистический".

Лозунгом многих математиков 17 века был: ”Двигайтесь вперед, и вера в правильность результатов к вам придет".

Темы

1.Определение производной.

2.Правила вычисления производной.

3.Производная сложной функции.

4. Физический Физический и геометрический смысл

производной.

5. Понятие «монотонность функции».

6. Достаточные признаки возрастания Достаточные признаки возрастания и убывания

функции на промежутке.

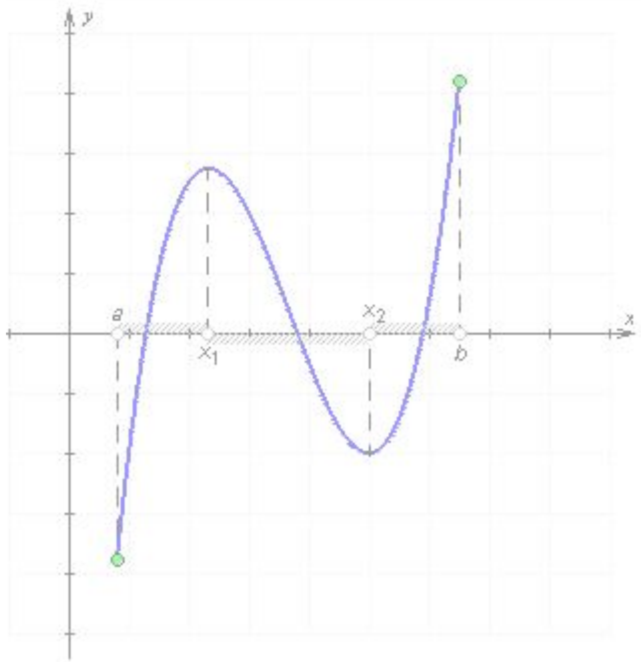
7. Понятие «критические точки функции».

8. Необходимые условия экстремума функции;

9.признаки максимумапризнаки максимума и минимума функции.

10.Решение задач .

ТЕСТ



Производная

Определение. Производной функции *f* в точке x_0 называется число, к которому стремится отношение

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием***.

Необходимое условие дифференцируемости функции. Для того, чтобы функция *f* была дифференцируема (имела производную) в точке x_0 необходимо, но не достаточно, чтобы она была непрерывна в этой точке.

Правила вычисления производной

Пусть *u* и *v* дифференцируемые функции, а *c* – const. Тогда

$$(cu)' = cu'$$

$$(u+v)' = u'+v'$$

$$(uv)' = u'v+uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$\left(x^p\right)' = p\,x^{p-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(tg\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctg\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Производная сложной функции

$$\left(g\left(h(x)\right)\right)' = g'\left(h(x)\right)\cdot h'(x)$$

$$\left(u^{n}\right)' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'$$

$$\left(\cos u\right)' = -\sin u\cdot u'$$

$$\left(\sin u\right)' = \cos u\cdot u'$$

$$\left(tg\,u\right)' = \frac{1}{\sin^{2} u}\cdot u'$$

$$\left(ctg\,u\right)' = -\frac{1}{\cos^{2} u}\cdot u'$$

Правила дифференцирования

Правило 1:

*Если функции **y=f(x) y=g(x)** имеют производную в точке **x**, то и их сумма имеет производную в точке **x**, причем производная суммы равна сумме производных: **(f(x)+g(x))`= f `(x)+g`(x)** На практике это правило формулируют короче: производная суммы равна сумме производных. При этом речь может идти о дифференцировании суммы любого числа функций. Например, **(x2+sinx)`=(x2)`+(sinx)`=2x+cos x***

Правило 2.

*Если функция **y=f(x)** имеет производную в точке **x,** то и функция **y=kf(x)** имеет производную в точке х, причем **(kf(x))`=kf `(x).** На практике это правило формулируют короче: постоянный множитель можно вынести за знак производной. Например, **(5x2)`=5(x2)`=5*2x=10x***

Правило 3:

*Если функции **y=f(x) y=g(x)** имеют производную в точке х, то и их произведение имеет производную в точке х, причем **(f(x) g(x))`= f `(x) g(x)+ f(x) g`(x)** На практике это правило формулируют так: производная произведения двух функций равна сумме двух слагаемых; первое слагаемое есть произведение производной первой функции на вторую функцию, а второе слагаемое есть произведение первой функции на производную второй функции. Например, **((2x+3)sinx)`=(2x+3)`sinx+(2x+3)sinx`= 2sinx+(2x+3)cos x***

Правило 4:

*Если функции **y=f(x) и y=g(x**) имеют производную в точке **x** и в этой точке **g(x) не равно 0** ,то и частное имеет производную в точке **x,** причем*

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g(x)'}{g^2(x)}$$

Геометрический смысл производной

Касательной к графику функции f(x) в точке x_0 называется прямая, задаваемая уравнением

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

α – угол наклона касательной к оси *Ox*.
k – угловой коэффициент касательной.

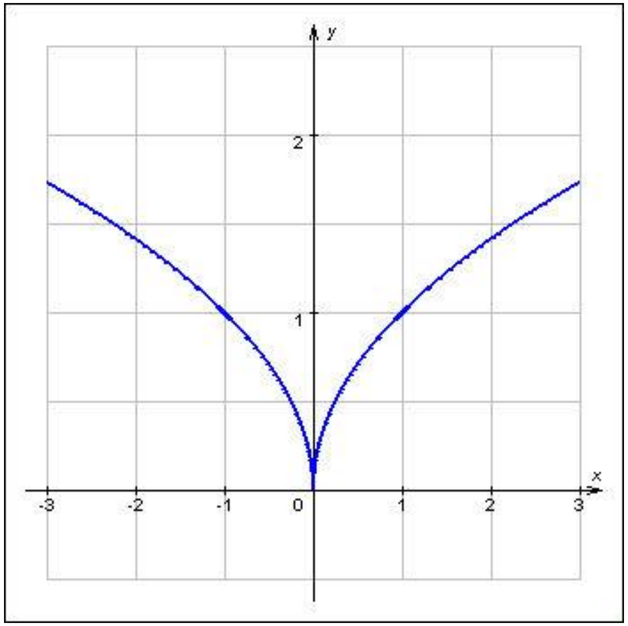
Значение производной функции f в точке касания равно угловому коэффициенту касательной.

$$f'(x_0) = tg\,\alpha = k$$

Очень важно! Нужно знать!

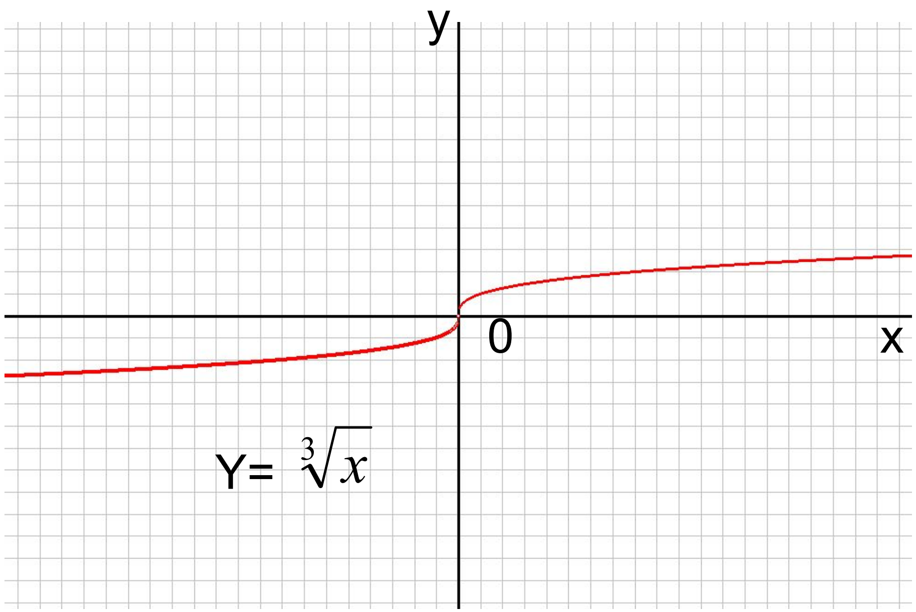
Если функция $f(x)$ не имеет производной в точке x_0, но непрерывна в этой точке, то у графика функции в данной точке либо вообще нет касательной,

Примеры



Касательной не существует в точке (0;0).

либо есть вертикальная касательная.



Касательная вертикальна в точке (0;0).

Следовательно :

Существование производной функции f в точке x_0 эквивалентно существованию (невертикальной) *касательной в точке* $(x_0; f(x_0))$ графика, при этом угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания.

$$k = f'(x_0)$$

Физический смысл производной

Пусть S=S(t) – зависимость пути от времени, тогда

$$V = V(t) = S'(t)$$

Скорость – производная пути по времени.

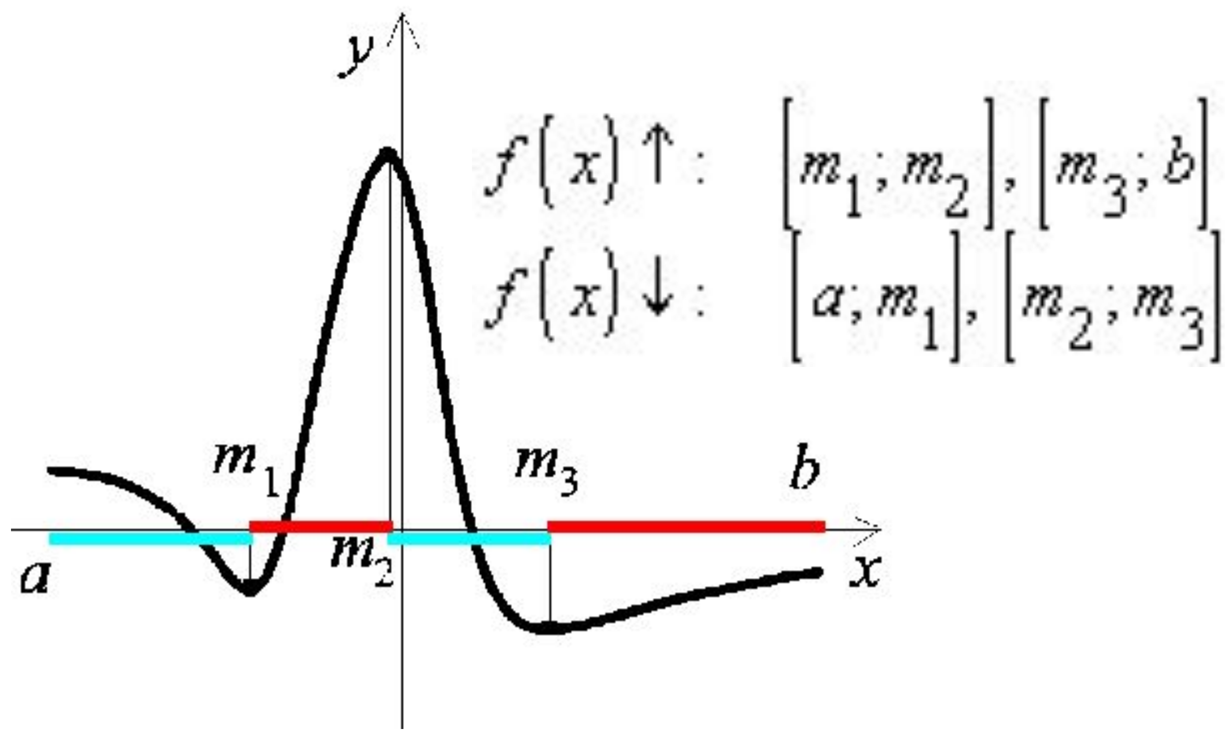
$$a = a(t) = V'(t) = S''(t)$$

Ускорение – производная скорости по времени (вторая производная пути по времени).

Монотонность функции

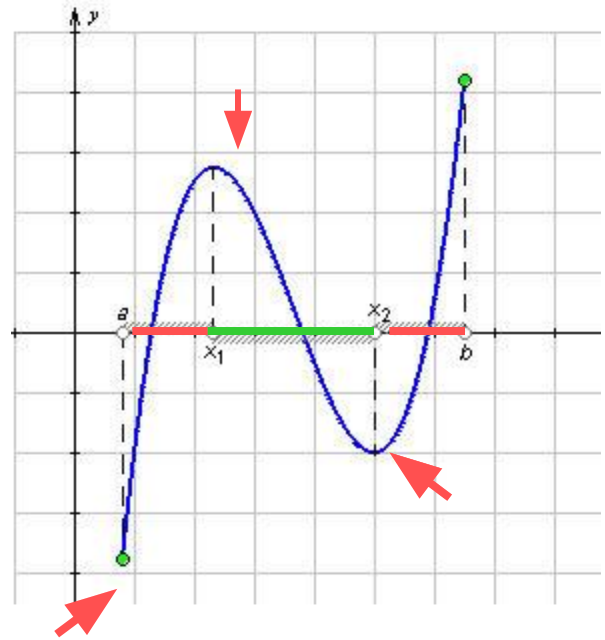
Функция f (x) называется возрастающей на промежутке D, если для любых чисел x1 и x2 из промежутка D таких, что x1 < x2, выполняется неравенство f (x1) < f (x2).

Функция f (x) называется убывающей на промежутке D, если для любых чисел x1 и x2 из промежутка D таких, что x1 < x2, выполняется неравенство f (x1) > f (x2).



Задача1 .*Найти промежутки возрастания функции.*

Геометрически – это интервалы оси ox, где *график функции идет*



$$\textit{Ответ}:[a;x_1]\,u\,[x_2;b]$$

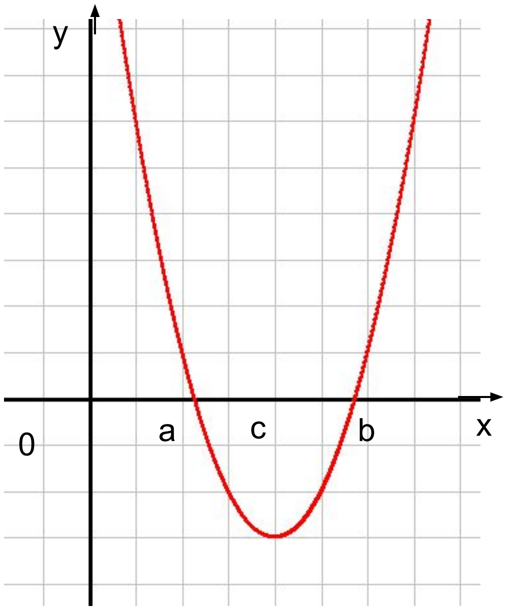
Задача2.*Найти промежутки убывания этой же функции:*

Геометрически – это интервалы оси ox, где *график функции идет вниз .*

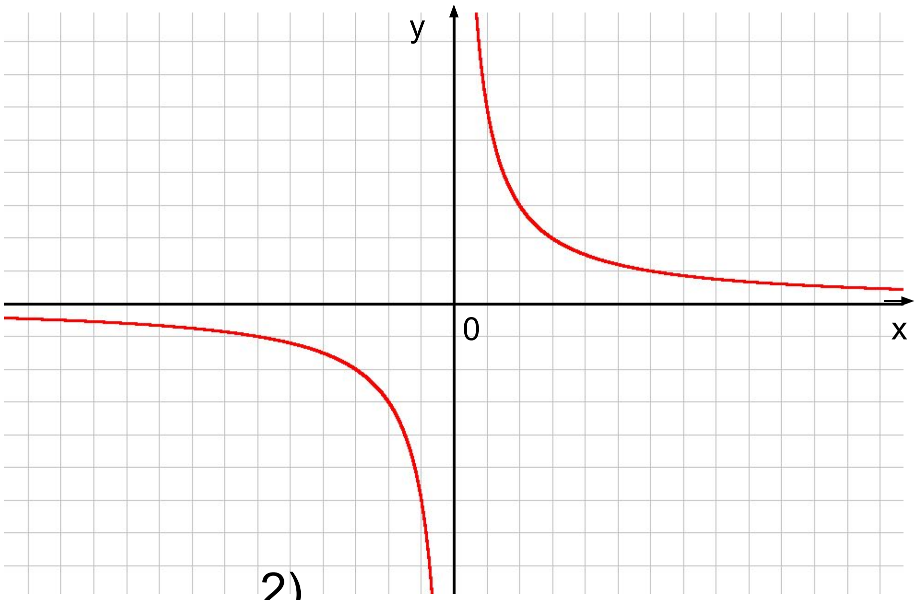
$$\textit{Ответ}:[x_1;x_2]$$

Монотонность функции ? ? ?

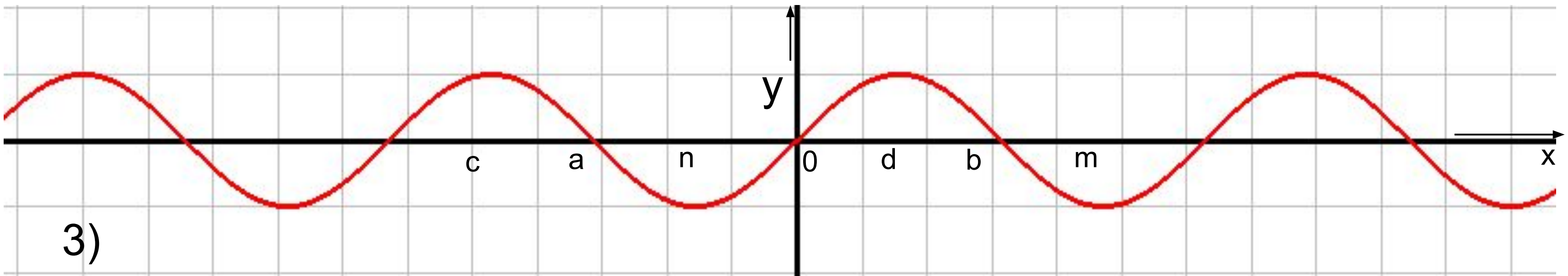
Назовите промежутки возрастания (убывания)для функций:



1)



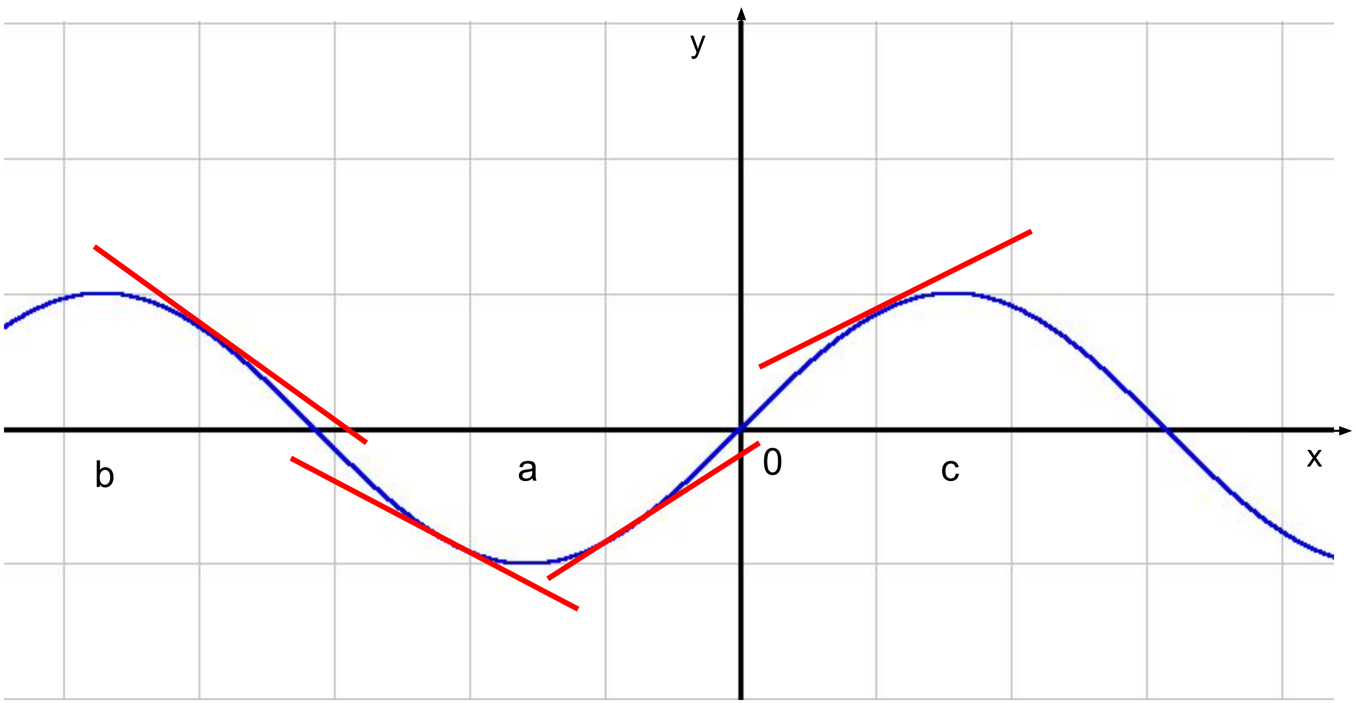
2)



3)

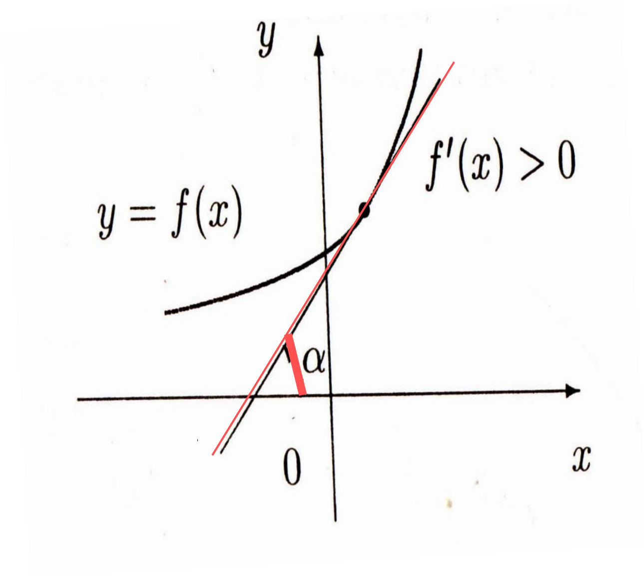
Проблема

Можно ли установить зависимость между видом монотонности (возрастанием или убыванием) функции на промежутке и знаком производной в каждой точке этого промежутка? Как это сделать?



Признак возрастания функции

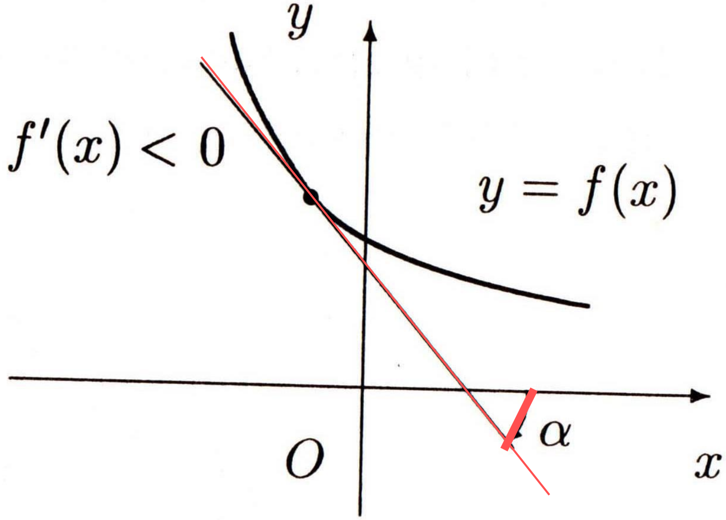
Достаточное условие возрастания функции : Если в каждой точке интервала *(a; b) f'(x)>0*, то функция *f(x)* монотонно возрастает на этом интервале.



$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

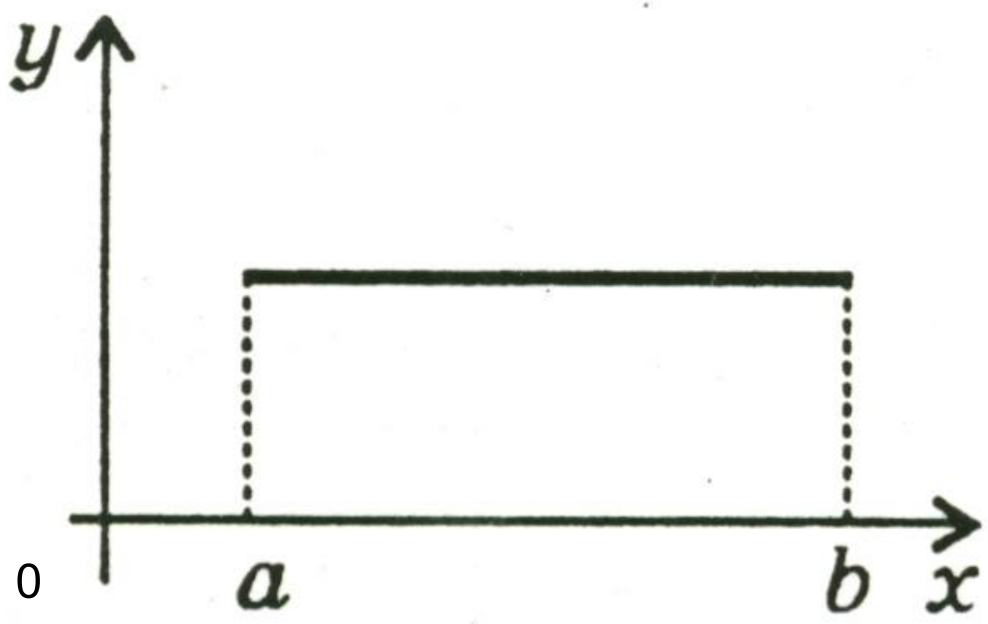
Признак убывания функции

Достаточное условие убывания функции : Если в каждой точке интервала *(a; b) f'(x)<0*, то функция *f(x)* монотонно убывает на этом интервале.



$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$$

Условие постоянства функции

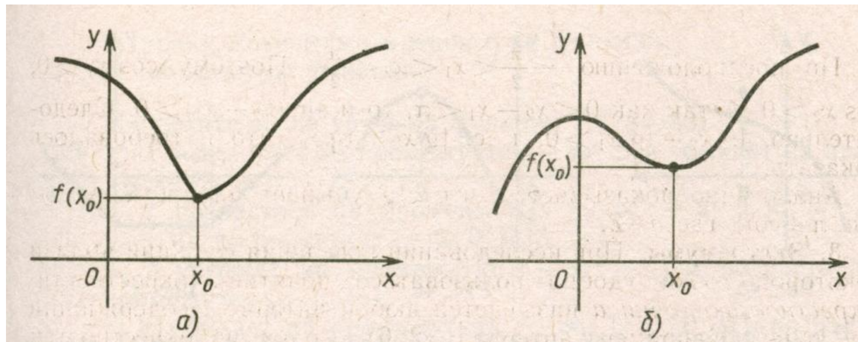


Необходимое и достаточное условие постоянства функции :

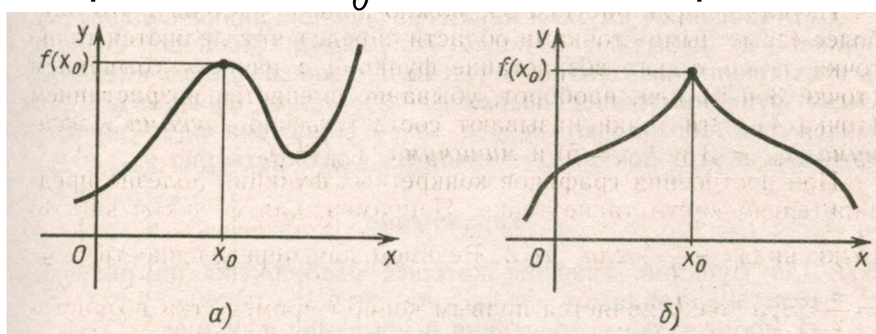
Функция *f* постоянна на интервала *(a; b) тогда и только тогда, когда* *f'(x)=0* в каждой точке этого интервала.

Экстремумы функции

Определение. Точка x_0 называется **точкой минимума** функции f, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.



Определение. Точка x_0 называется **точкой максимума** функции f, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.



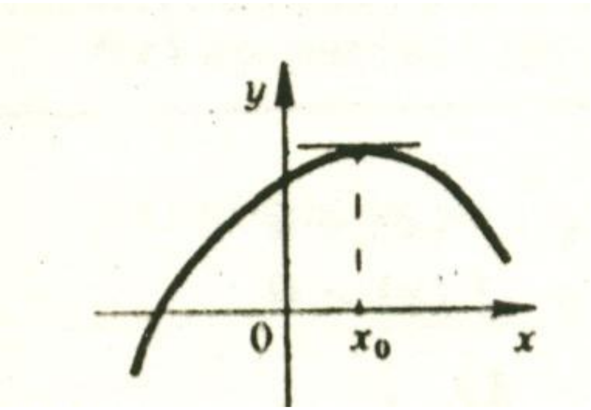
Точки максимума и минимума называются ***точками экстремума***. Значения функции в точках максимума и минимума называются ***максимумами и минимумами функции***.

Критические точки функции

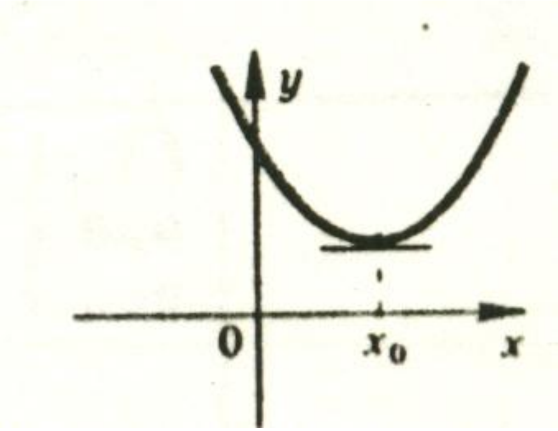
Определение. Внутренние точки области определения функции, в которых ее **производная равна нулю или не существует**, называются критическими точками этой функции.

Роль критических точек – только они могут быть точками экстремума функции.

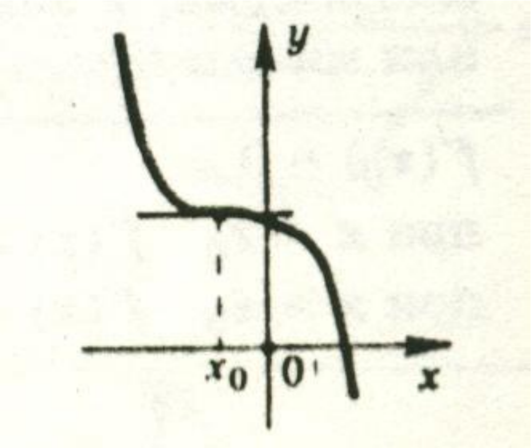
Необходимое условие экстремума. Если x_0 – точка экстремума функции *f*, то эта точка является критической точкой данной функции.



$f'(x)=0$;
x_0 – крит. точка;
$f(x_0)=f_{max}$.

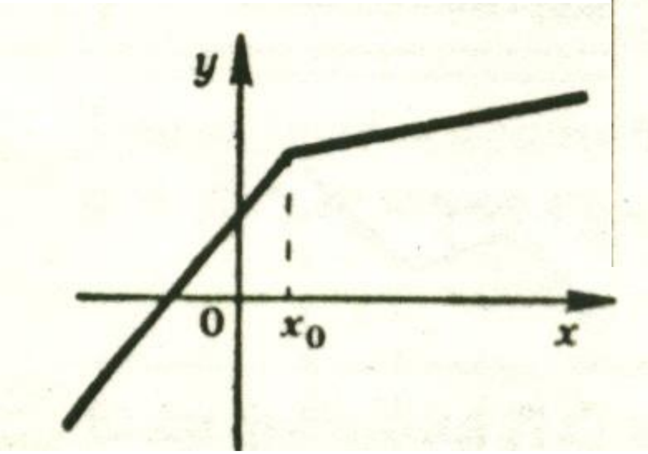


$f'(x)=0$;
x_0 – крит. точка;
$f(x_0)=f_{min}$.

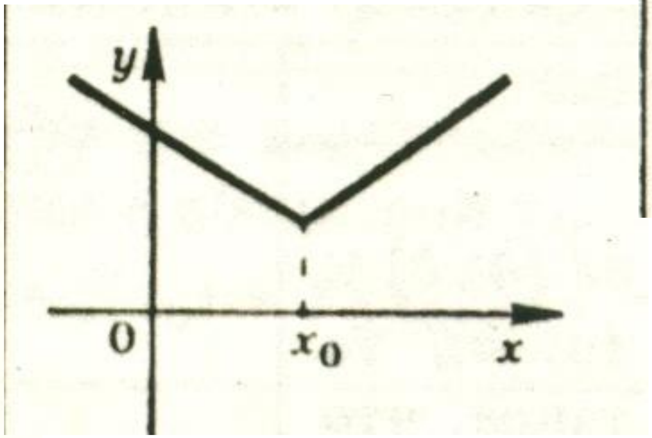


$f'(x)=0$;
x_0 – крит. точка;
$f(x_0)$ не является экстремумом.

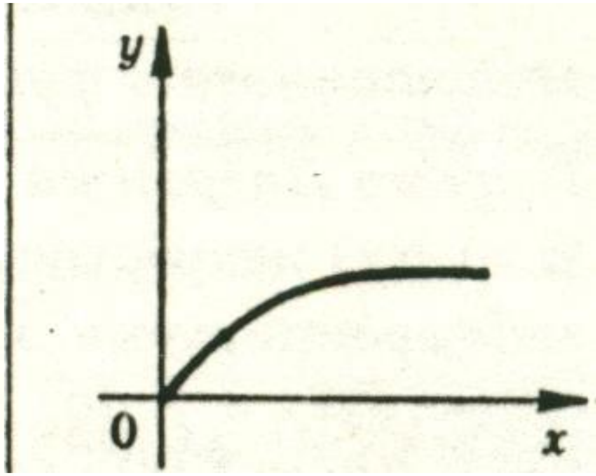
Критические точки (примеры)



$f'(x_0)$ не существует;
x_0 – крит. точка;
$f(x_0)$ не является экстремумом.

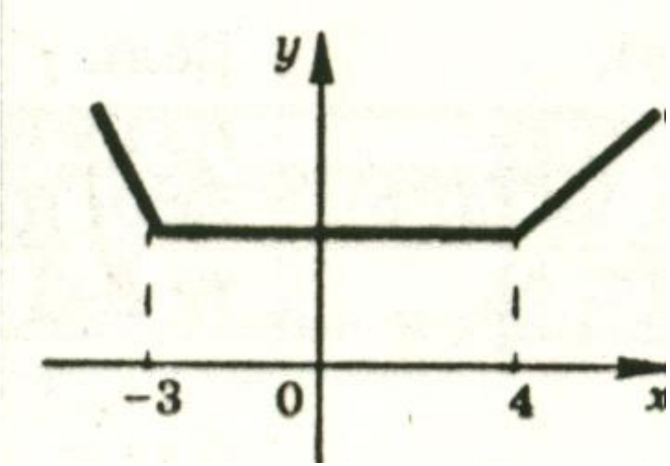


$f'(x_0)$ не существует;
x_0 – крит. точка;
$f(x_0)=f_{min}$.

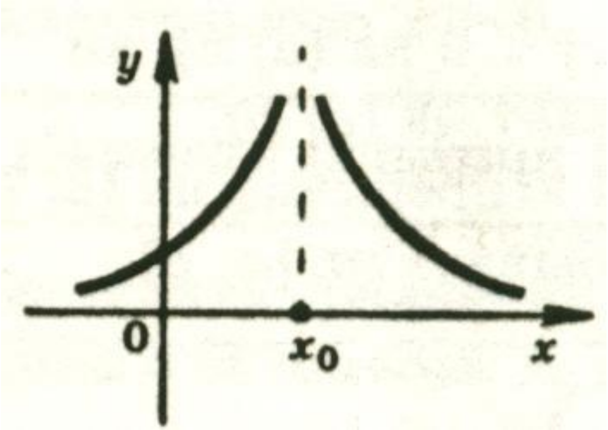


Нет критических точек;
$x_0=0$ не является внутренней точкой области определения.

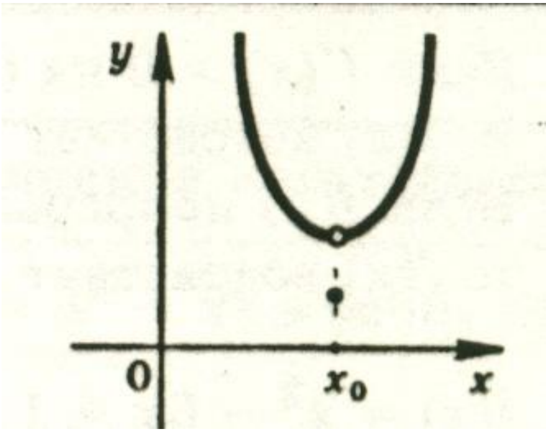
Критические точки (примеры)



f'(x)=0 при всех $x \in (-3; 4)$;
f'(-3), f'(4) не существуют;
все $x \in [-3; 4]$ критические точки.



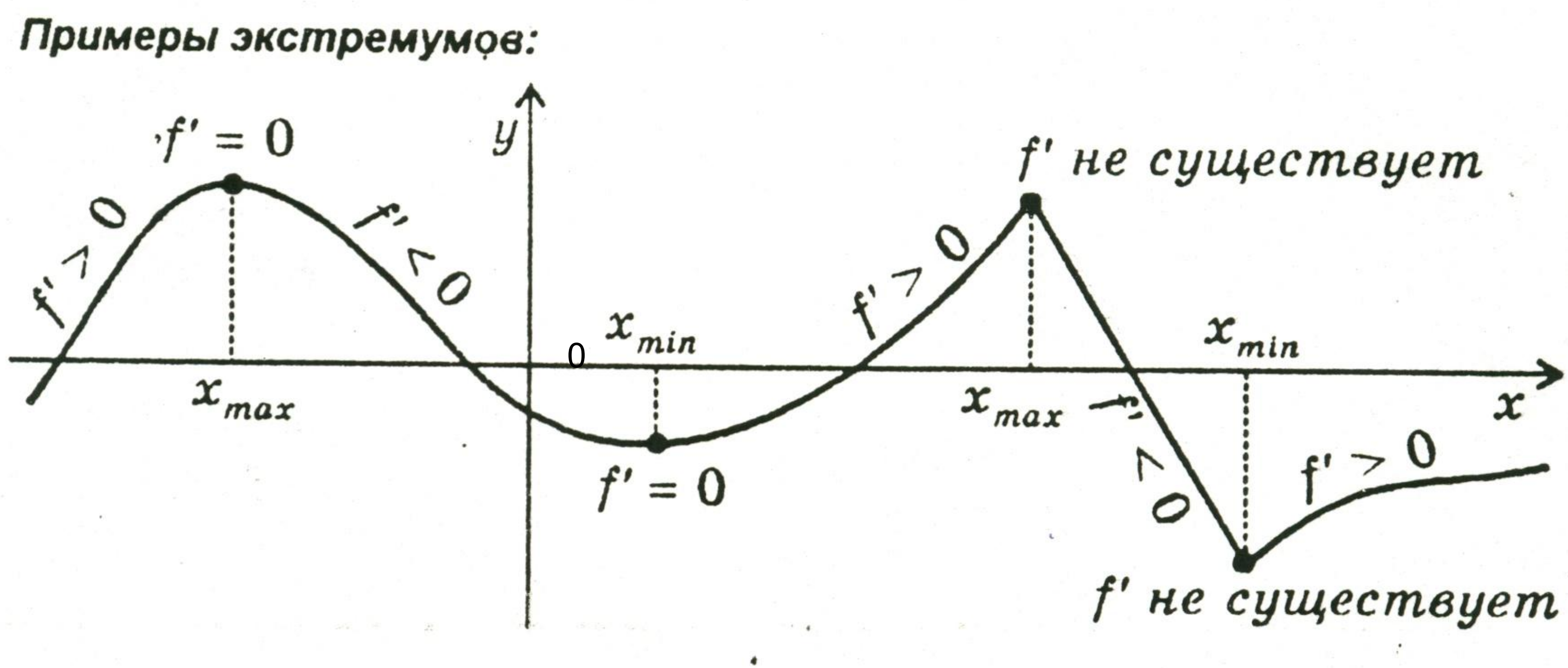
Нет критических точек;
x_0 – точка разрыва.



$f'(x_0)$ не существует;
x_0 – крит. точка;
$f(x_0)=f_{min}$.

Проблема

Как установить с помощью производной
наличие экстремума функции и его вид на промежутке?



Достаточное условие экстремума

Если функция f **непрерывна** в точке x_0 и производная $\boldsymbol{f'(x)}$ **меняет знак** в этой точке, то $\boldsymbol{x_0}$ **– точка экстремума** функции f.

Признак максимума функции. Если функция f **непрерывна** в точке x_0, а $f'(x)$***>0*** на интервале ***(a; x_0)*** и $f'(x)$***<0*** на интервале ***(x_0; b)***, то точка $\boldsymbol{x_0}$ **является точкой максимума** функции f.

Признак минимума функции. Если функция f **непрерывна** в точке x_0, а ***f'(x)<0*** на интервале ***(a; x_0)*** и ***f'(x)>0*** на интервале ***(x_0; b)***, то точка $\boldsymbol{x_0}$ **является точкой минимума** функции f.

Схема применения производной для нахождения интервалов монотонности и экстремумов

Пример: $y=2x^3-3x^2-36x+5$

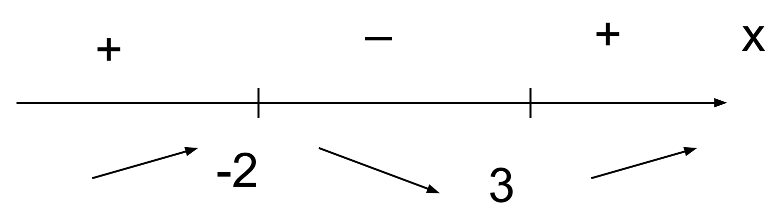
- Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.
- Найти производную *f'(x)*.
- Найти критические точки.
- В каждом из интервалов, на которые область определения разбивается критическими точками, определить знак производной и вид монотонности функции.
- Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.
- Записать результат исследования: промежутки монотонности и экстремумы.

$$1)\,D(y)=R$$

$$2)\,y'(x)=6x^2-6x-36$$

$$3)\,y'(x)=0 \quad x_1=-2;\, x_2=3$$

4)



5) x=-2 точка максимума;
x=3 точка минимума.

Ответ: f(x) возрастает на (- ∞; -2)и на (3; ∞) ;
f(x) убывает на (-2;3);
xmax=-2, ymax=f(-2)=49;
xmin=3, ymin=f(3)=-76.