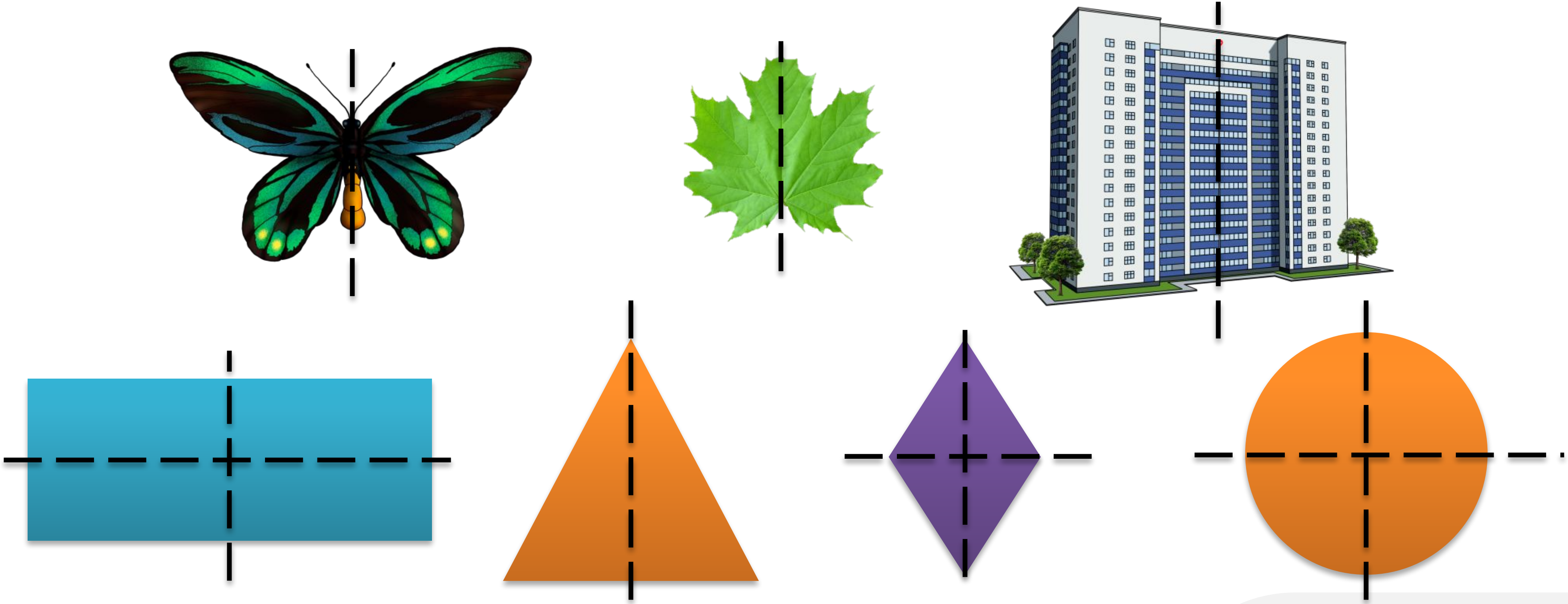
Осевая симметрия

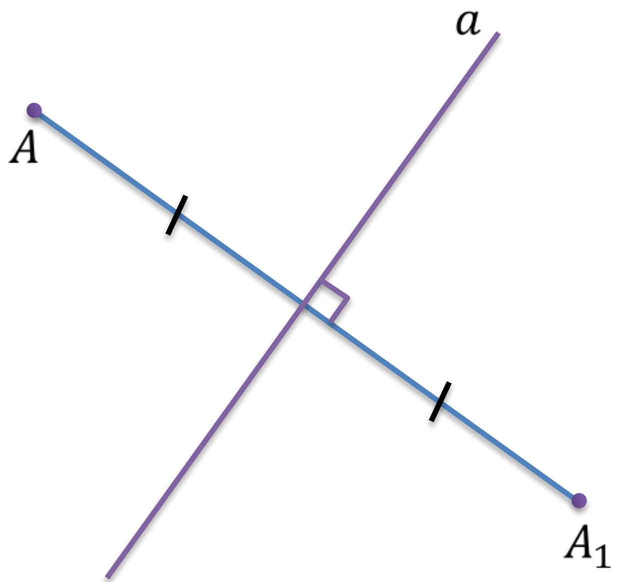
Сегодня на уроке:

- ✔ Осевая симметрия на плоскости
- ✔ Осевая симметрия в пространстве
- ✔ Будет ли осевая симметрия движением пространства?

Фигура называется ***симметричной относительно прямой а***, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой *а* также принадлежит этой фигуре. Прямая *а* называется ***осью симметрии фигуры***. Про такую фигуру говорят, что она обладает осевой симметрией.



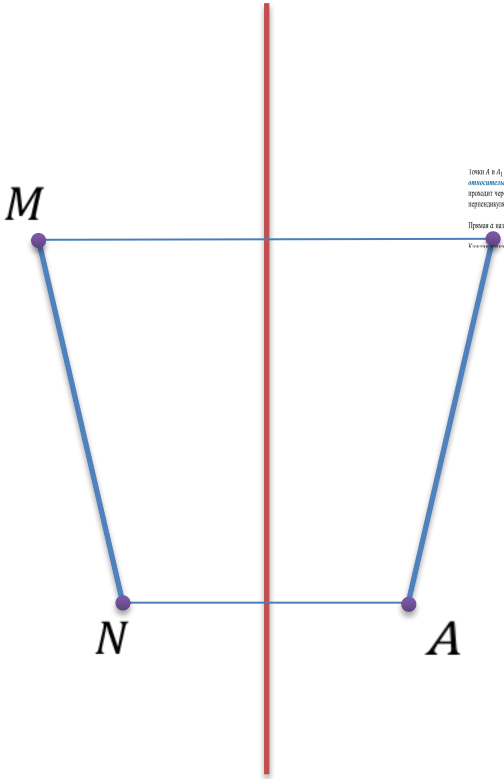
Симметрия относительно прямой



Точки A и A_1 называются ***симметричными относительно прямой a***, если прямая a проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку.

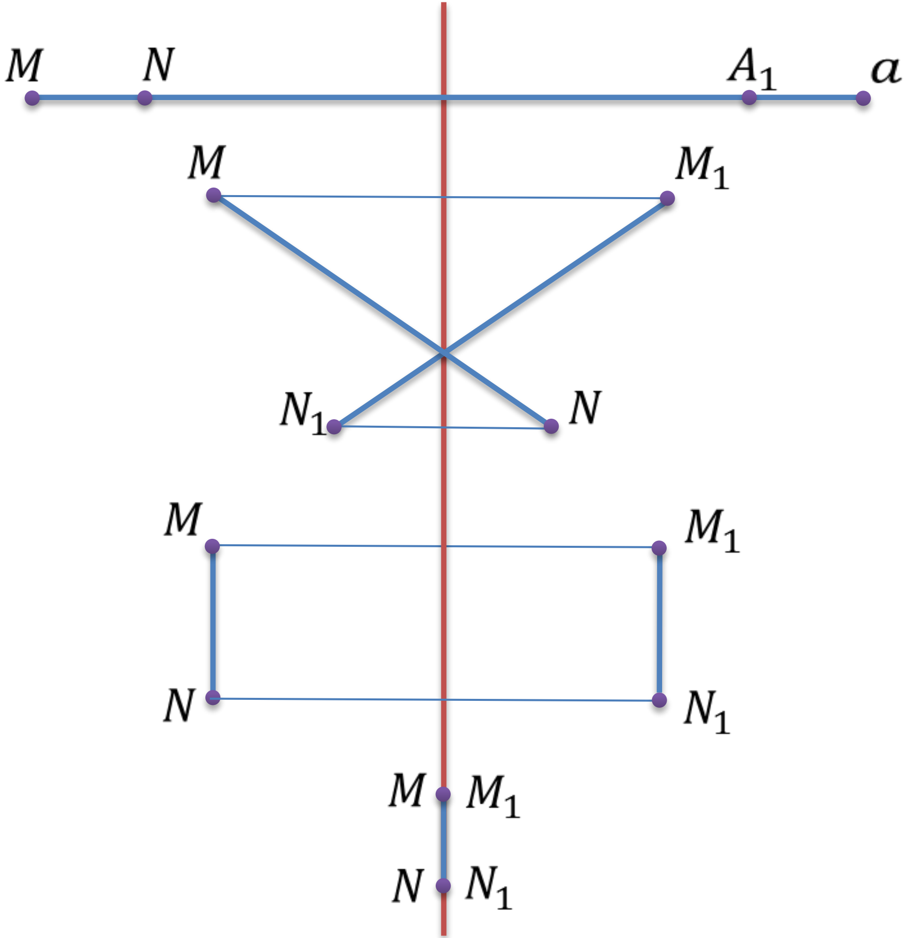
Прямая a называется ***осью симметрии***.

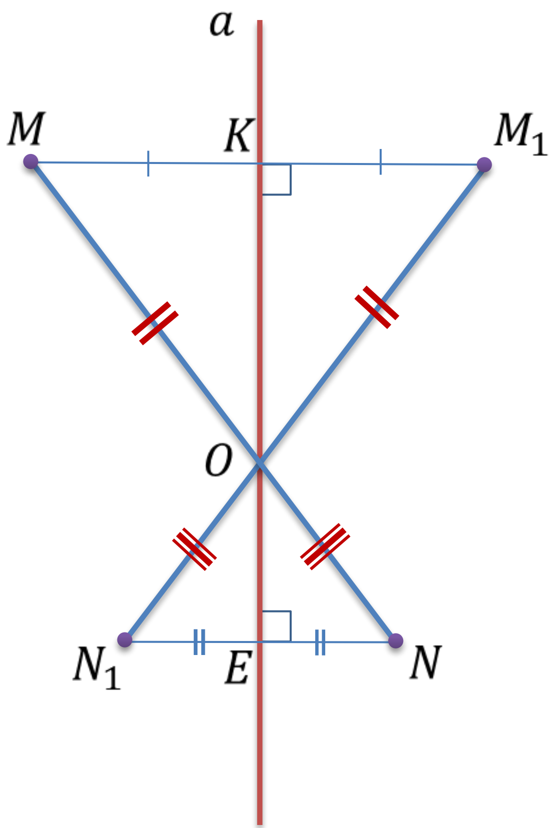
Каждая точка прямой a считается симметричной самой себе.



Точки A и A_1 называются ***симметричн***
относительно прямой a, если прямая
проходит через середину отрезка AA_1 и
перпендикулярна к этому отрезку.

Прямая a называется ***осью симметрии***



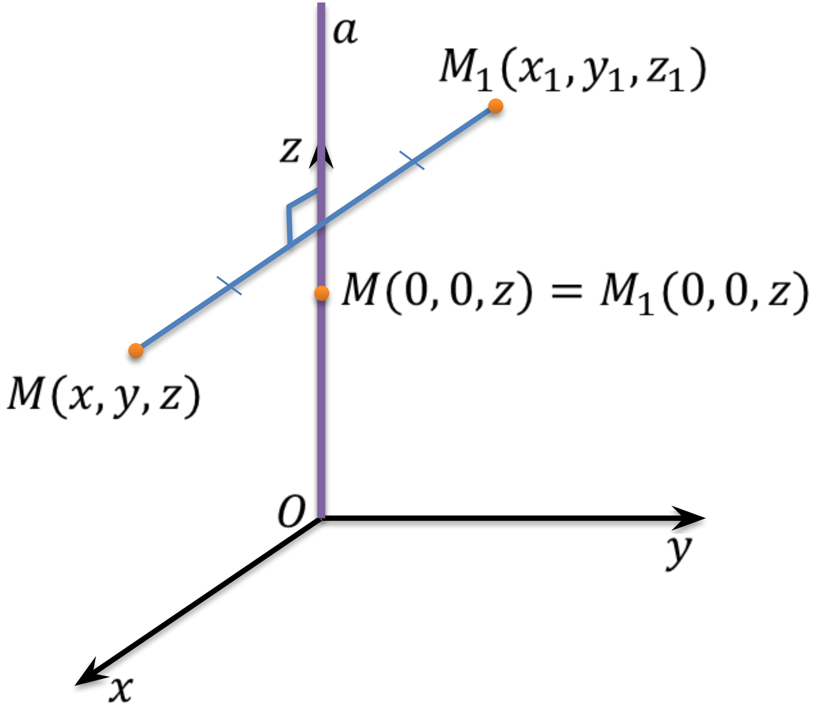


$$\left.\begin{array}{l} a \perp MM_1 \\ a \perp NN_1 \\ MK = KM_1 \\ N_1E = EN \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MOM_1 \text{ и } \Delta NON_1 \text{ равнобедренные}$$

$$\left.\begin{array}{l} MN = MO + ON \\ M_1N_1 = M_1O + ON_1 = MO + ON \end{array}\right\} \Rightarrow MN = M_1N_1$$

Осевая симметрия сохраняет расстояние между точками, то есть осевая симметрия – пример ***движения плоскости***

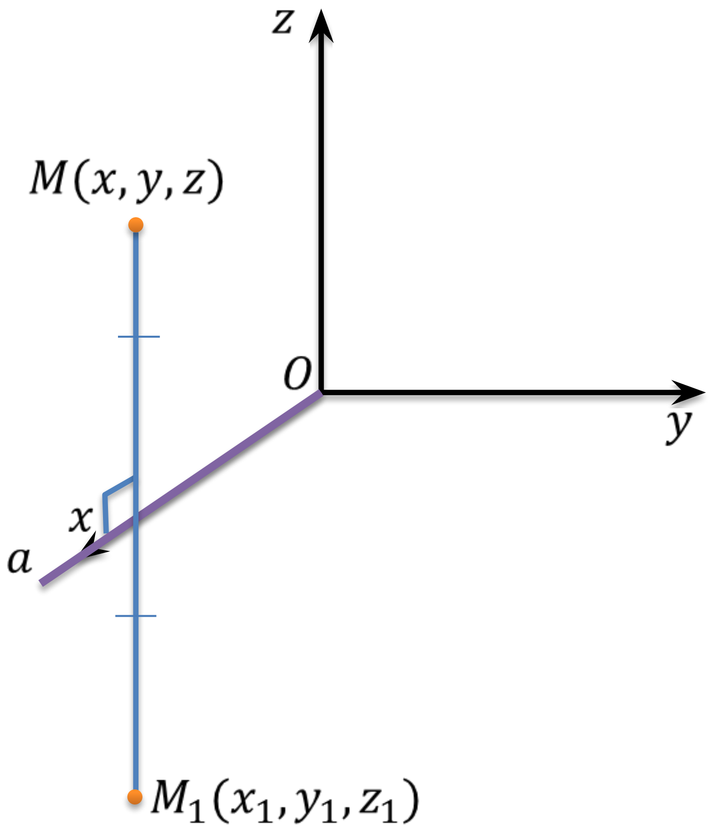
В пространстве ***осевой симметрией с осью a*** мы назовем такое отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в симметричную ей точку M_1 относительно оси a.



M_1 N_1 M

N_1 M_1 N

$z = z_1$

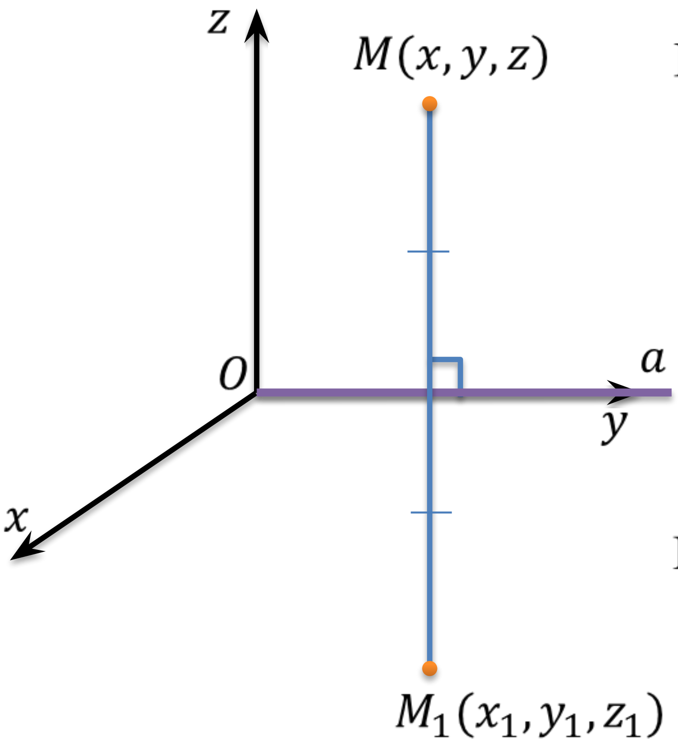


Если ось симметрии проходит через ось Ox:

$$x = x_1$$

$$\frac{y + y_1}{2} = 0 \Rightarrow y_1 = -y$$

$$\frac{z + z_1}{2} = 0 \Rightarrow z_1 = -z$$



Если ось симметрии проходит через ось Ox:

$$x = x_1$$

$$\frac{y + y_1}{2} = 0 \Rightarrow y_1 = -y$$

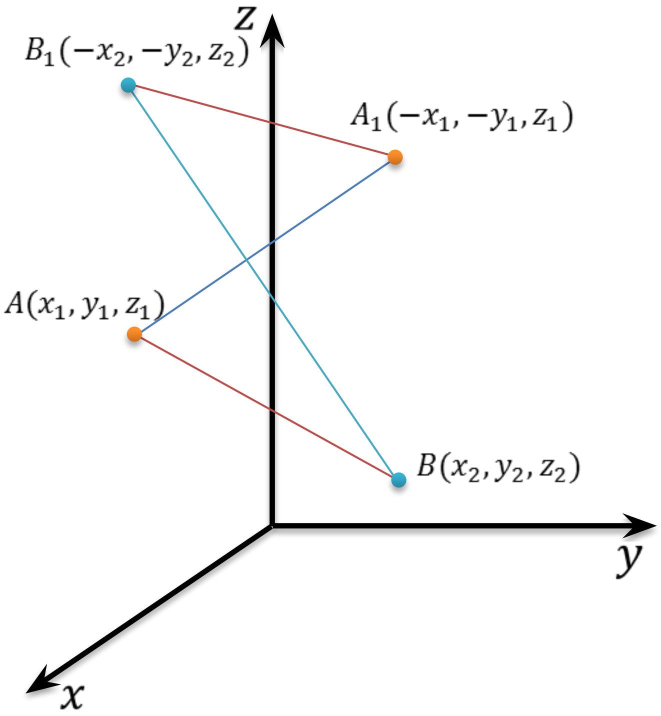
$$\frac{z + z_1}{2} = 0 \Rightarrow z_1 = -z$$

Если ось симметрии проходит через ось Oy:

$$\frac{x + x_1}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = -x$$

$$y = y_1$$

$$\frac{z + z_1}{2} = 0 \Rightarrow z_1 = -z$$



$$M_1N_1 = M_1O + ON_1$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2-(-x_1))^2+(-y_2-(-y_1))^2+(z_2-z_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(-(x_2-x_1))^2+(-(y_2-y_1))^2+(z_2-z_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$\Rightarrow MN = M_1N_1$$

Расстояние между точками при осевой симметрии в пространстве сохраняется, значит, осевая симметрия в пространстве также ***является движением***, но уже не плоскости, а ***пространства***.

Задача. Найти координаты точек, в которые переходят точки $A(0, 1, 2)$, $B(3, -1, 4)$, $C(1, 0, -2)$ при осевой симметрии относительно координатных осей.

Решение:

Если точка $M(x, y, z)$ симметрична точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ относительно оси Ox, то справедливы формулы: $x_1 = x,\quad y_1 = -y,\quad z_1 = -z$.

Точка $A(0, 1, 2)$ отобразится в точку $A_1(0, -1, -2)$.

Точка $B(3, -1, 4)$ отобразится в точку $B_1(3, 1, -4)$.

Точка $C(1, 0, -2)$ отобразится в точку $C_1(1, 0, 2)$.

Задача. Найти координаты точек, в которые переходят точки $A(0, 1, 2)$, $B(3, -1, 4)$, $C(1, 0, -2)$ при осевой симметрии относительно координатных осей.

Решение:

Если точка $M(x, y, z)$ симметрична точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ относительно оси Oy, то справедливы формулы: $x_1 = -x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = -z.$

Точка $A(0, 1, 2)$ отобразится в точку $A_1(0, 1, -2)$.

Точка $B(3, -1, 4)$ отобразится в точку $B_1(-3, -1, -4)$.

Точка $C(1, 0, -2)$ отобразится в точку $C_1(-1, 0, 2)$.

Задача. Найти координаты точек, в которые переходят точки $A(0, 1, 2)$, $B(3, -1, 4)$, $C(1, 0, -2)$ при осевой симметрии относительно координатных осей.

Решение:

Если точка $M(x, y, z)$ симметрична точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ относительно оси Oz, то справедливы формулы: $x_1 = -x, \quad y_1 = -y, \quad z_1 = z.$

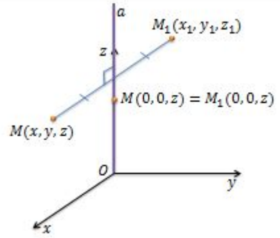
Точка $A(0, 1, 2)$ отобразится в точку $A_1(0, -1, 2)$.

Точка $B(3, -1, 4)$ отобразится в точку $B_1(-3, 1, 4)$.

Точка $C(1, 0, -2)$ отобразится в точку $C_1(-1, 0, -2)$.

Осевая симметрия

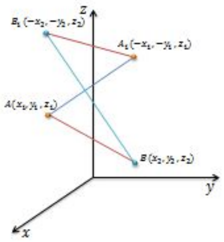
В пространстве *осевой симметрией с осью a* мы назовем такое отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в симметричную ей точку M_1 относительно оси a.



$$\frac{x + x_1}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = -x$$

$$\frac{y + y_1}{2} = 0 \Rightarrow y_1 = -y$$

$$z = z_1$$



$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (-y_2 - (-y_1))^2 + (z_2 - z_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(-(x_2 - x_1))^2 + (-(y_2 - y_1))^2 + (z_2 - z_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$AB = A_1B_1$$

Расстояние между точками при осевой симметрии в пространстве сохраняется, значит, осевая симметрия в пространстве также *является движением*, но уже не плоскости, а *пространства*.

Задача. Найти координаты точек, в которые переходят точки $A(0, 1, 2)$, $B(3, -1, 4)$, $C(1, 0, -2)$ при осевой симметрии относительно координатных осей.

Решение:

Если точка $M(x, y, z)$ симметрична точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ относительно оси Ox, то справедливы формулы: $x_1 = x$, $y_1 = -y$, $z_1 = -z$.

Точка $A(0, 1, 2)$ отобразится в точку $A_1(0, -1, -2)$.

Точка $B(3, -1, 4)$ отобразится в точку $B_1(3, 1, -4)$.

Точка $C(1, 0, -2)$ отобразится в точку $C_1(1, 0, 2)$.