Комплексные числа

ЗАДАНИЯ ПО ПРЕЗЕНТАЦИИ:

Выписать в тетрадь:

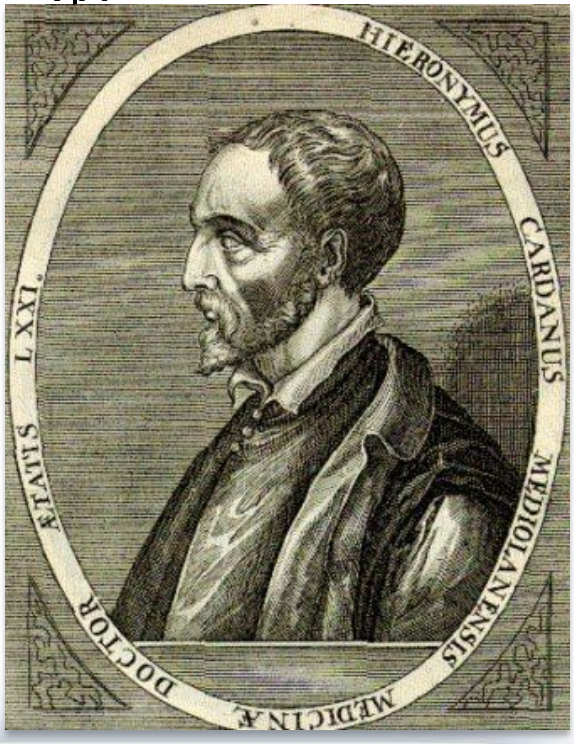
1) Определение комплексного числа
2) Что такое мнимая единица? Чему она равна?
3) Что обозначают действительной и мнимой частью комплексного числа?
4) Какие бывают действия над комплексными числами?
5) Примеры разобрать УСТНО.

Из истории комплексных чисел

Комплексные числа были введены в математику для того, чтобы сделать возможной операцию извлечения квадратного корня из любого действительного числа. Это, однако, не является достаточным основанием для того, чтобы вводить в математику новые числа. Оказалось, что если производить вычисления по обычным правилам над выражениями, в которых встречаются квадратный корень из отрицательного числа, то можно прийти к результату, уже не содержащему квадратный корень из отрицательного числа. В XVI в.

Кардано нашел формулу для решения кубического уравнения. Оказалось, когда кубическое уравнение имеет три действительных корня, в формуле Кардано встречается квадратный корень из отрицательного числа.

Впервые, по-видимому, мнимые величины появились в известном труде «Великое искусство, или об алгебраических правилах» ***Кардано*** (1545), который счёл их непригодными к употреблению.



Кардано Джероламо

Из истории комплексных чисел

Он же дал некоторые простейшие правила действий с комплексными числами. Выражения вида $a+b\sqrt{-1}$, появляющиеся при решении квадратных и кубических уравнений, стали называть «мнимыми» в XVI-XVII веках, однако даже для многих крупных ученых XVII века алгебраическая и геометрическая сущность мнимых величин представлялась неясной. Известно, например, что ***Ньютон*** не включал мнимые величины в понятие числа, а ***Лейбницу*** принадлежит фраза: «Мнимые числа – это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием»

Пользу мнимых величин, в частности, при решении кубического уравнения, в так называемом неприводимом случае (когда вещественные корни выражаются через кубические корни из мнимых величин), впервые оценил ***Бомбелли*** (1572). Задача о выражении корней степени n из данного числа была в основном решена в работах ***Муавра*** (1707) и ***Котса*** (1722).

Символ $i=\sqrt{-1}$ предложил ***Эйлер*** (1777, опубл. 1794), взявший для этого первую букву слова ***imaginarius***.

Леонард Эйлер

Из истории комплексных чисел

Он же высказал в 1751 году мысль об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел. К такому же выводу пришел ***Д'Аламбер*** (1747), но первое строгое доказательство этого факта принадлежит ***Гауссу*** (1799). ***Гаусс*** и ввёл в широкое употребление термин «комплексное число» в 1831 г, хотя этот термин ранее использовал в том же смысле французский математик ***Лазар Карно*** в 1803 году.

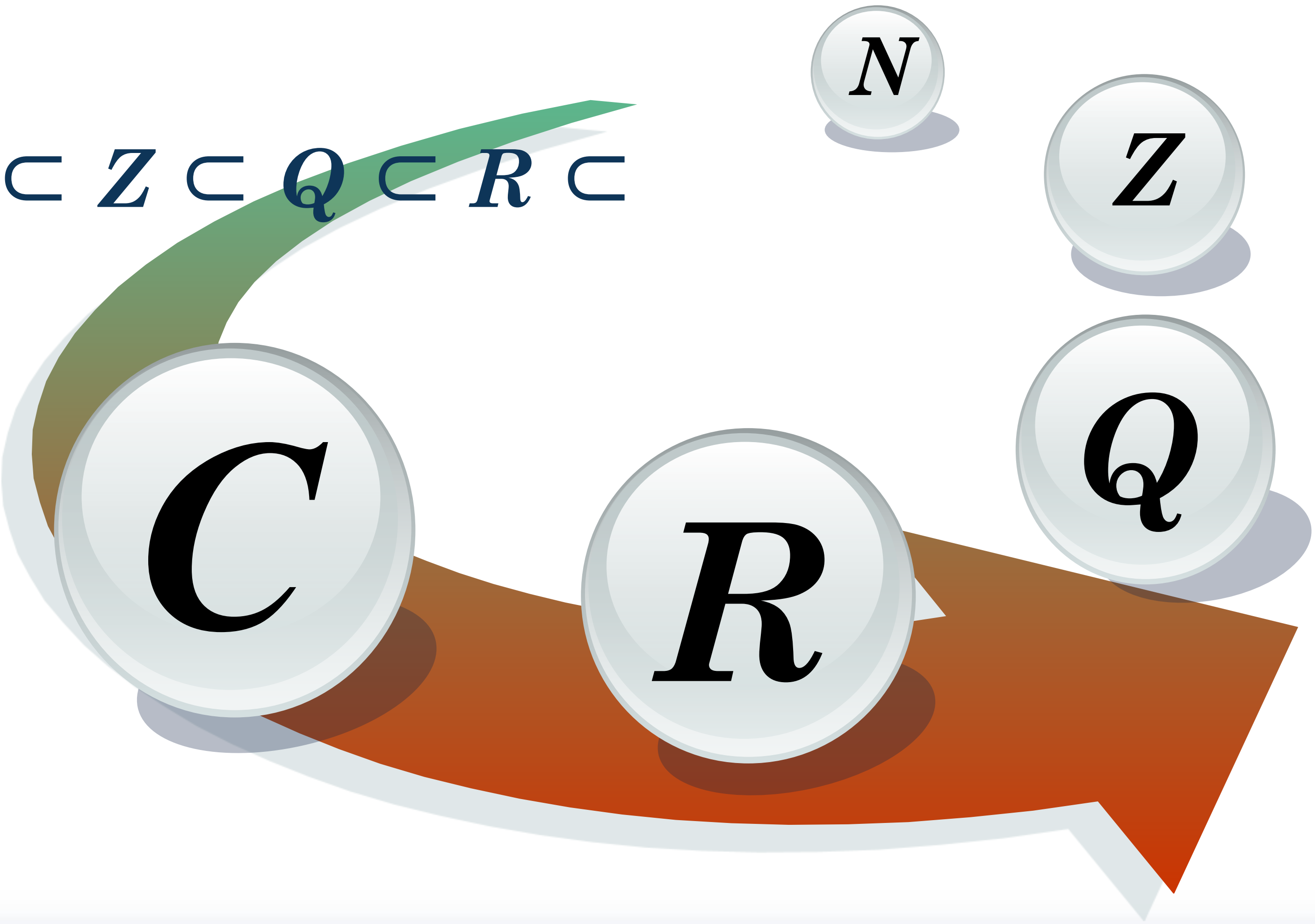
Полные гражданские права мнимым числам дал ***Гаусс***, который назвал их комплексными числами, дал геометрическую интерпретацию и доказал основную теорему алгебры, утверждающую, что каждый многочлен имеет хотя бы один действительный корень. Геометрическое истолкование комплексных чисел и действий над ними появилось впервые в работе ***Весселя*** (англ.), (1799). Первые шаги в этом направлении были сделаны ***Валлисом*** (Англия) в 1685 году.

Карл Гаусс

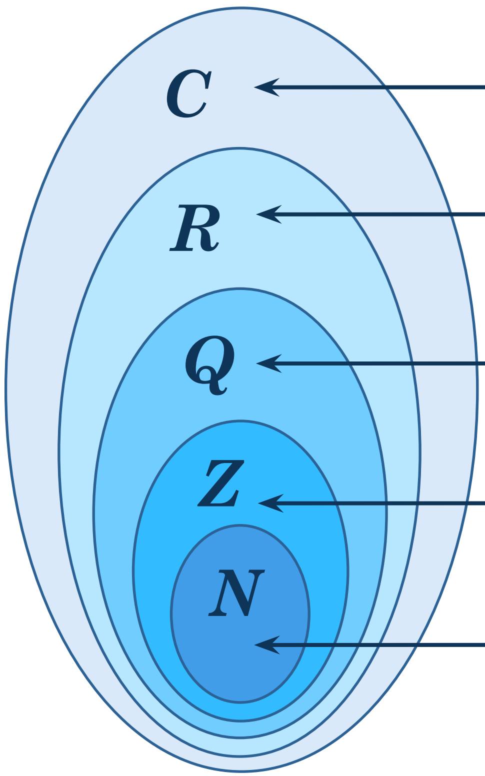
Содержание

Множества чисел

$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$



Алгебраические операции



Комплексные числа: +, –, ×, ÷, любые длины, $\sqrt{-1}$

Действительные числа: +, –, ×, ÷, любые длины

Рациональные числа: +, –, ×, ÷

Целые числа: +, –, ×

Натуральные числа: +, ×

Понятие комплексного числа

Комплексные числа C – это пара ***(a; b)*** действительных чисел с заданными определенным образом операциями умножения и сложения.
Комплексное число $z = (a; b)$ записывают как $z = a + bi$.

$i^2 = -1$, i – мнимая единица.

Число $Re\ z$ называется действительной частью числа z,
а число $Im\ z$ – мнимой частью числа z.
Их обозначают a и b соответственно: $a = Re\ z$, $b = Im\ z$.

Определение:
Числа вида $a + bi$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, называются ***комплексными***.

Понятие комплексного числа

Минимальные условия, которым должны удовлетворять комплексные числа:

C_1) *Существует комплексное число, квадрат которого равен* (-1).

C_2) *Множество комплексных чисел содержит все действительные числа.*

C_3) *Операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел удовлетворяют обычным законам арифметических действий* (сочетательному, переместительному, распределительному).

i – начальная буква французского слова ***imaginaire*** – «*мнимый*»

Действия над комплексными числами

Сравнение

$a + bi = c + di$ означает, что $a = c$ и $b = d$ (два комплексных числа равны между собой тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части)

Сложение

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Вычитание

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Умножение

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Деление

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$$

Сопряженные числа

Числа $z = a + bi$ и $\overline{z} = a - bi$ называются ***сопряженными***

Свойство 1: Если $z = a + bi$, то $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$.

Свойство 2: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Свойство 3: $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.

Свойство 4: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Свойство 5: $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \overline{z_3} \cdot \ldots \cdot \overline{z_n}$.

Свойство 6: $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

Примеры

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Например:

1. $(2 + 3i) + (5 + i) = (2 + 5) + (3 + 1)i = 7 + 4i;$

2. $(-2 + 3i) + (1 - 8i) = (-2 + 1) + (3 + (-8))i = -1 - 5i;$

3. $(-2 + 3i) + (1 - 3i) = (-2 + 1) + (3 + (-3))i = -1 + 0i = -1.$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Например:

$(5 - 8i) - (2 + 3i) = (3 - 2) + (-8 - 3)i = 1 - 11i;$

$(3 - 2i) - (1 - 2i) = (3 - 1) + ((-2) - (-2))i = 2 + 0i = 2.$

Примеры

$$(a + bi)(c + di) = (ac + bd) + (ad + bc)i$$

Например:

1. $(-1 + 3i)(2 + 5i) = -2 - 5i + 6i + 15i^2 = -2 - 5i + 6i - 15 = -17 + i;$

2. $(2 + 3i)(2 - 3i) = 4 - 6i + 6i - 9i^2 = 4 + 9 = 13.$

Произведение двух сопряженных чисел – действительное число:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

Произведение двух чисто мнимых чисел – действительное число:

$$bi \cdot di = bdi^2 = -bd$$

Например:

1. $5i \cdot 3i = 15i^2 = -15;$

2. $-2i \cdot 3i = -6i^2 = 6.$

Примеры

Деление комплексного числа $a + bi$ на комплексное число $c + di \neq 0$ определяется как операция обратная умножению и выполняется по формуле:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i$$

Формула теряет смысл, если $c + di = 0$, так как тогда $c^2 + d^2 = 0$, т. е. деление на нуль и во множестве комплексных чисел исключается.

Обычно деление комплексных чисел выполняют путем умножения делимого и делителя на число, сопряженное делителю.

Например:

1). $$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{1+1} = \frac{1+2i+i^2}{2} = i$$

2). $$\frac{3+2i}{2+i} = \frac{(3+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{8+i}{2^2-i^2} = \frac{8+i}{5} = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}i$$

Комплексные числа на координатной плоскости