

Комплексные числа

The background features a dark blue grid. A large, 3D-style arrow points from the bottom left towards the top right. The arrow's shaft is a wavy, multi-colored ribbon (blue, green, red, purple) that transitions into a solid blue arrowhead. On the right side, there is a vertical axis with tick marks and numbers: 14, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0. The numbers 14, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 are arranged vertically from top to bottom. The overall aesthetic is technical and mathematical.

ЗАДАНИЯ ПО ПРЕЗЕНТАЦИИ:

Выписать в тетрадь:

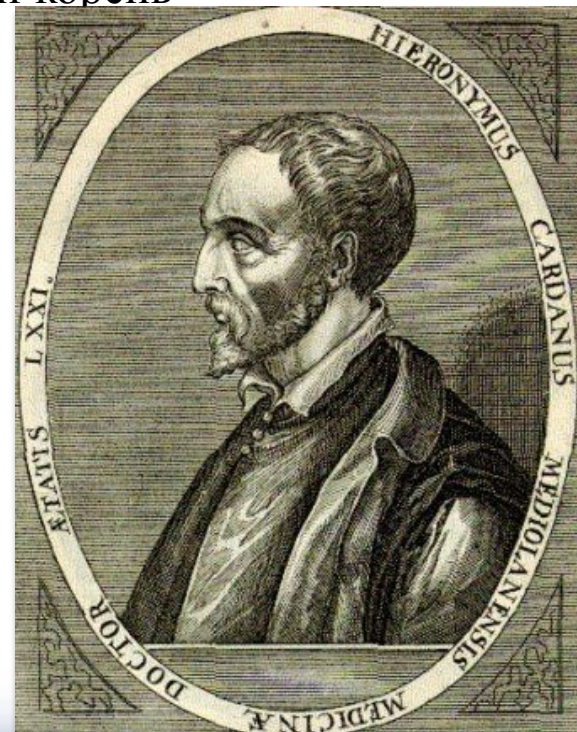
- 1) Определение комплексного числа
- 2) Что такое мнимая единица? Чему она равна?
- 3) Что обозначают действительной и мнимой частью комплексного числа?
- 4) Какие бывают действия над комплексными числами?
- 5) Примеры разобрать УСТНО.

Из истории комплексных чисел

Комплексные числа были введены в математику для того, чтобы сделать возможной операцию извлечения квадратного корня из любого действительного числа. Это, однако, не является достаточным основанием для того, чтобы вводить в математику новые числа. Оказалось, что если производить вычисления по обычным правилам над выражениями, в которых встречаются квадратный корень из отрицательного числа, то можно прийти к результату, уже не содержащему квадратный корень из отрицательного числа. В XVI в.

Кардано нашел формулу для решения кубического уравнения. Оказалось, когда кубическое уравнение имеет три действительных корня, в формуле Кардано встречается квадратный корень из отрицательного числа.

Впервые, по-видимому, мнимые величины появились в известном труде «Великое искусство, или об алгебраических правилах» *Кардано* (1545), который счёл их непригодными к употреблению.



Кардано Джероламо

Из истории комплексных чисел

Он же дал некоторые простейшие правила действий с комплексными числами. Выражения вида $a+b\sqrt{-1}$, появляющиеся при решении квадратных и кубических уравнений, стали называть «мнимыми» в XVI-XVII веках, однако даже для многих крупных ученых XVII века алгебраическая и геометрическая сущность мнимых величин представлялась неясной. Известно, например, что *Ньютон* не включал мнимые величины в понятие числа, а *Лейбницу* принадлежит фраза: «Мнимые числа — это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием»

Пользу мнимых величин, в частности, при решении кубического уравнения, в так называемом неприводимом случае (когда вещественные корни выражаются через кубические корни из мнимых величин), впервые оценил *Бомбелли* (1572). Задача о выражении корней степени n из данного числа была в основном решена в работах *Муавра* (1707) и *Котса* (1722).

Символ $i=\sqrt{-1}$ предложил *Эйлер* (1777, опубл. 1794), взявший для этого первую букву слова *imaginarius*.



Леонард Эйлер

Из истории комплексных чисел

Он же высказал в 1751 году мысль об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел. К такому же выводу пришел *Д'Аламбер* (1747), но первое строгое доказательство этого факта принадлежит *Гауссу* (1799). *Гаусс* и ввёл в широкое употребление термин «комплексное число» в 1831 г, хотя этот термин ранее использовал в том же смысле французский математик *Лазар Карно* в 1803 году.

Полные гражданские права мнимым числам дал *Гаусс*, который назвал их комплексными числами, дал геометрическую интерпретацию и доказал основную теорему алгебры, утверждающую, что каждый многочлен имеет хотя бы один действительный корень. Геометрическое истолкование комплексных чисел и действий над ними появилось впервые в работе *Весселя* (англ.), (1799). Первые шаги в этом направлении были сделаны *Валлисом* (Англия) в 1685 году.



Карл Гаусс

Содержание

1 Множества чисел

2 Алгебраические операции

3 Понятие комплексного числа

4 Действия над комплексными числами

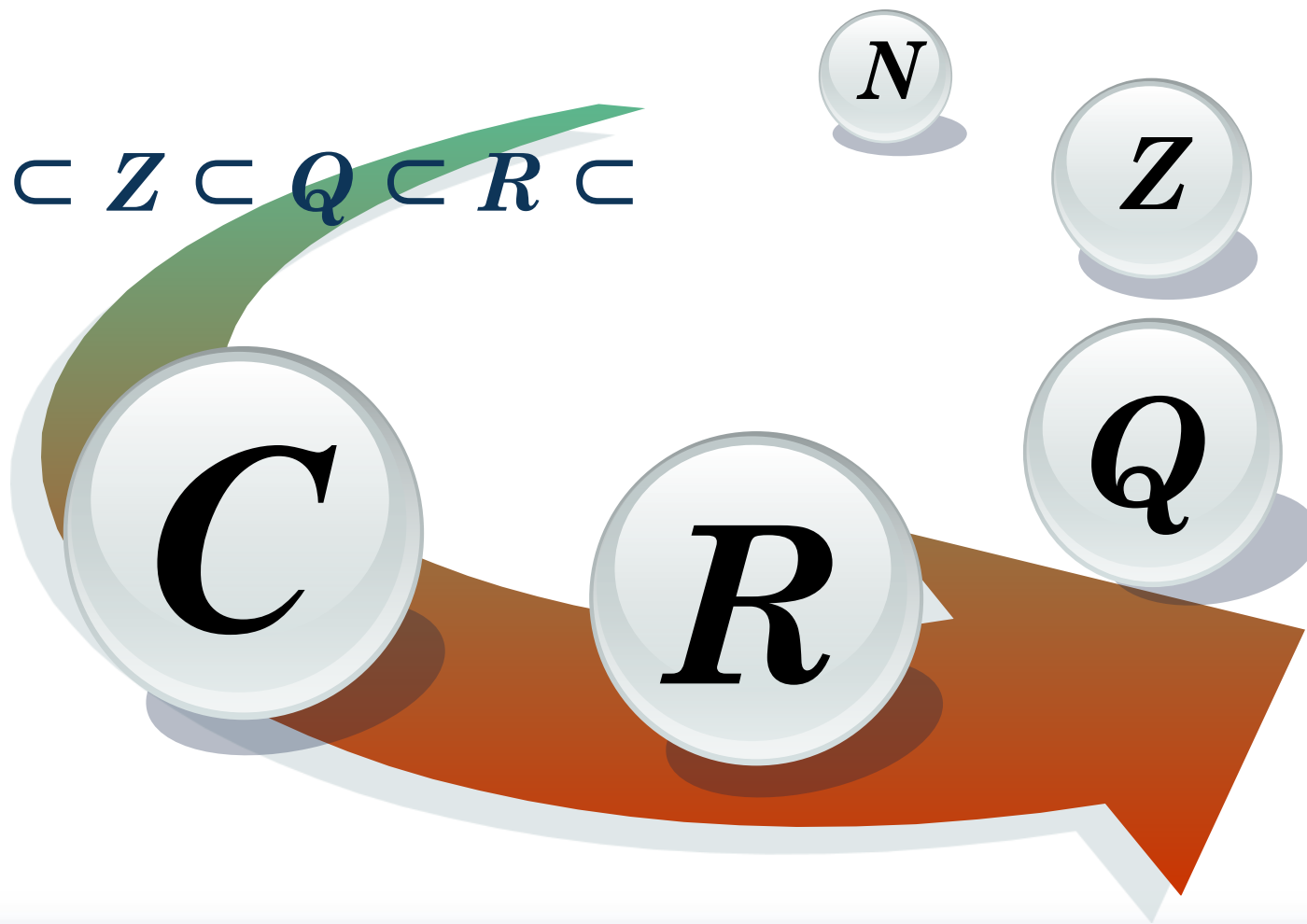
5 Понятие сопряженного числа

6 Примеры

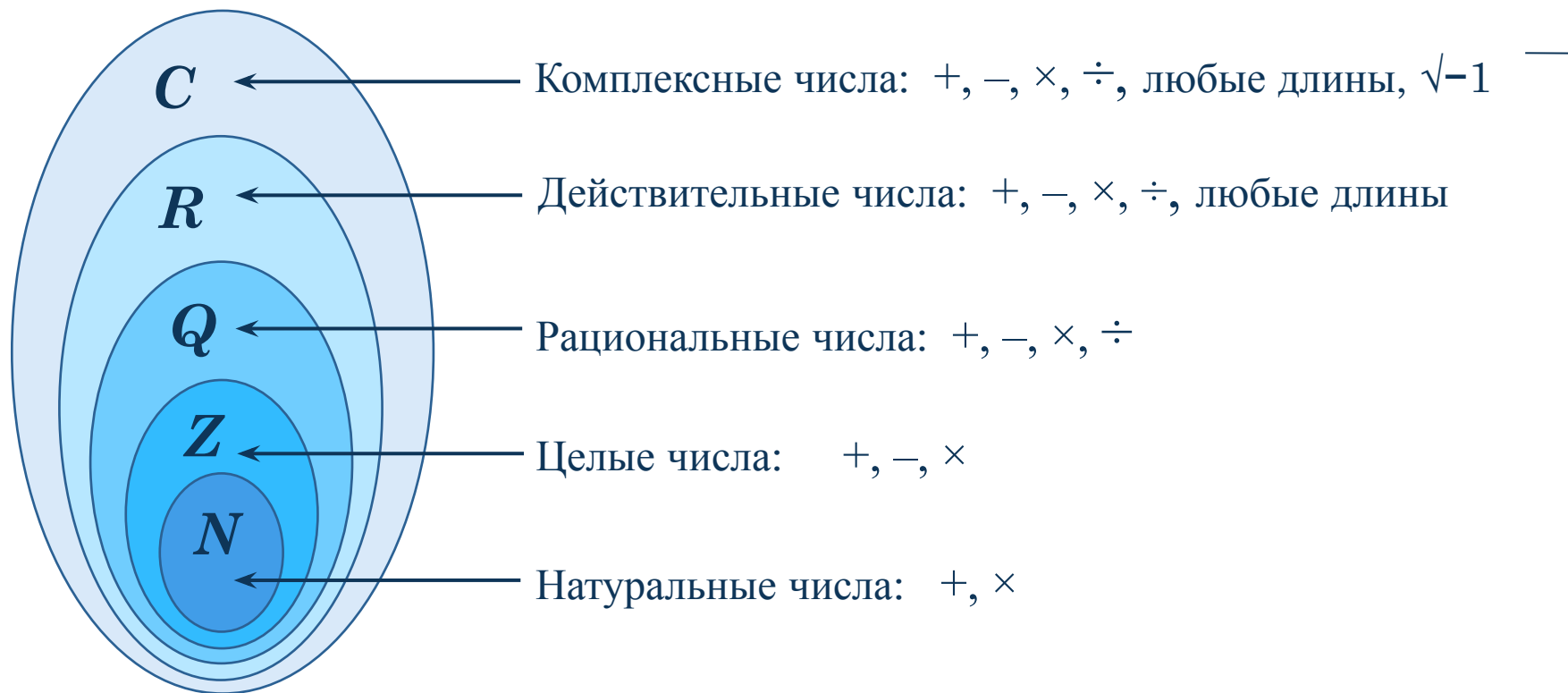


Множества чисел

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$



Алгебраические операции



Понятие комплексного числа

Комплексные числа C – это пара $(a; b)$ действительных чисел с заданными определенным образом операциями умножения и сложения.

Комплексное число $z = (a; b)$ записывают как $z = a + bi$.

$$i^2 = -1, \quad i \text{ – мнимая единица.}$$

Число $Re z$ называется действительной частью числа z , а число $Im z$ – мнимой частью числа z .

Их обозначают a и b соответственно: $a = Re z, b = Im z$.

Определение:

Числа вида $a + bi$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, называются **комплексными**.

Понятие комплексного числа

Минимальные условия, которым должны удовлетворять комплексные числа:

- C_1) Существует комплексное число, квадрат которого равен (-1) .
- C_2) Множество комплексных чисел содержит все действительные числа.
- C_3) Операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел удовлетворяют обычным законам арифметических действий (сочетательному, переместительному, распределительному).

i — начальная буква французского слова *imaginaire* — «мнимый»

Действия над комплексными числами

Сравнение

$a + bi = c + di$ означает, что $a = c$ и $b = d$ (два комплексных числа равны между собой тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части)

Сложение

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Вычитание

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Умножение

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Деление

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$$

Сопряженные числа

Числа $z = a + bi$ и $z = a - bi$ называются *сопряженными*

Свойство 1: Если $z = a + bi$, то $z \cdot \bar{z} \equiv a^2 + b^2$.

Свойство 2: $\overline{z_1 + z_2} \equiv \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

Свойство 3: $\overline{z_1 - z_2} \equiv \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

Свойство 4: $\overline{z_1 \cdot z_2} \equiv \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

Свойство 5: $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_n} \equiv \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \bar{z}_3 \cdot \dots \cdot \bar{z}_n$

Свойство 6: $\overline{z^n} \equiv (\bar{z})^n$

Примеры

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Например:

1. $(2 + 3i) + (5 + i) = (2 + 5) + (3 + 1)i = 7 + 4i$;
2. $(-2 + 3i) + (1 - 8i) = (-2 + 1) + (3 + (-8))i = -1 - 5i$;
3. $(-2 + 3i) + (1 - 3i) = (-2 + 1) + (3 + (-3))i = -1 + 0i = -1$.

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Например:

- $$(5 - 8i) - (2 + 3i) = (3 - 2) + (-8 - 3)i = 1 - 11i$$
- $$(3 - 2i) - (1 - 2i) = (3 - 1) + ((-2) - (-2))i = 2 + 0i = 2.$$

Примеры

$$(a + bi)(c + di) = (ac + bd) + (ad + bc)i$$

Например:

1. $(-1 + 3i)(2 + 5i) = -2 - 5i + 6i + 15i^2 = -2 - 5i + 6i - 15 = -17 + i;$

2. $(2 + 3i)(2 - 3i) = 4 - 6i + 6i - 9i^2 = 4 + 9 = 13.$

Произведение двух сопряженных чисел – действительное число:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

Произведение двух чисто мнимых чисел – действительное число:

$$bi \cdot di = bdi^2 = -bd$$

Например:

1. $5i \cdot 3i = 15i^2 = -15;$

2. $-2i \cdot 3i = -6i^2 = 6.$

Примеры

Деление комплексного числа $a + bi$ на комплексное число $c + di \neq 0$ определяется как операция обратная умножению и выполняется по формуле:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$$

Формула теряет смысл, если $c + di = 0$, так как тогда $c^2 + d^2 = 0$, т. е. деление на нуль и во множестве комплексных чисел исключается.

Обычно деление комплексных чисел выполняют путем умножения делимого и делителя на число, сопряженное делителю.

Например:

$$1). \quad \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{1+1} = \frac{1+2i+i^2}{2} = i$$

$$2). \quad \frac{3+2i}{2+i} = \frac{(3+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{8+i}{2^2-i^2} = \frac{8+i}{5} = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}i$$

Комплексные числа на координатной плоскости

