Распределение Максвелла

Практическое занятие

$$F(|\vec{\upsilon}|) = f(\upsilon)4\pi\upsilon^2 = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right)4\pi\upsilon^2$$

1.(5.49) Найти число молекул водорода в объеме V=1 см^3, если давление P=200 мм рт. ст., а средняя квадратичная скорость его молекул при данных условиях $<\upsilon_{ск}>=2{,}4\cdot10^3$ м/с.

Решение.

Дано
V=1 см^3
P=200 мм рт. ст.,
$<\upsilon_{ск}>=2{,}4\cdot10^3$ м/с

N=?

$$N=\frac{m}{\mu}N_A \qquad \upsilon_{ск}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

$$PV=\frac{m}{\mu}RT \qquad \frac{m}{\mu}=\frac{PV}{RT}$$

$$RT=\frac{(<\upsilon_{ск}>)^2\mu}{3} \qquad N=\frac{3N_A\cdot PV}{(\upsilon_{ск})^2\mu}$$

$$N=\frac{3\cdot6{,}02\cdot10^{23}\cdot26{,}6\cdot10^3\cdot10^{-6}}{(2{,}4)^2\cdot10^6\cdot2\cdot10^{-3}}=4{,}17\cdot10^{18}\approx4{,}2\cdot10^{18}$$

Ответ: N=4,2 $\cdot$ 10^{18}.

2.(5.50) Плотность некоторого газа ρ=6 · 10^{-2} кг/м^3, а средняя квадратичная скорость его молекул <υ$_{ск}$>=500 м/с. Найти давление P, которое газ оказывает на стенки сосуда.

Решение.

Дано
ρ=6 · 10^{-2} кг/м^3
<υ$_{ск}$>=500 м/с

P=?

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad \upsilon_{ск} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

$$PV = \frac{m}{\mu}RT \qquad P = \frac{m}{V}\cdot\frac{RT}{\mu} = \rho\cdot\frac{RT}{\mu}$$

$$\frac{RT}{\mu} = \frac{(\upsilon_{ск})^2}{3} \qquad P = \frac{\rho(\upsilon_{ск})^2}{3}$$

$$P = \frac{6\cdot 10^{-2}\cdot 25\cdot 10^4}{3} = 5\cdot 10^3\,(Па)$$

Ответ: P=5 · 10^3 Па.

3.(5.56) **1) Найти среднюю квадратичную скорость молекул газа, плотность которого при давлении P=750 мм рт. ст. равна ρ=8,2 · 10^{-2} кг/м^3. 2) Чему равна молярная масса этого газа, если значение плотности дано для температуры t=17^{0}C?**

Дано

ρ=8,2 · 10^{-2} кг/м^3

$R = 8{,}31\, Дж/моль \cdot К$

$P = 750 \cdot 133 =$

$= 99{,}75 \cdot 10^3 (Па)$

$T = 17 + 273 = 290 (К)$

$\upsilon_{ск} = ?$

$\mu = ?$

Решение.

$$\upsilon_{ск} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \qquad PV = \frac{m}{\mu} RT \qquad \frac{RT}{\mu} = \frac{PV}{m} = \frac{P}{\rho}$$

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad \mu = \frac{3RT}{(\upsilon_{ск})^2}$$

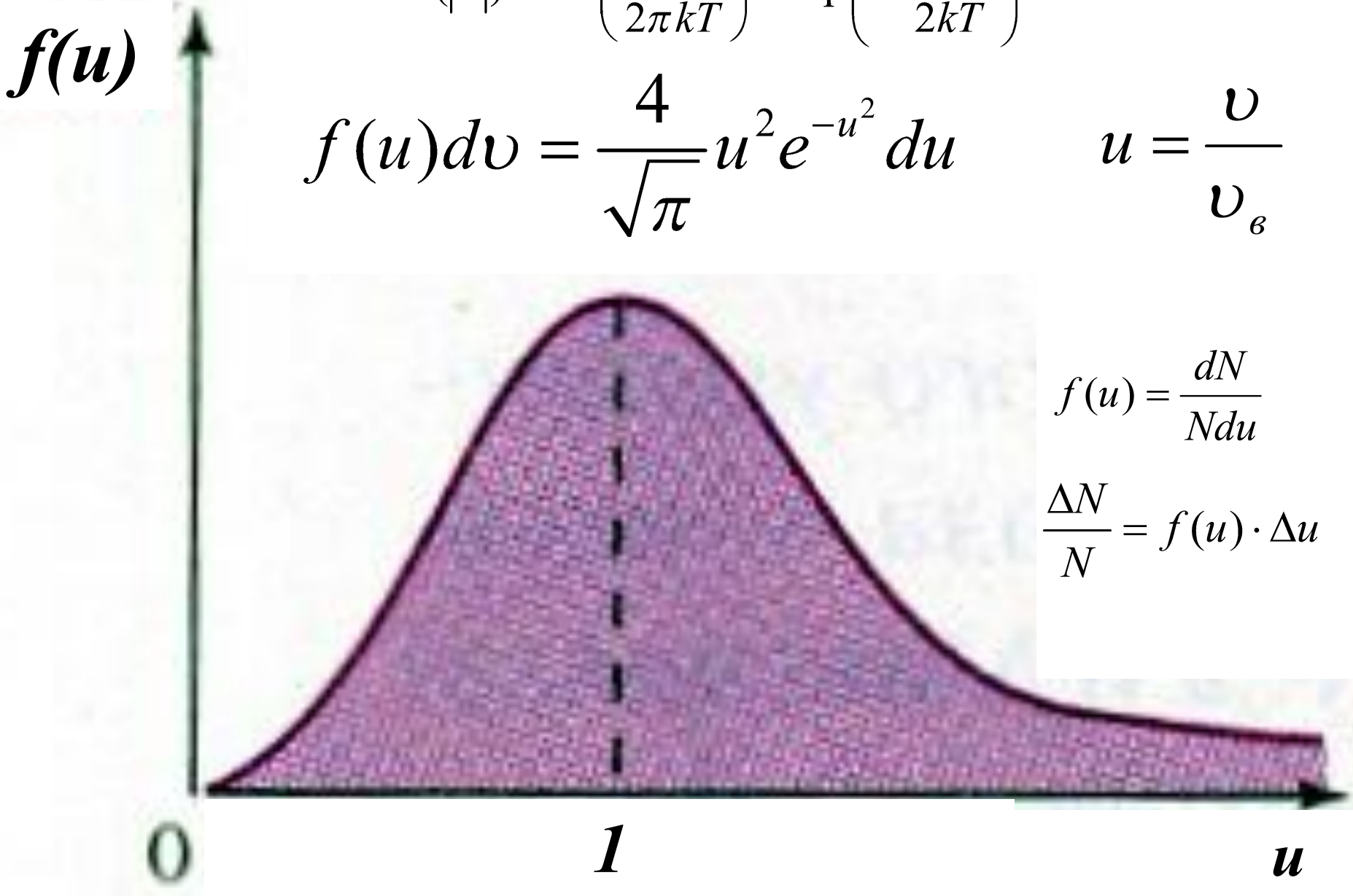
$$\upsilon_{ск} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}} \qquad \mu = \frac{RT\rho}{P}$$

$$\upsilon_{ск} = \sqrt{\frac{3 \cdot 99{,}75 \cdot 10^3}{8{,}2 \cdot 10^{-2}}} = 1{,}91 \cdot 10^3 (м/с) \qquad \mu = \frac{8{,}31 \cdot 290 \cdot 8{,}2 \cdot 10^{-2}}{99{,}75 \cdot 10^3} = 1{,}98 \cdot 10^{-3} (кг/моль)$$

Ответ: 1) <$\upsilon_{ск}$>=1,9 · 10^3 м/с; 2) M=2 · 10^{-3} кг/моль.

$$F(|\upsilon|)d\upsilon = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right) 4\pi\upsilon^2 d\upsilon$$

$$f(u)d\upsilon = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2} du \qquad u = \frac{\upsilon}{\upsilon_в}$$



$$f(u) = \frac{dN}{Ndu}$$

$$\frac{\Delta N}{N} = f(u) \cdot \Delta u$$

Значения функции f(u)

u	f(u)	u	f(u)	u	f(u)
0	0	0,9	0,81	1,8	0,29
0,1	0,02	1,0	0,83	1,9	0,22
0,2	0,09	1,1	0,82	2,0	0,16
0,3	0,18	1,2	0,78	2,1	0,12
0,4	0,31	1,3	0,71	2,2	0,09
0,5	0,44	1,4	0,63	2,3	0,06
0,6	0,57	1,5	0,54	2,4	0,04
0,7	0,68	1,6	0,46	2,5	0,03
0,8	0,76	1,7	0,36		

$$dN(u) = N f(u) du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N u^2 e^{-u^2} du$$

$$dN(u) = Nf(u)du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} Nu^2 e^{-u^2} du$$

Относительное число молекул, скорости которых лежат в интервале от $u_1 < u < \infty$, рассчитанные по формуле:

$$\frac{N_1}{N} = \int_{u_1}^{\infty} f(u)du$$

, приводятся в таблице:

u_1	N_1/N	u_1	N_1/N
0	1,000	0,8	0,734
0,2	0,994	1,0	0,572
0,4	0,957	1,25	0,374
0,5	0,918	1,5	0,213
0,6	0,868	2,0	0,046
0,7	0,806	2,5	0,0057

4.(5.95) Какая часть молекул кислорода (O_2) при t=0^{0}C обладает модулем скорости, заключенным в интервале от υ_1=100 м/с до υ_2=110 м/с?

Решение.

Дано

T=273K

υ_1=100 м/с до

υ_2=110 м/с

$$\mu = 32 \cdot 10^{-3}\ {}^{кг}\!/_{моль}$$

$$\frac{\Delta N}{N} = ?$$

$$\upsilon_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot 273}{32 \cdot 10^{-3}}} \approx 376({}^{м}\!/_{с})$$

$$u_1 = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_в} = \frac{100}{376} = 0{,}27$$

$$u_2 = 0{,}297(\approx 0{,}3)$$

$$\Delta u = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{\upsilon_в} = 0{,}027$$

$$\Delta u << u$$

$$\frac{\Delta N}{N} = f(u) \cdot \Delta u$$

u	f(u)	u	f(u)	u	f(u)
0	0	0,9	0,81	1,8	0,29
0,1	0,02	1,0	0,83	1,9	0,22
0,2	0,09	1,1	0,82	2,0	0,16
0,3	**0,18**	1,2	0,78	2,1	0,12
0,4	0,31	1,3	0,71	2,2	0,09
0,5	0,44	1,4	0,63	2,3	0,06
0,6	0,57	1,5	0,54	2,4	0,04
0,7	0,68	1,6	0,46	2,5	0,03
0,8	0,76	1,7	0,36		

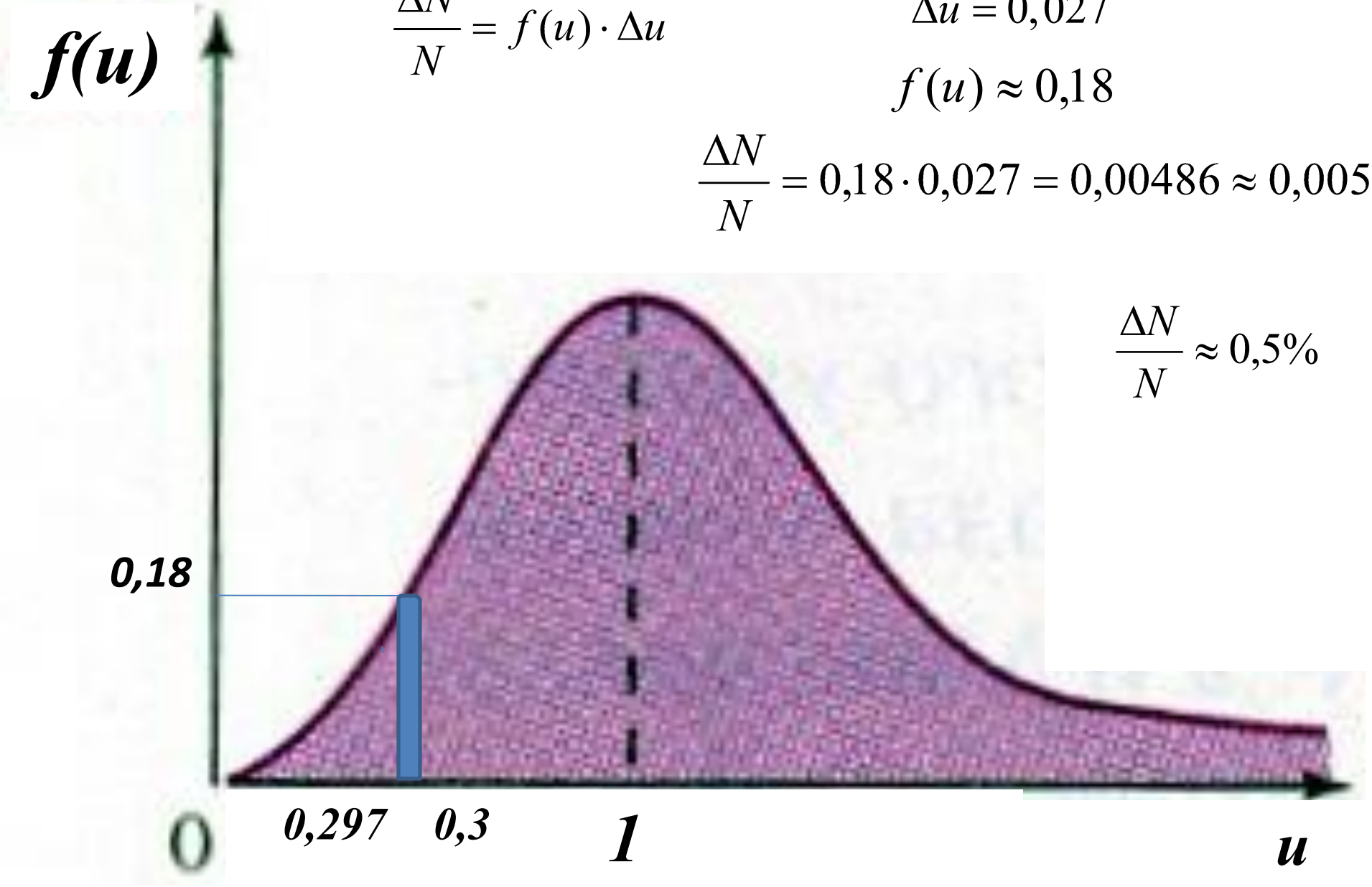
$$\frac{\Delta N}{N} = f(u) \cdot \Delta u$$

$$\Delta u = 0{,}027$$

$$f(u) \approx 0{,}18$$

$$\frac{\Delta N}{N} = 0{,}18 \cdot 0{,}027 = 0{,}00486 \approx 0{,}005$$

$$\frac{\Delta N}{N} \approx 0{,}5\%$$



5.(5.97) Какая часть молекул водорода (H_2) при t=0^{0}C обладает модулем скорости, заключенным в интервале от υ_1=2000 м/с до υ_2=2100 м/с?

Решение. .

$$\upsilon_в = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot 273}{2 \cdot 10^{-3}}} = 1506 (м/с)$$

Дано

$$\mu = 2 \cdot 10^{-3}\ кг/моль$$

υ_1=2000 м/с

υ_2=2100 м/с

$$\frac{\Delta N}{N} = ?$$

$$u = \frac{\upsilon}{\upsilon_в} = \frac{2000}{1506} = 1{,}33$$

$$u = 1{,}33 (\approx 1{,}3)$$

$$f(u) = 0{,}71$$

u	f(u)	u	f(u)	u	f(u)
0	0	0,9	0,81	1,8	0,29
0,1	0,02	1,0	0,83	1,9	0,22
0,2	0,09	1,1	0,82	2,0	0,16
0,3	0,18	1,2	0,78	2,1	0,12
0,4	0,31	**1,3**	**0,71**	2,2	0,09
0,5	0,44	1,4	0,63	2,3	0,06
0,6	0,57	1,5	0,54	2,4	0,04
0,7	0,68	1,6	0,46	2,5	0,03
0,8	0,76	1,7	0,36		

$$\Delta u << u$$

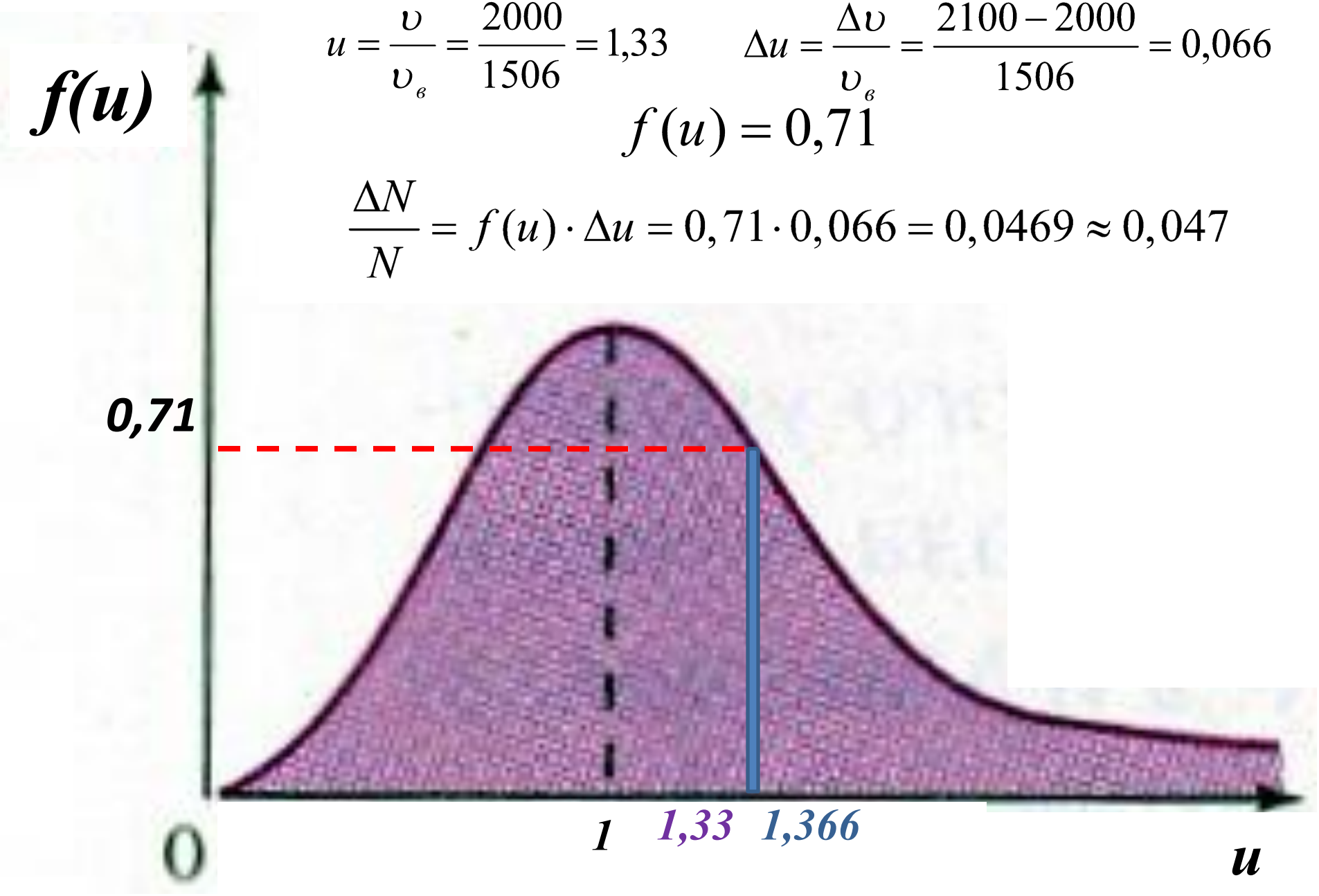
$$\Delta u = \frac{\Delta \upsilon}{\upsilon_в} = \frac{2100 - 2000}{1506} = 0{,}066$$

$$\frac{\Delta N}{N} = f(u) \cdot \Delta u$$

$$u = \frac{\upsilon}{\upsilon_в} = \frac{2000}{1506} = 1{,}33 \qquad \Delta u = \frac{\Delta\upsilon}{\upsilon_в} = \frac{2100-2000}{1506} = 0{,}066$$

$$f(u) = 0{,}71$$

$$\frac{\Delta N}{N} = f(u)\cdot\Delta u = 0{,}71\cdot 0{,}066 = 0{,}0469 \approx 0{,}047$$



Ответ: 4,5 %.

6.(5.99) Какая часть молекул азота (N_2), находящегося при температуре T, имеет скорости, лежащие в интервале от $\upsilon_в$ до $\upsilon_в+\Delta\upsilon$, где $\Delta\upsilon$=20 м/с?
Задачу решить для: 1) T=400 К, 2) T=900 К.

Дано

$\mu = 28\cdot 10^{-3}\ кг/моль$

$\Delta\upsilon$=20 м/с

1) T=400 К

2) T=900 К

$\frac{\Delta N_1}{N} = ?$

$\frac{\Delta N_2}{N} = ?$

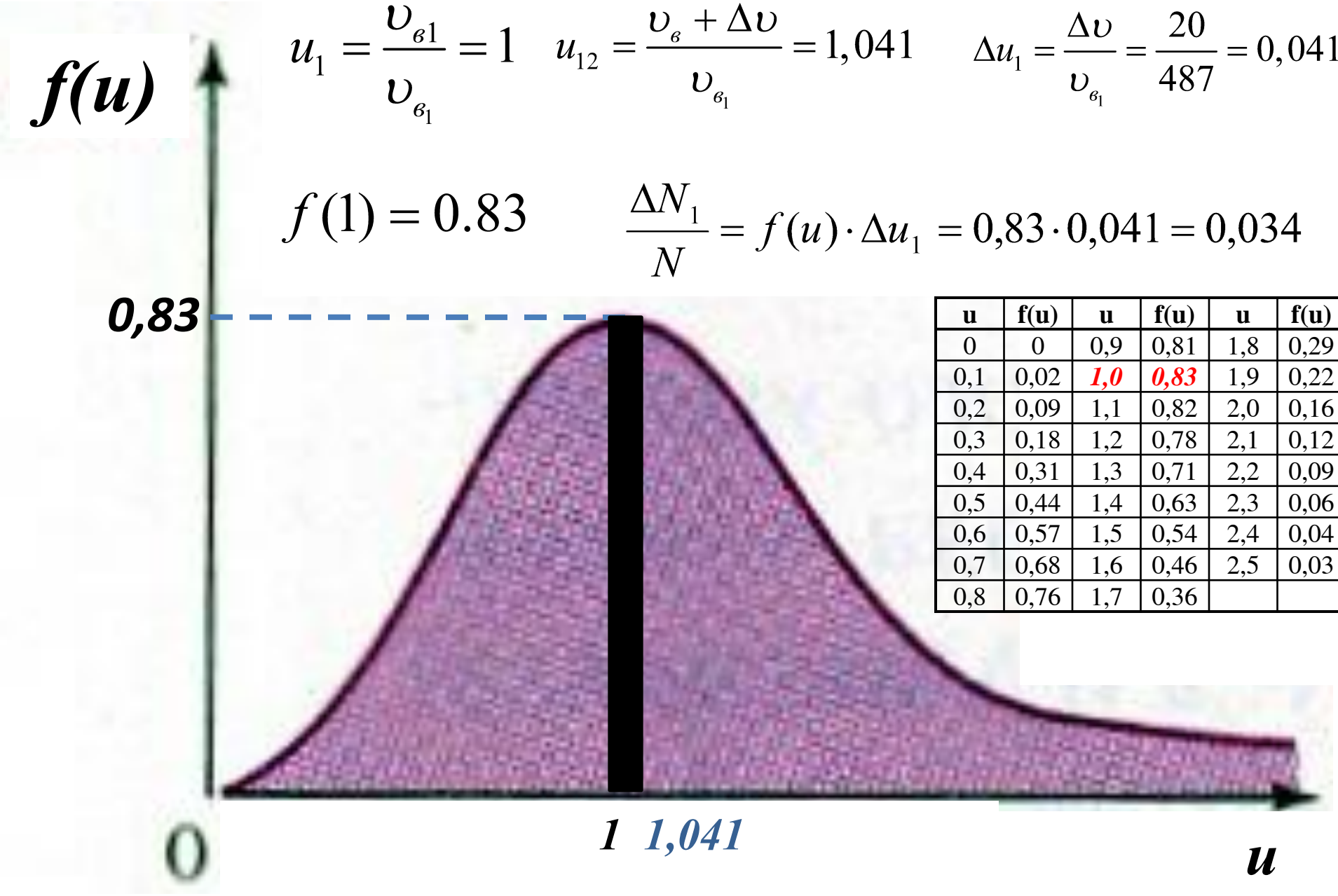
$$\upsilon_{в_1} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

$$\upsilon_{в_1} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2\cdot 8{,}31\cdot 400}{28\cdot 10^{-3}}} = 487(м/с)$$

$$\upsilon_{в_2} = \sqrt{\frac{2\cdot 8{,}31\cdot 900}{28\cdot 10^{-3}}} = 731(м/с)$$

$$u_1 = \frac{\upsilon_{в1}}{\upsilon_{в_1}} = 1 \quad u_{12} = \frac{\upsilon_в + \Delta\upsilon}{\upsilon_{в_1}} = 1{,}041 \qquad \Delta u_1 = \frac{\Delta\upsilon}{\upsilon_{в_1}} = \frac{20}{487} = 0{,}041$$

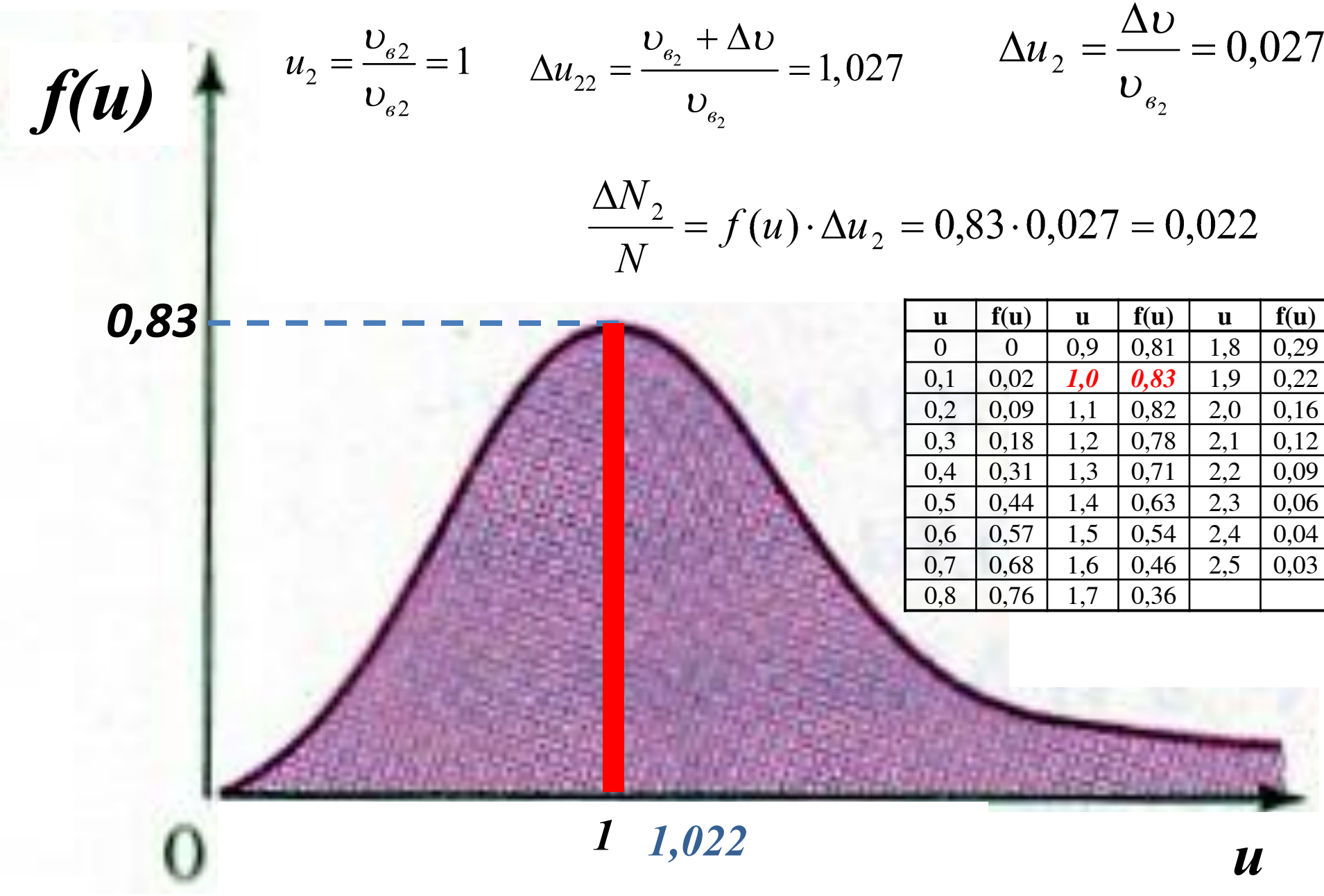
$$f(1) = 0.83 \qquad \frac{\Delta N_1}{N} = f(u)\cdot\Delta u_1 = 0{,}83\cdot 0{,}041 = 0{,}034$$



u	f(u)	u	f(u)	u	f(u)
0	0	0,9	0,81	1,8	0,29
0,1	0,02	***1,0***	***0,83***	1,9	0,22
0,2	0,09	1,1	0,82	2,0	0,16
0,3	0,18	1,2	0,78	2,1	0,12
0,4	0,31	1,3	0,71	2,2	0,09
0,5	0,44	1,4	0,63	2,3	0,06
0,6	0,57	1,5	0,54	2,4	0,04
0,7	0,68	1,6	0,46	2,5	0,03
0,8	0,76	1,7	0,36		

$$u_2 = \frac{\upsilon_{в2}}{\upsilon_{в2}} = 1 \qquad \Delta u_{22} = \frac{\upsilon_{в_2} + \Delta\upsilon}{\upsilon_{в_2}} = 1{,}027 \qquad \Delta u_2 = \frac{\Delta\upsilon}{\upsilon_{в_2}} = 0{,}027$$

$$\frac{\Delta N_2}{N} = f(u)\cdot\Delta u_2 = 0{,}83\cdot 0{,}027 = 0{,}022$$



u	f(u)	u	f(u)	u	f(u)
0	0	0,9	0,81	1,8	0,29
0,1	0,02	***1,0***	***0,83***	1,9	0,22
0,2	0,09	1,1	0,82	2,0	0,16
0,3	0,18	1,2	0,78	2,1	0,12
0,4	0,31	1,3	0,71	2,2	0,09
0,5	0,44	1,4	0,63	2,3	0,06
0,6	0,57	1,5	0,54	2,4	0,04
0,7	0,68	1,6	0,46	2,5	0,03
0,8	0,76	1,7	0,36		

Ответ: 1) ΔN/N=3,4 %; 2) ΔN/N=2,2 %

7.(5.100) Какая часть молекул азота N_x/N при температуре $t=150^0C$ обладает скоростями, лежащими в интервале от $\upsilon_1=300$ м/с до $\upsilon_2=800$ м/с?
Ответ: $N_1/N=87$ %; $N_2/N=17$ %; $N_x/N=70$ %.

Дано

$t=150^0C$
$\upsilon_1=300$ м/с
$\upsilon_2=800$ м/с?

$N_x/N=?$

$$\Delta\upsilon=\upsilon_2-\upsilon_1=500\ м/с$$

$$\upsilon_в=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}=\sqrt{\frac{2\cdot 8{,}31\cdot 423}{28\cdot 10^{-3}}}=498{,}7\approx 499(м/с)$$

$$u_1=\frac{\upsilon_1}{\upsilon_в}=\frac{300}{499}=0{,}60$$

$$u_2=\frac{\upsilon_2}{\upsilon_в}=\frac{800}{499}=1{,}60$$

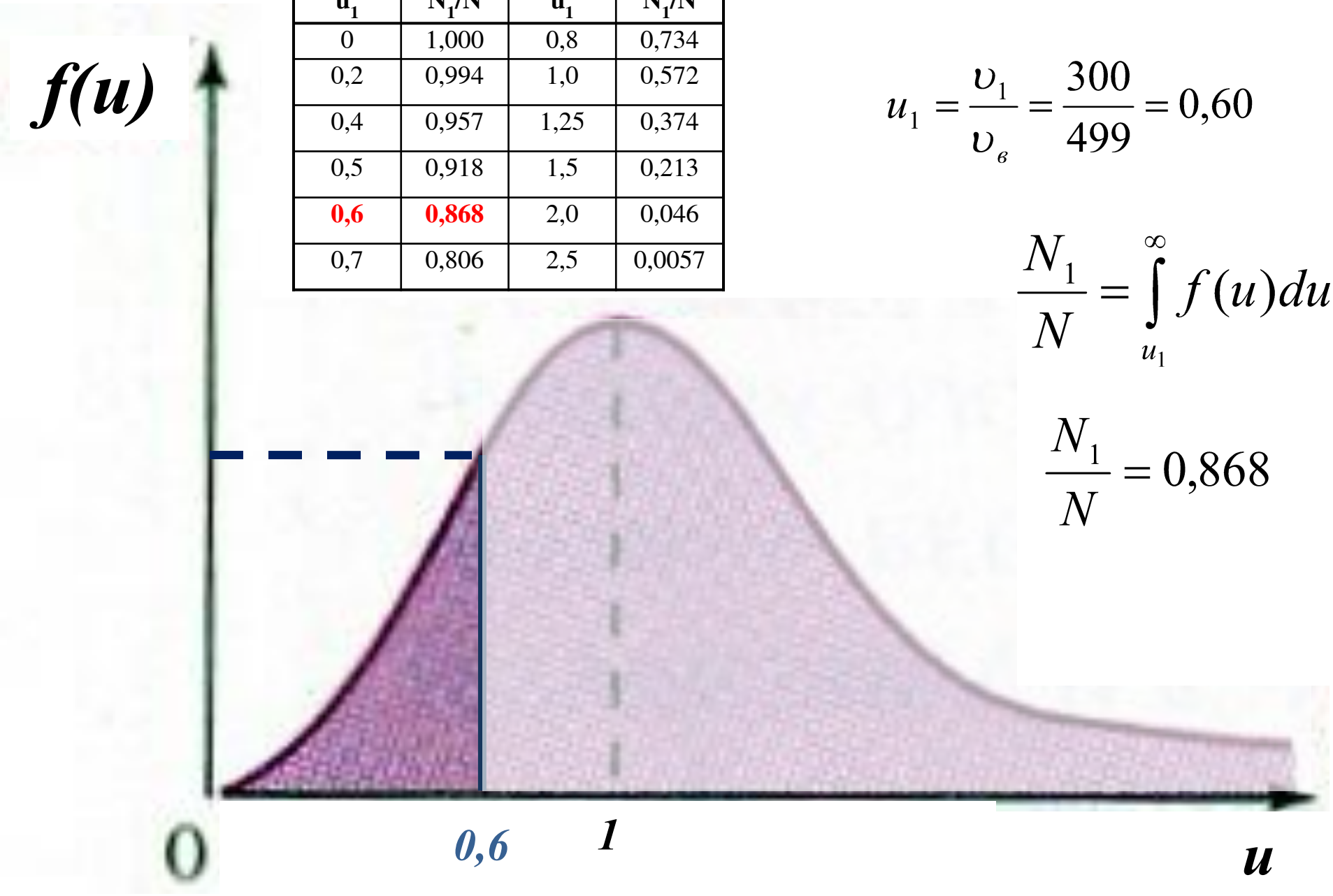
u_1	N_1/N	u_1	N_1/N
0	1,000	0,8	0,734
0,2	0,994	1,0	0,572
0,4	0,957	1,25	0,374
0,5	0,918	1,5	0,213
0,6	0,868	2,0	0,046
0,7	0,806	2,5	0,0057

u_1	N_1/N	u_1	N_1/N
0	1,000	0,8	0,734
0,2	0,994	1,0	0,572
0,4	0,957	1,25	0,374
0,5	0,918	1,5	0,213
0,6	**0,868**	2,0	0,046
0,7	0,806	2,5	0,0057

$$u_1 = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_в} = \frac{300}{499} = 0{,}60$$

$$\frac{N_1}{N} = \int_{u_1}^{\infty} f(u)du$$

$$\frac{N_1}{N} = 0{,}868$$

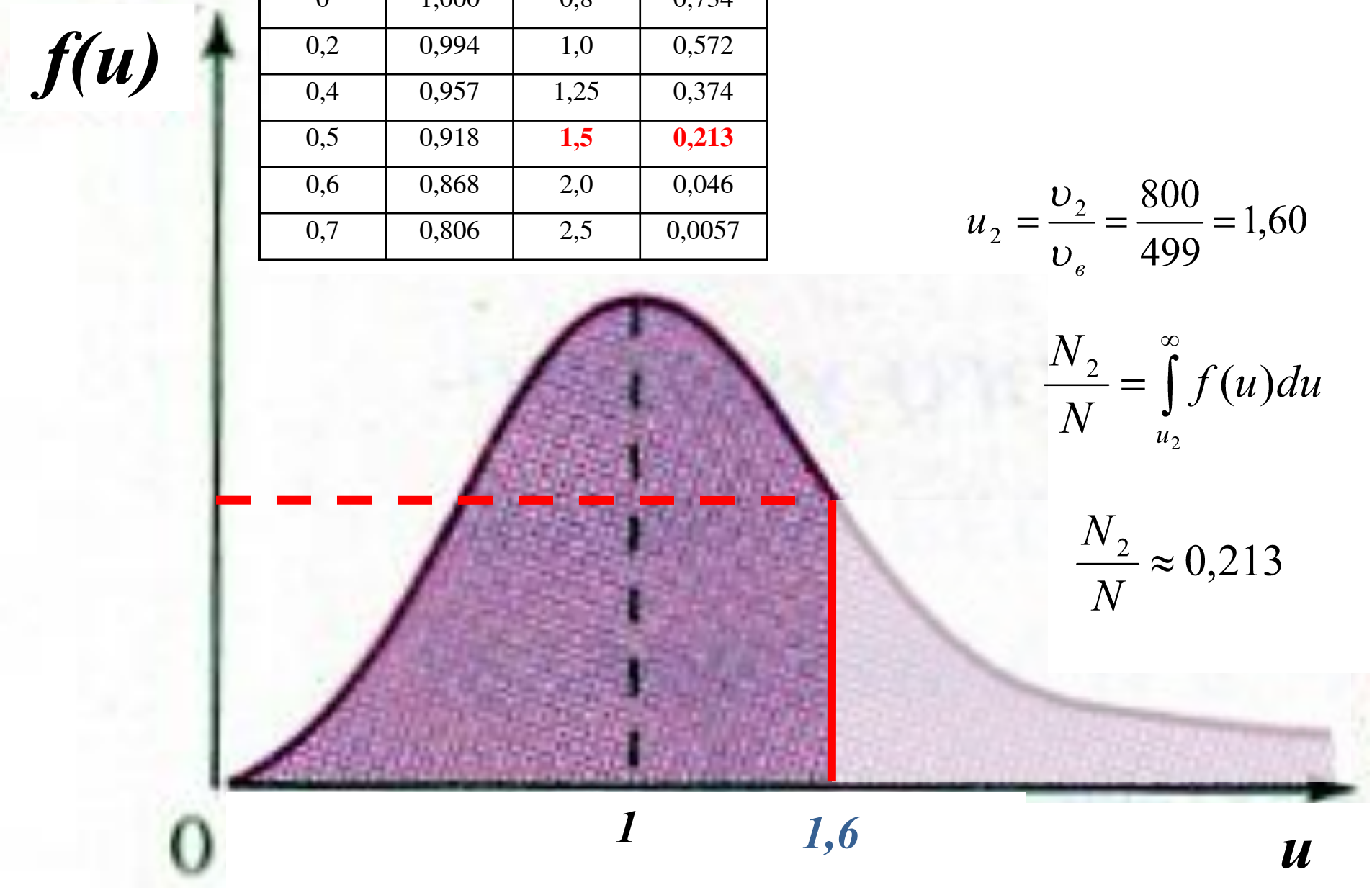


u_1	N_1/N	u_1	N_1/N
0	1,000	0,8	0,734
0,2	0,994	1,0	0,572
0,4	0,957	1,25	0,374
0,5	0,918	**1,5**	**0,213**
0,6	0,868	2,0	0,046
0,7	0,806	2,5	0,0057

$$u_2 = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_в} = \frac{800}{499} = 1{,}60$$

$$\frac{N_2}{N} = \int_{u_2}^{\infty} f(u)du$$

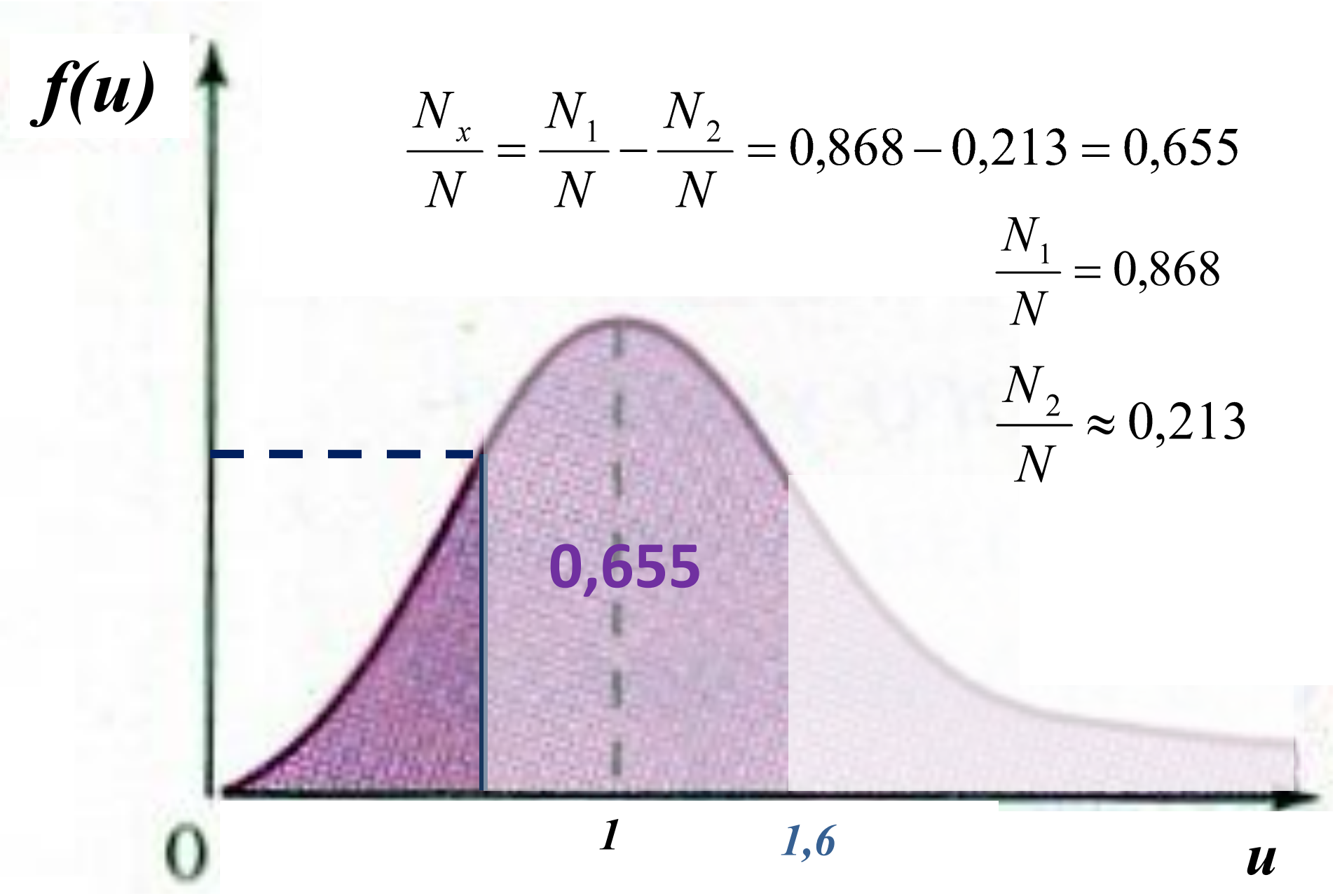
$$\frac{N_2}{N} \approx 0{,}213$$



$$\frac{N_x}{N} = \frac{N_1}{N} - \frac{N_2}{N} = 0{,}868 - 0{,}213 = 0{,}655$$

$$\frac{N_1}{N} = 0{,}868$$

$$\frac{N_2}{N} \approx 0{,}213$$



Ответ: N_1/N=87 %; N_2/N=21 %; N_x/N=66 %

8.(5.101) Какая часть общего числа N молекул имеет скорости:
1) больше наиболее вероятной скорости, 2) меньше наиболее вероятной скорости?

Ответ: 1) N_1/N=57 %; 2) N_2/N=43 %.

Решение.

Дано

$\upsilon > \upsilon_в$

$\upsilon < \upsilon_в$

$\frac{N_1}{N} = ?$

$\frac{N_2}{N} = ?$

Пусть $\frac{N_1}{N}$ - часть молекул, скорости которых больше наиболее вероятной скорости

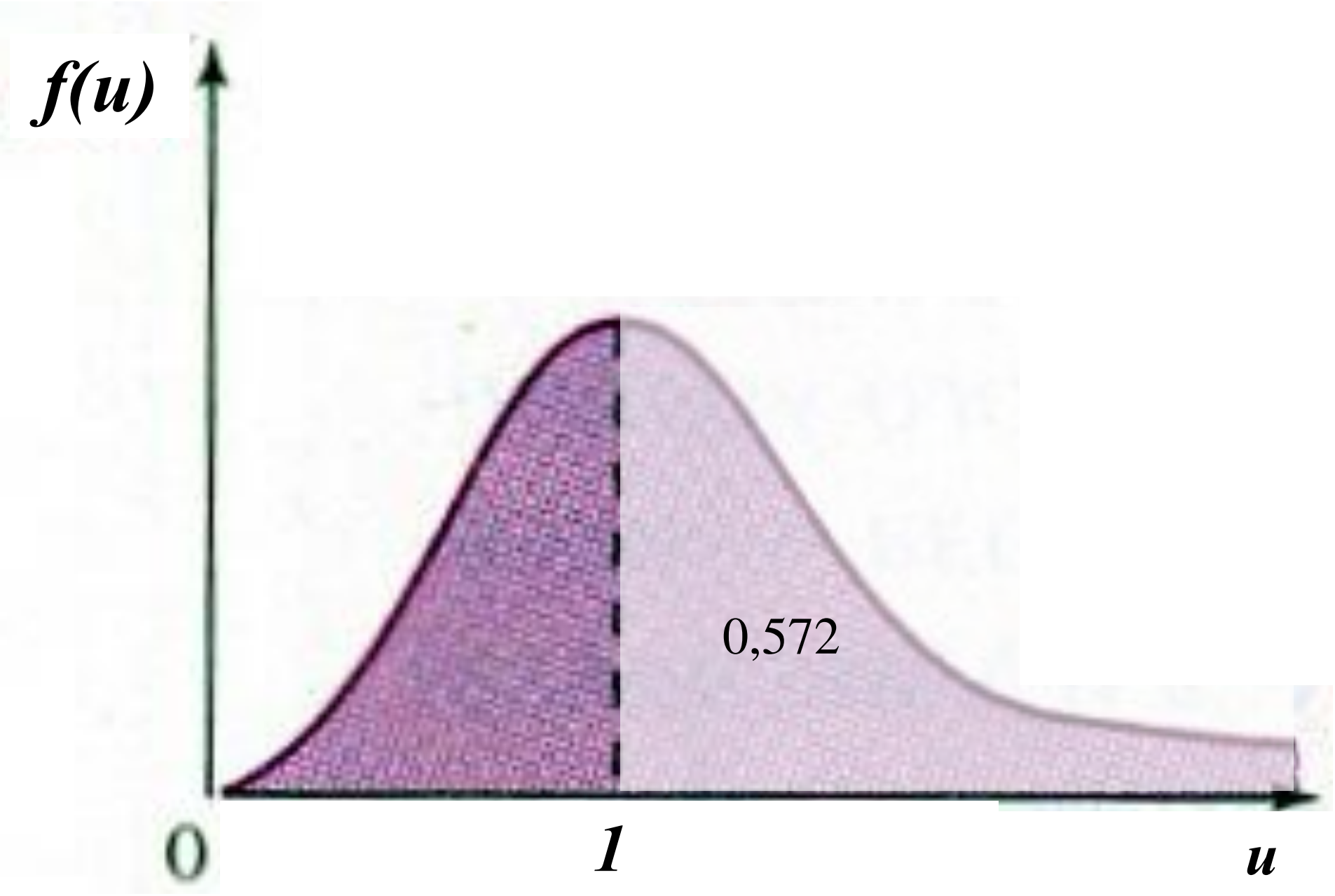
Относительная скорость в этом случае $u = \frac{\upsilon}{\upsilon_в} = 1$

По таблице определяем для *u=1* $\frac{N_1}{N} = 0{,}572$

u_1	N_1/N	u_1	N_1/N
0	1,000	0,8	0,734
0,2	0,994	1,0	0,572
0,4	0,957	1,25	0,374
0,5	0,918	1,5	0,213
0,6	0,868	2,0	0,046
0,7	0,806	2,5	0,0057

$$\frac{N_1}{N} + \frac{N_2}{N} = 1$$

Тогда часть молекул, скорости которых меньше наиболее вероятной скорости $\frac{N_2}{N} = 1 - \frac{N_1}{N} = 0{,}428$


f(u)
0,572
0
1
u

9.(5.106) Высотная обсерватория расположена на высоте h=3250 м над уровнем моря. Найти давление воздуха на этой высоте. Температура воздуха постоянна и равна 5^0С. Молярная масса воздуха
$\mu=29\cdot10^{-3}$ кг/моль. Давление воздуха на уровне моря p=760 мм рт. ст.
Ответ: P=67,8 кПа.

Дано

h=3250 м

T=5+273=278(K)).

p_0=760 мм рт. ст.

1мм рт. ст.=133Па

$\mu=29\cdot10^{-3}$ кг/моль

$R = 8{,}31\ Дж/моль\cdot К$

$g = 9.8\ м/с^2$

P=
?

Решение.

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}$$

P – атмосферное давление на высоте *h*;

$$P = 760\cdot133\cdot e^{-\frac{29\cdot10^{-3}\cdot9{,}8\cdot3250}{8{,}31\cdot278}} = 67{,}8\cdot10^3\,(Па)$$

Ответ: P=67,8 кПа

10.(5.111) На какой высоте плотность газа составляет 50 % от его плотности на уровне моря? Температура постоянна и равна 0^0С. Задачу решить для: 1) воздуха, 2) водорода.

Ответ: 1) h=5,5 км; 2) h=80 км.

Дано

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}$$

$$R = 8{,}31 \, Дж/моль \cdot К$$

$$g = 9{,}8 \, м/с^2$$

T=273 К

$$\mu_1 = 29 \cdot 10^{-3} \, кг/моль$$

$$\mu_2 = 2 \cdot 10^{-3} \, кг/моль$$

Решение.

$$PV = \frac{m}{\mu} RT \qquad P = \frac{m}{V\mu} RT = \frac{\rho}{\mu} RT$$

$$P = P_0 \cdot e^{-\frac{\mu g h}{RT}} \qquad \rho = \rho_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}$$

$$h = \frac{RT \ln \rho/\rho_0}{\mu g}$$

$$h_1 = \frac{8{,}31 \cdot 273 \cdot \ln 2}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8} = 5{,}5 \cdot 10^3 \, (м)$$

$$h_2 = \frac{8{,}31 \cdot 273 \cdot \ln 2}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8} = 8{,}0 \cdot 10^3 (\quad)$$