

# Кинематика материальной ТОЧКИ

Слова механика, физика, кинематика появились в древней Греции в 7-6 вв. до н.э. Еще в древней Греции говорилось о первичности и о материальности окружающего нас мира.

Задача физиков не только объяснить те или иные явления, но и создать целостное представление о мире. Эйнштейн писал: *«Высшим долгом физиков является поиск тех общих элементарных законов из которых возможно получить картину мира».*

**Физика** – это наука, изучающая наиболее общие законы, которым подчиняется окружающий нас внешний мир.

Роль физики в естествознании очень велика. Например: закон сохранения и изменения энергии, законы термодинамики и др. справедливы и для живой природы.

Вследствие всеобщности физических законов возникло много смежных с физикой дисциплин: биофизика, физическая химия, астрофизика и т. д.

**Физика** рассматривает следующие формы движения материи:

- Электромагнитная
- Тепловая
- Механическая
- Внутриатомная
- Гравитационная



## Существует два вида измерений:

1. Прямое – результат получается из опытных данных сравнения измеряемой величины с эталоном (измерение длины – линейкой, штангенциркулем, микрометром; времени – часами, секундомером).
2. Косвенное – результат получается на основании опытных данных прямых измерений нескольких величин, связанных между собой функциональной зависимостью. Например:  $V = S / t$ .

Совокупность основных единиц и выраженных через них производных, называется системой единиц СИ, принятой Международной конвенцией.

**Основные единицы:** *длина* – метр (м), *масса* – килограмм (кг), *время* – секунда (с), *сила тока* – Ампер (А), *температура* – Кельвин (К), *количество вещества* – моль (масса изотопа  $C^{12}$  0,012 кг), *сила света* – Кандела.

**Дополнительные единицы:** *радиан, стерадиан*  
(плоский и объемный угол).

Широко используются другие системы, например, *физическая СГС*. Название системы складывается из названий основных единиц – сантиметр, грамм, секунда.



Первым известным физиком механиком в истории человечества был Архимед. Который уделял большое внимание созданию различных приборов в том числе и военного оборудования.

**Механика** - «механе» - орудие, приспособление.

**Механика изучает самый простой вид движения перемещение тел в пространстве.**

В механике рассматривается движение тел.

**Кинематика** - *изучает движение тел, но не рассматривает причины, вызывающие это движение.*

**Динамика** - *изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.*

**Статика** - *изучает законы равновесия системы тел. Если известны законы движения тел, то из них можно установить и законы равновесия.*

■ Механическое движение – изменение положения тела или частей тела в пространстве с течением времени.

Существует два вида механического движения:

- *поступательное;*
- *вращательное.*

При поступательном движении все точки тела движутся одинаково, имеют одинаковые скорости и ускорения.

Наиболее простым случаем движения является движение материальной точки.

Материальной точкой называется тело, формой и размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием, на котором оно рассматривается

Выбираем систему отсчета, относительно которой будем рассматривать движение материальной точки. *Например*: прямоугольная система координат XYZ. Положение материальной точки можно задать тремя скалярными уравнениями

$$x = f_1(t);$$

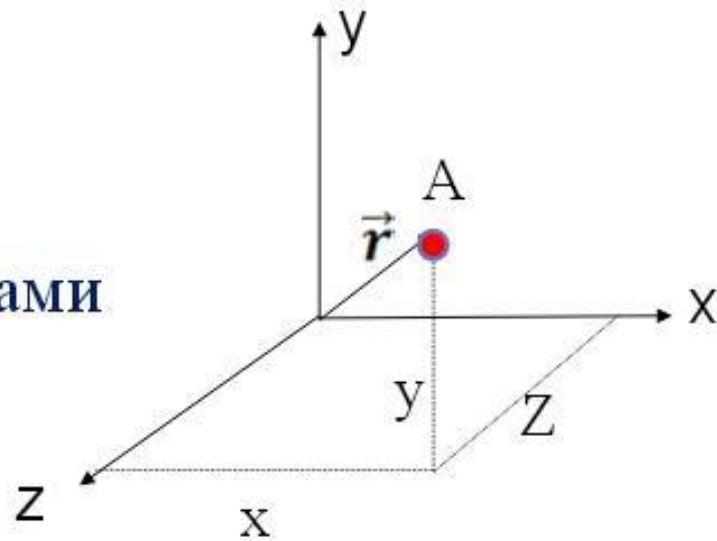
$$y = f_2(t);$$

$$z = f_3(t)$$

одним векторным

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

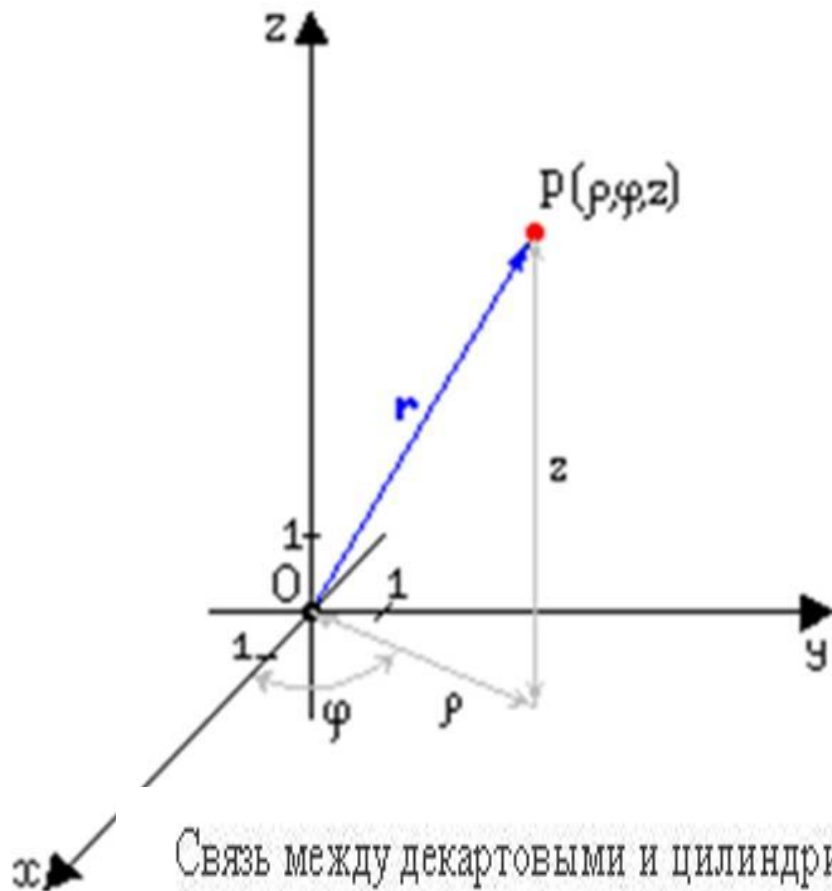
А также тремя координатами  
(X, Y, Z).





## Цилиндрическая система координат

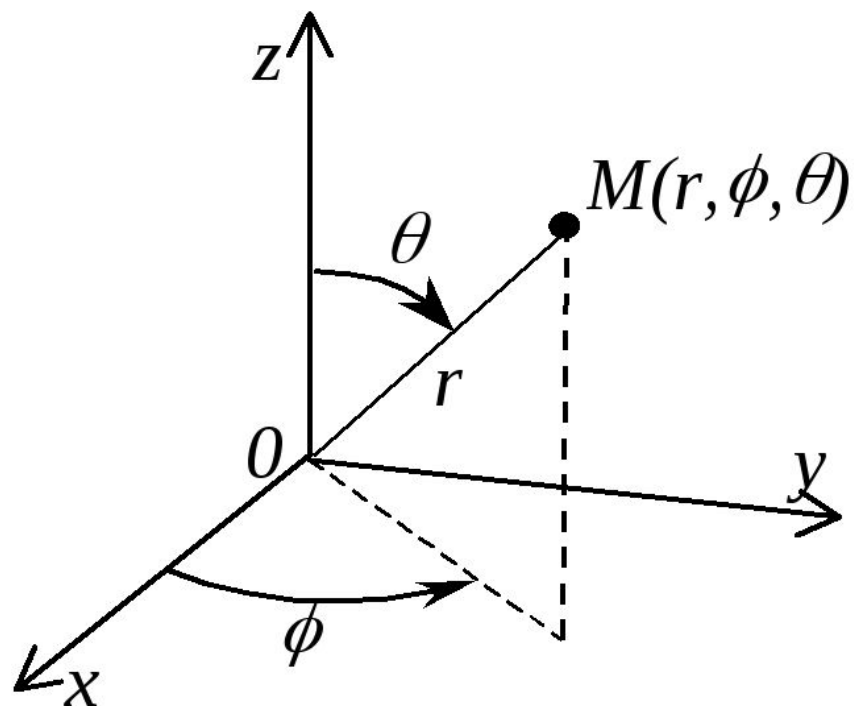
трехмерный аналог полярных, в котором точка  $P$  представляется трехкомпонентным кортежем  $(r, \theta, h)$ .



Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами описывается формулами

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$



Связь между декартовыми и сферическими координатами описывается формулами

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Связь между сферическими и цилиндрическими координатами описывается формулами

$$\rho = r \sin \theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\rho}{z}.$$

**Траектория**- это линия вдоль которой движется тело.

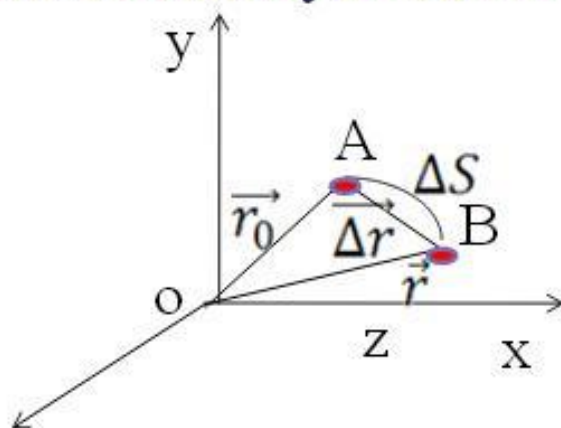
Рассмотрим перемещение точки из положения А в положение В за промежуток времени  $\Delta t$

В зависимости от формы траектории различают:

- Прямолинейное движение (траектория - прямая линия)
- Криволинейное движение (траектория - кривая линия)

**Путь**- расстояние, измеренное вдоль траектории.

$AB = \Delta S$  – путь или длина пути, длина траектории.





$\Delta S$  - скалярная величина (положительная, отрицательная). Измеряется в м.

**Перемещение** - *направленный отрезок, соединяющий начальную точку с конечной. Это векторная величина.*

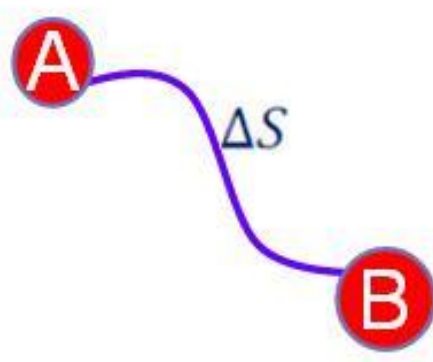
$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r} - \vec{r}_0$  - перемещение,

$\Delta \vec{r}$  - вектор, характеризуется численным значением и направлением

Для характеристики движения вводим понятие скорости.

**Скорость** = это физическая величина, которая определяет как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени.

Пусть материальная точка, двигаясь по криволинейной траектории, прошла за промежуток времени  $\Delta t$  путь  $\Delta S$ .  
Отношение пути, пройденного материальной точкой, к промежутку времени, за который этот путь пройден, называется средней скоростью движения

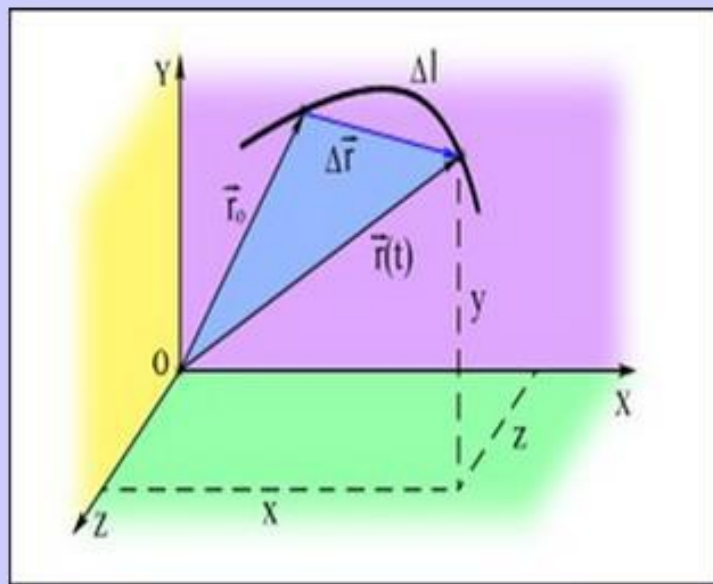


The diagram shows a curved purple line representing a trajectory from point A to point B. The distance between A and B is labeled as  $\Delta S$ .

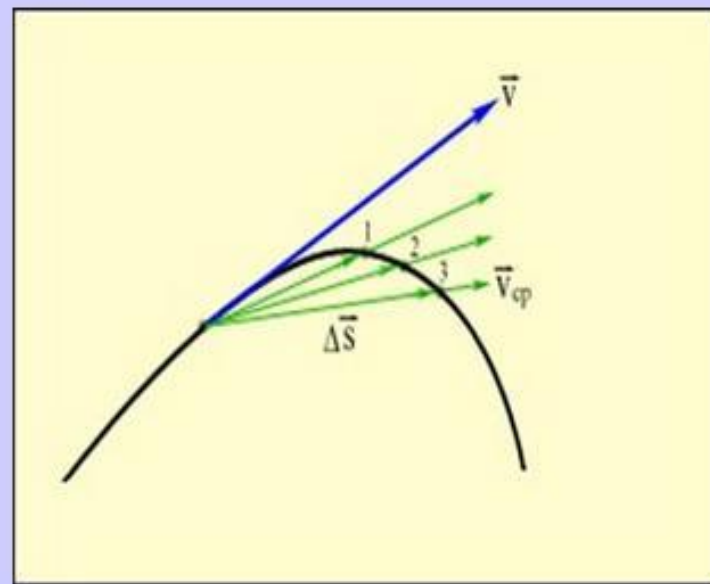
$$\langle \vec{V} \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t} \rightarrow \langle \vec{V} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

**1**

# Скорость точки при криволинейном движении



$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



Предел этого отклонения при  $\Delta t \rightarrow 0$  назовем скоростью в данный момент времени или мгновенной скоростью

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad 2$$

**Мгновенная скорость** движения в любой точке траектории есть вектор, направленный по касательной к траектории, а по модулю равный пределу средней скорости при стремлении промежутка времени к нулю.

Для характеристики движения тела вводятся следующие понятия:

1) **средняя скорость**:  $\vec{V}_{cp} = \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

Вектор  $\vec{V}$  совпадает по направлению с  $\Delta \vec{r}$ .

2) **мгновенная скорость**: скорость в заданный момент времени.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

- это вектор, всегда направленный по касательной к данной точке траектории.

Скорость можно определить как производную радиуса – вектора движущейся

точки по времени:

$$v = \frac{dr}{dt}$$

$$dr = dv \cdot dt$$

Модуль мгновенной скорости определяется равенством:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

где  $V_x, V_y, V_z$  - проекции вектора скорости на координатные оси  $x, y, z$

$$v_x = x'$$

$$v_y = y'$$

$$v_z = z'$$

Направление вектора скорости задается косинусами:

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v} \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v} \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v}$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  - углы между вектором скорости и осями  $x, y, z$  соответственно.

**Скорость** – первая производная пути по времени.

При  $\Delta t \rightarrow 0$  численное значение скорости

$$\bar{V} = \frac{dS}{dt} \quad \text{откуда} \quad dS = \bar{V} dt$$

Проинтегрируем это выражение в интервале от  $t$  до  $t+\Delta t$

$$S = \int_t^{t+\Delta t} V dt \quad 3$$

Если движение равномерное

$$S = V \Delta t \quad 4$$

где  $S=[м]$ ;  $V=[м/с]$ ;  $t=[с]$ .



Равномерным называется движение -с неизменной скоростью.

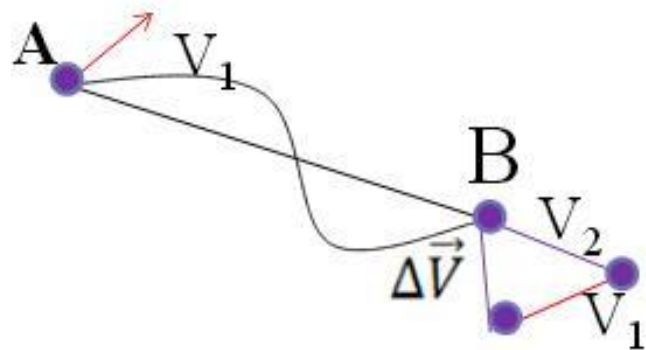
Если движение не равномерное, то вводится понятие ускорения.

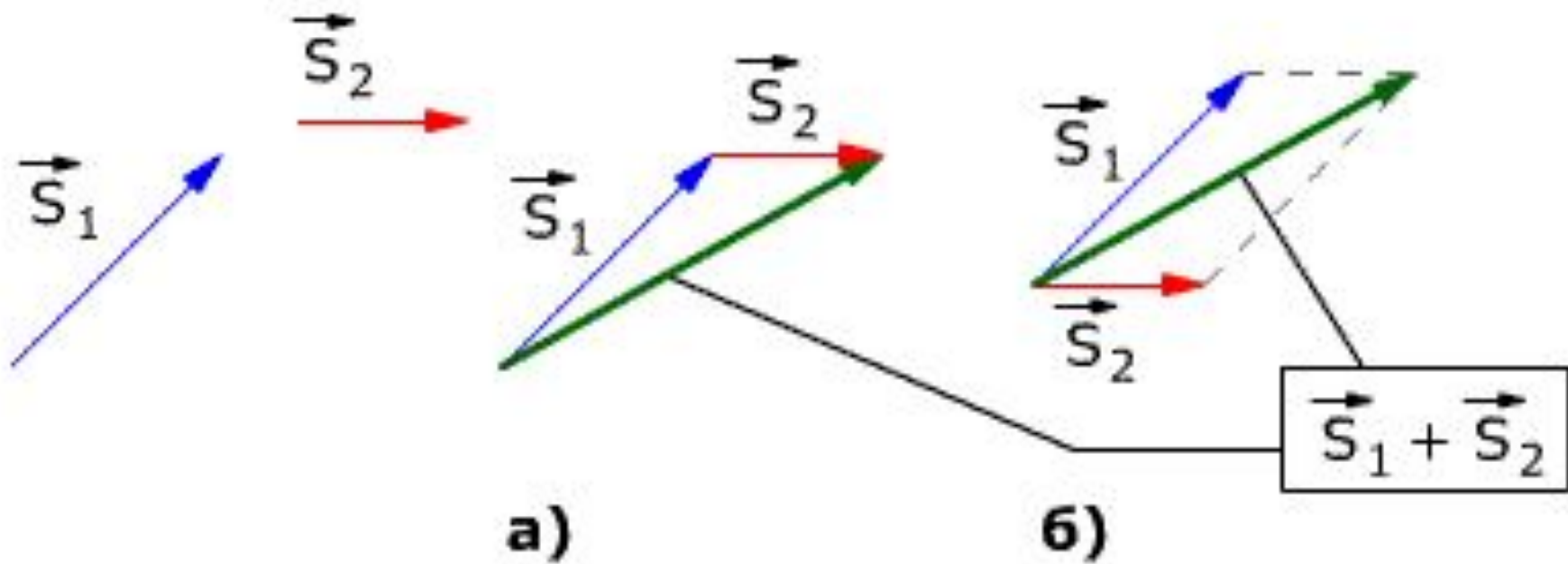
Ускорение – физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости по величине и направлению.

Пусть материальная точка переместилась за малый промежуток времени  $\Delta t$  из точки “А”, где она имела скорость  $V_1$ , в точку “В”, где она имеет скорость  $V_2$ .

Изменение скорости движения точки есть вектор  $\Delta V$ , равный разности векторов конечной и начальной скоростей.

$$\Delta \vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$$





**Среднее ускорение** – это отношение изменения скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло.

$$\langle \bar{a} \rangle = \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} \quad 6$$

Ускорение направлено в ту же сторону, что и вектор изменения скорости  $\Delta \bar{V}$

Предел этого отношения при  $\Delta t \rightarrow 0$  есть **1-я производная скорости по времени** и **называется мгновенным ускорением**

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \frac{d\bar{V}}{dt} \quad 7$$



Так как

$$V = \frac{dS}{dt} \Rightarrow \bar{a} = \frac{d\left(\frac{dS}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2} \quad 8$$

Ускорение - это вторая производная пути по времени.

Измеряется  $a = [м/с^2]$ .

Ускорение, как и скорость, имеет направление.

В общем случае ускорение зависит от времени  
(движение с переменным ускорением).

Если направление ускорения совпадает с направлением скорости – движение равноускоренное.

Если противоположно – равнозамедленное.

# УСКОРЕНИЕ

- характеристика неравномерного движения, показывает на сколько изменилась скорость за 1с.

$$\vec{a} = \frac{\vec{V} - \vec{V}_0}{t}$$

$V$  – конечная скорость

$V_0$  – начальная скорость

$a$  – ускорение (м/с<sup>2</sup>)

$a > 0$  движение равноускоренное,  $v$  увеличивается

$a < 0$  движение равнозамедленное,  $v$  уменьшается

Направление вектора ускорения совпадает с направлением изменения скорости.

Рассмотрим случай, когда пройденный путь определяется выражением.

$$S = A + Bt + Ct^2 \quad 9$$

**Возьмем первую и вторую производные пути по времени**

$$V = \frac{dS}{dt} = B + 2Ct$$

10

$$a = \frac{d^2S}{dt^2} = 2C = \text{const}$$

случай равноускоренное движение



Значит,  $C = \frac{a}{2}$

Введем обозначения:  $A=S_0$ ;  $B=V_0$ ;  $C = \frac{a}{2}$

Получаем формулу пути при равноускоренном движении:

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2} \quad 11$$

а скорость

$$V = V_0 + at \quad 12$$

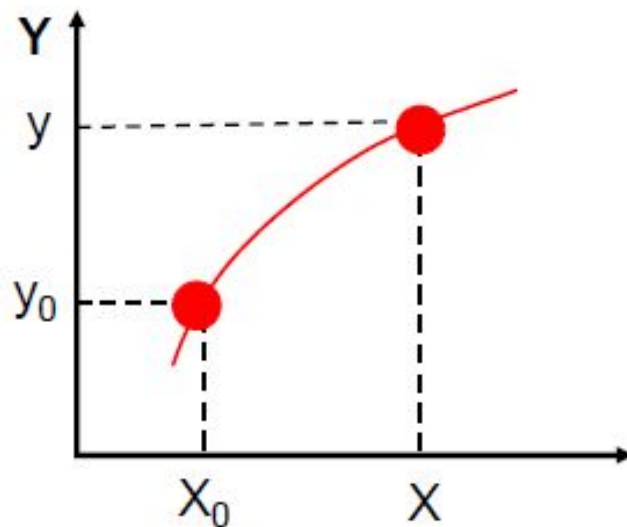
выразим из формулы скорости ускорение

$$a = \frac{V - V_0}{t} \quad 13$$

-ускорение при  
равноускоренном движении

Криволинейное движение - движение, траектория которого представляет собой не прямые, а кривые линии.

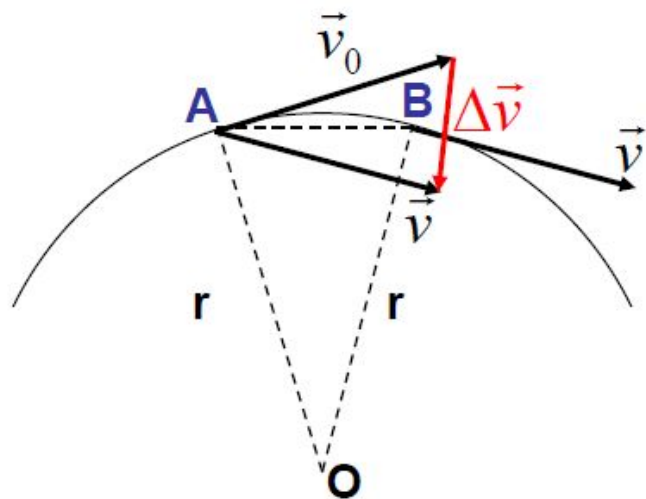
Криволинейное движение сложнее прямолинейного. При таком движении уже нельзя сказать, что изменяется только одна координата. Если движение происходит на плоскости, то изменяются две координаты:  $x$  и  $y$



Непрерывно изменяется направление движения, т.е. направление вектора скорости, а значит и направление вектора ускорения. Могут изменяться и модули скорости и ускорения.

Равномерное движение по окружности – это движение с ускорением, хотя по модулю скорость не меняется.

### Определим направление ускорения тела



Ускорение определяется формулой:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$$

Тело вращается по окружности радиуса  $r$ . Предположим, что тело за малый промежуток времени  $t$  переходит из точки  $A$  в точку  $B$ , расположенную близко к ней (тогда длина окружности  $AB$  совпадает с хордой  $AB$ ). Скорости в точках  $A$  и  $B$  равны  $\vec{v}_0$  и  $\vec{v}$

Перенесем вектор  $\vec{v}$  в точку  $A$ . Соединив концы векторов  $\vec{v}_0$  и  $\vec{v}$  отрезком прямой. Полученный вектор  $\Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$  направлен внутрь окружности. Туда же будет направлен и вектор ускорения  $\vec{a}$ .

При равномерном движении тела по окружности его ускорение во всех точках направлено к центру. Ускорение называется **центростремительное**.



## Чему равен модуль центростремительного ускорения?

Треугольник из векторов  $\vec{v}_0$ ,  $\vec{v}$  и  $\Delta\vec{v}$  равнобедренный, т.к.  $|\vec{v}| = |\vec{v}_0|$

Треугольник OAB тоже равнобедренный (OA и OB радиусы окружности). Треугольники подобны как равнобедренные с равными углами при вершинах. Из подобия треугольников следует пропорциональность сходственных сторон.

модуль изменения скорости

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{AB} = \frac{|\vec{v}|}{r}$$

модуль скорости

Длина дуги (= хорды) AB – путь, пройденный телом со скоростью

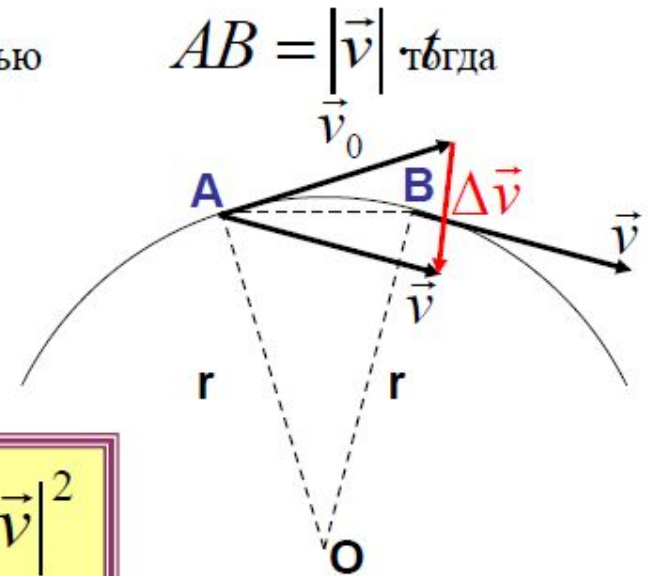
$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{|\vec{v}| \cdot t} = \frac{|\vec{v}|}{r}$$

или

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{t} = \frac{|\vec{v}|^2}{r}$$

Учитывая, что  $|\vec{a}| = \frac{|\vec{v} - \vec{v}_0|}{t}$  получаем

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{v}|^2}{r}$$

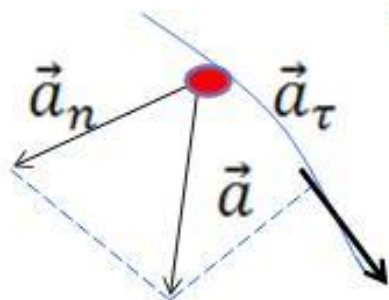


Разложим вектор ускорения на 2 составляющие: *тангенциальную* и *нормальную*. Первая составляющая направлена по касательной к траектории, вторая по нормали.

Численное значение полного ускорения равно:

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}$$

**Тангенциальное ускорение** - характеризует *быстроту изменения скорости.*

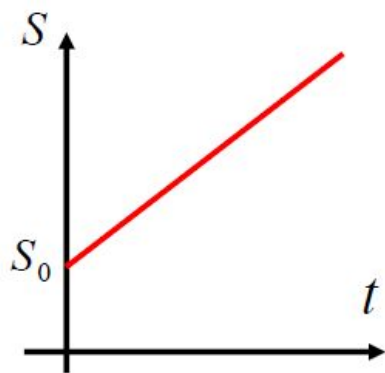


$$a_{\tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} \quad 14$$

**Нормальное ускорение** - характеризует *изменение скорости по направлению.*

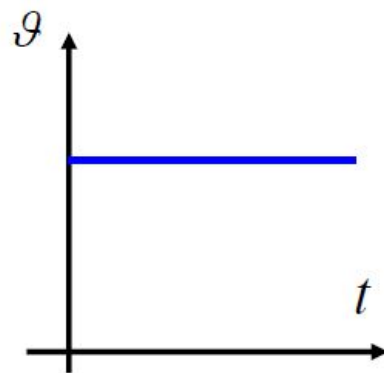
$$a_n = \frac{V^2}{R} \quad 15$$

**Графическое представление  
перемещения, скорости и ускорения  
при равномерном прямолинейном движении**



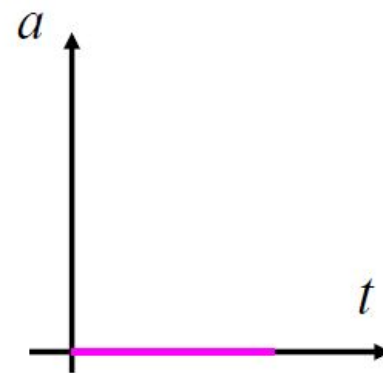
**перемещение**

$$S = S_0 + V_x \cdot t$$



**скорость**

$$V = \text{Const}$$

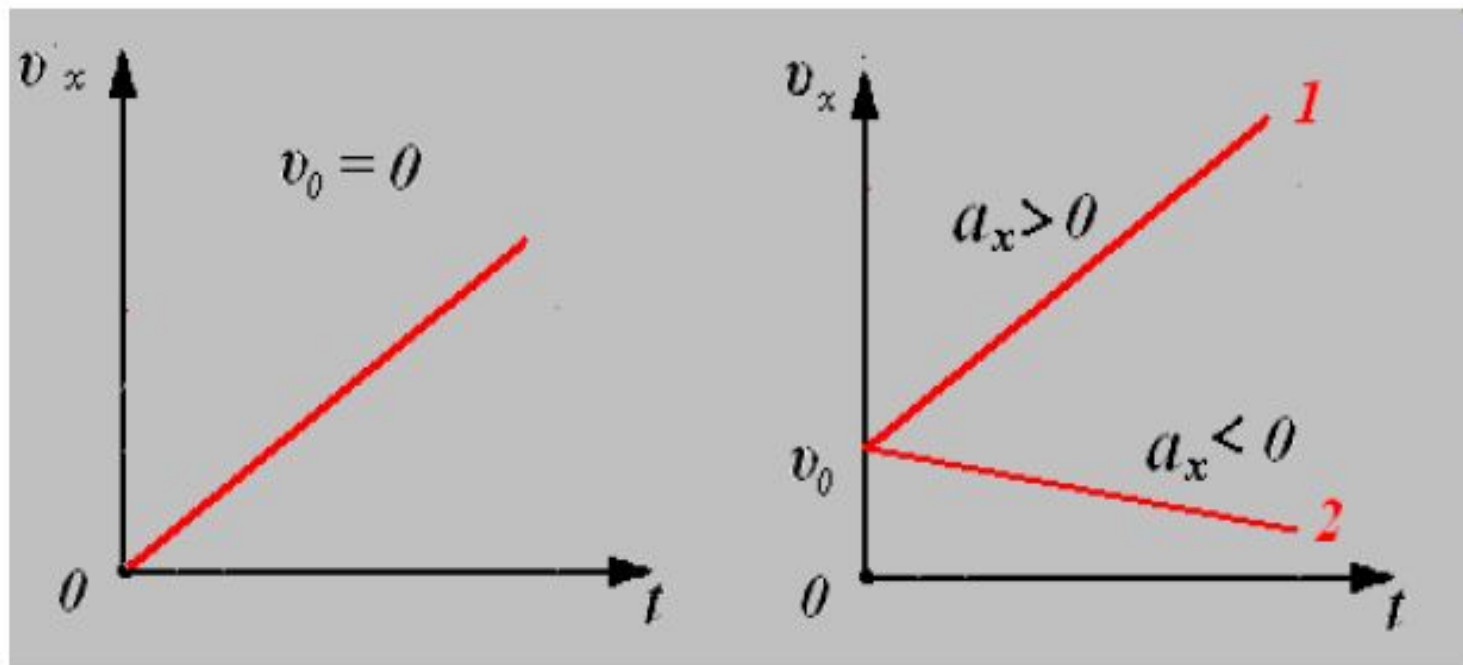


**ускорение**

$$a = 0$$

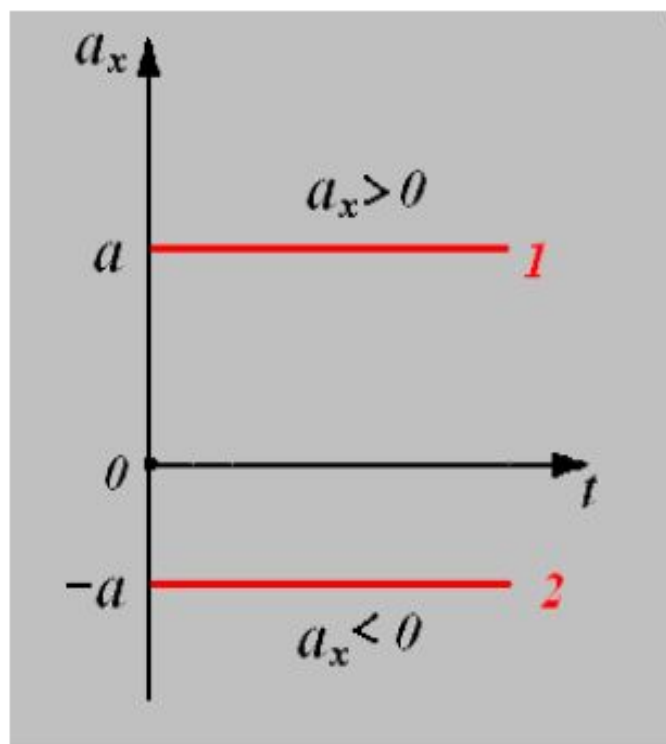


## график зависимости проекции скорости от времени.



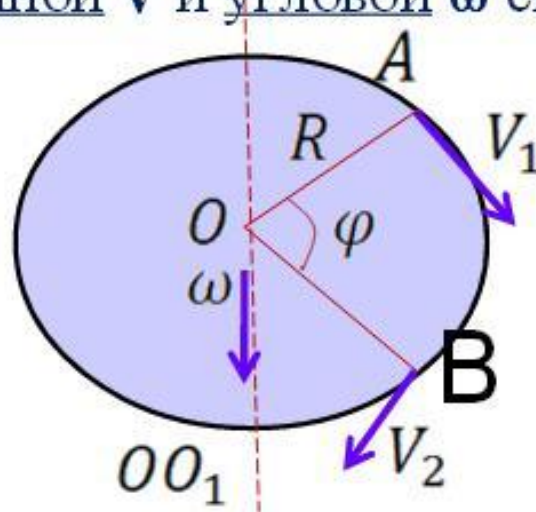
$1 \text{ м/с}^2$  - ускорение прямолинейно и равноускоренно движущейся точки, при котором за  $1\text{с}$  ее скорость изменяется на  $1\text{м/с}$ .

## график зависимости проекции ускорения от времени.



*При вращательном движении - все точки, принадлежащие твердому телу, описывают окружности относительно оси вращения.*

Вращательное движение характеризуется двумя величинами: линейной  $V$  и угловой  $\omega$  скоростями.



Угловой скоростью  $\omega$  - называется отношение угла поворота радиуса  $R$  (угловой путь) к промежутку времени, за который этот поворот произошел.



В случае равномерного движения:

$$\langle \bar{\omega} \rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad 16$$

Где  $\Delta\varphi$  – угол поворота, [рад];  $\langle \bar{\omega} \rangle$  – средняя скорость [рад/с];  
 $\Delta t$  – время, [с].

В случае неравномерного движения мгновенная угловая скорость будет иметь вид:

$$\bar{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad [\text{рад/с}] \quad 17$$

**Угловая скорость** – первая производная угла поворота по времени.

При неравномерном вращательном движении вводим понятие углового ускорения.

**Среднее угловое ускорение** – отношение изменения угловой скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло

$$\langle \bar{\varepsilon} \rangle = \frac{\Delta \bar{\omega}}{\Delta t} \quad 18$$

**Мгновенное ускорение** – предел среднего углового ускорения при  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\bar{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad [\text{рад/с}^2] \quad 19$$

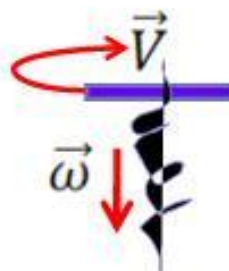
Угловое ускорение – это первая производная скорости по времени и вторая производная углового пути по времени.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\left(d \frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

20

Направление углового ускорения совпадает с вектором угловой скорости при равноускоренном движении и противоположно при равнозамедленном. Направление угловой скорости определяется правилом буравчика.

*Вектор угловой скорости направлен в сторону поступательного движения буравчика, рукоятка которого вращается в направлении линейной скорости.*





Обозначим:  $\Delta\varphi = 2\pi$ ,  $dt = T$  – *период* – время, в течение которого совершается один полный оборот, получим:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad 21$$

где  $\nu = 1/T$  – угловая частота Гц];  $T$  – период, [с].

$$\omega = 2\pi\nu \quad 22$$

*угловая скорость, выраженная через частоту*



*Линейная скорость при вращательном движении*

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad 23$$

Если материальная точка совершает полный оборот, то  $\Delta S = 2\pi R$

$V = 2\pi R \nu \quad 24$	$V = \frac{2\pi R}{T}$
---------------------------	------------------------

*линейная скорость,  
выраженная через  
частоту*

*Линейная скорость,  
выраженная через  
период*

## Линейные

$$S, \bar{S}, \bar{V}, \bar{a}$$

$$V = V_0 + at$$

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{dr}{dt}$$

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}$$

## Угловые

$$\varphi, \bar{\omega}, \bar{\varepsilon}$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$

*При равномерном движении по окружности*

$$AB = S, \Rightarrow S = R \cdot \varphi$$

*Возьмем 1-ю производную по времени*

$$\frac{dS}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}; \quad \frac{dS}{dt} = V; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

$$V = \omega R$$

25

*Связь между линейной и угловой скоростью.*

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{Rd\omega}{dt} = R \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

$$a = \varepsilon \cdot R$$

*связь между ускорением линейным и угловым*