

Кинематика материальной точки

Слова механика, физика, кинематика появилась в древней Греции в 7-6 вв. до н.э. Еще в древней Греции говорилось о первичности и о материальности окружающего нас мира.

Задача физиков не только объяснить те или иные явления, но и создать целостное представление о мире. Эйнштейн писал: «*Высшим долгом физиков является поиск тех общих элементарных законов из которых возможно получить картину мира*».

Физика – это *наука, изучающая наиболее общие законы, которым подчиняется окружающий нас внешний мир.*

Роль физики в естествознании очень велика. Например: закон сохранения и изменения энергии, законы термодинамики и др. справедливы и для живой природы.

Вследствие всеобщности физических законов возникло много смежных с физикой дисциплин: биофизика, физическая химия, астрофизика и т. д.

Физика рассматривает следующие формы движения материи:

- Электромагнитная
- Термовая
- Механическая
- Внутриатомная
- Гравитационная

Существует два вида измерений:

1. **Прямое** – результат получается из **опытных данных сравнения измеряемой величины с эталоном** (измерение длины – линейкой, штангенциркулем, микрометром; времени – часами, секундомером).
2. **Косвенное** – результат получается на основании **опытных данных прямых измерений нескольких величин, связанных между собой функциональной зависимостью.** Например: $V = S/t$.

Совокупность основных единиц и выраженных через них производных, называется системой единиц СИ, принятой Международной конвенцией.

Основные единицы: *длина – метр (м), масса – килограмм (кг), время – секунда (с), сила тока – Ампер (А), температура – Кельвин (К), количество вещества – моль (масса изотопа С12 0,012 кг), сила света – Кандела.*

Дополнительные единицы: *радиан, стерадиан* (плоский и объемный угол).

Широко используются другие системы, например, *физическая СГС*. Название системы складывается из названий основных единиц – сантиметр, грамм, секунда.

Первым известным физиком механиком в истории человечества был Архимед. Который уделял большое внимание созданию различных приборов в том числе и военного оборудования.

Механика- «механе»-орудие, приспособление.

Механика изучает самый простой вид движения перемещение тел в пространстве.

В механике рассматривается движение тел.

Кинематика - изучает движение тел, но не рассматривает причины, вызывающие это движение.

Динамика - изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.

Статика - изучает законы равновесия системы тел. Если известны законы движения тел, то из них можно установить и законы равновесия.

Механическое движение – изменение положения тела или частей тела в пространстве с течением времени.

Существует два вида механического движения:

- поступательное;
- вращательное.

При **поступательном движении** все точки тела движутся одинаково, имеют одинаковые скорости и ускорения.

Наиболее простым случаем движения является движение материальной точки.

Материальной точкой называется тело, формой и размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием, на котором оно рассматривается

Выбираем систему отсчета, относительно которой будем рассматривать движение материальной точки. Например: прямоугольная система координат XYZ. Положение материальной точки можно задать тремя скалярными уравнениями

$$x = f_1(t);$$

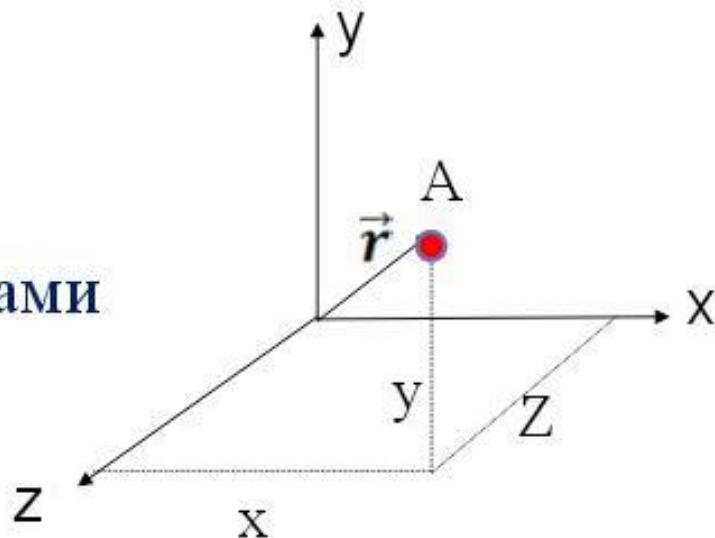
$$y = f_2(t);$$

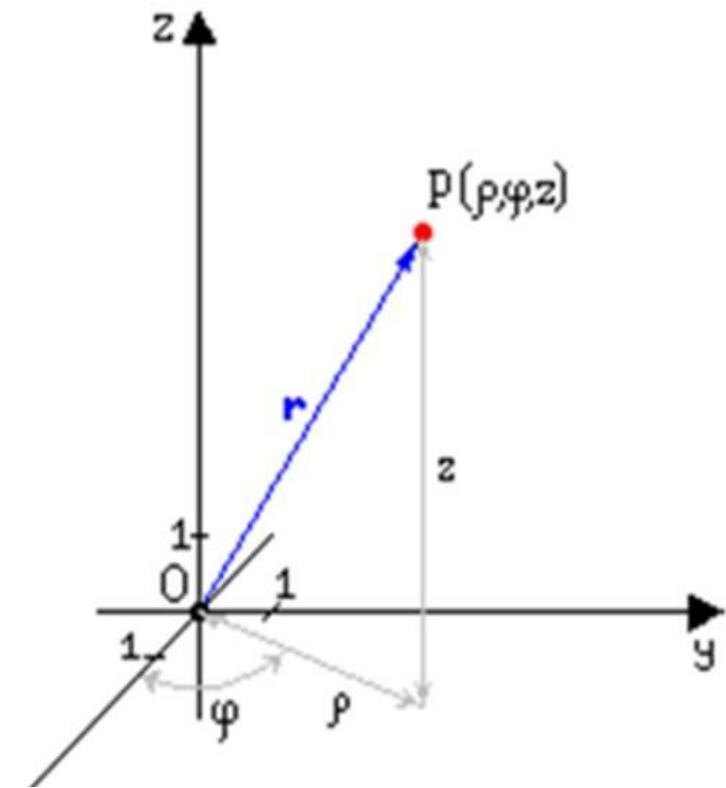
$$z = f_3(t)$$

одним векторным

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

А также тремя координатами
(X, Y, Z).





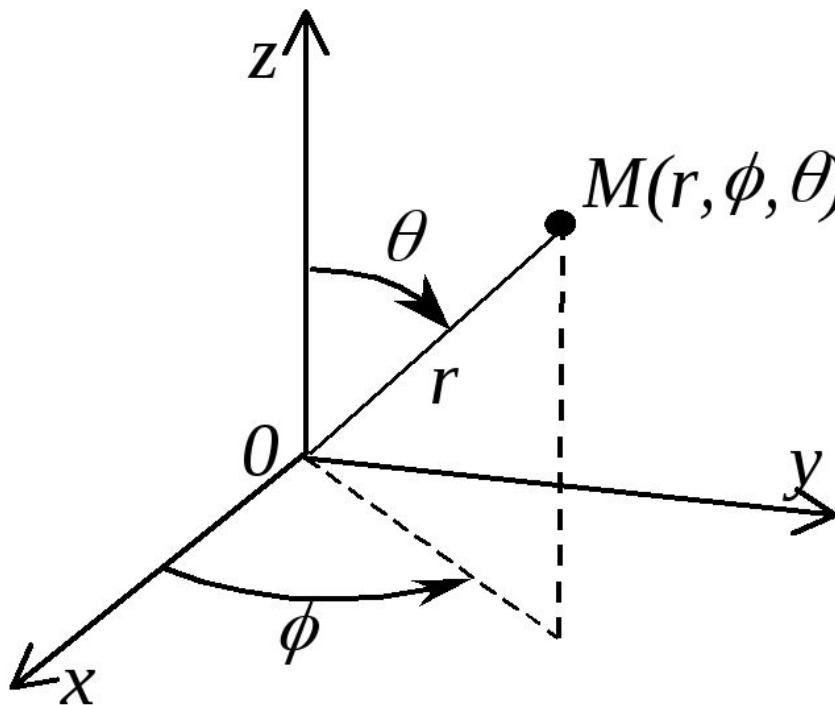
Цилиндрическая система координат

трехмерный аналог полярных,
в котором точка P
представляется
трехкомпонентным
кортежем (r, θ, h) .

Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами описывается формулами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$



Связь между декартовыми и сферическими координатами описывается формулами

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Связь между сферическими и цилиндрическими координатами описывается формулами

$$\rho = r \sin \theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\rho}{z}.$$

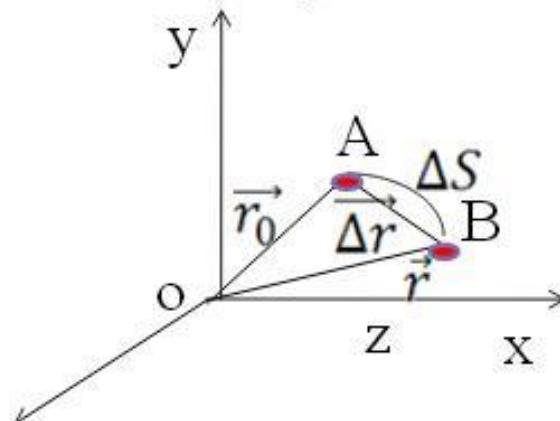
Траектория- это линия вдоль которой движется тело.

Рассмотрим перемещение точки из положения А в положение В за промежуток времени Δt

В зависимости от формы траектории различают:

- Прямолинейное движение (траектория - прямая линия)
 - Криволинейное движение (траектория - кривая линия)
- Путь- расстояние, измеренное вдоль траектории.**

$AB = \Delta S$ –путь или длина пути, длина траектории.



ΔS - скалярная величина (положительная, отрицательная). Измеряется в м.

Перемещение - *направленный отрезок, соединяющий начальную точку с конечной. Это векторная величина.*

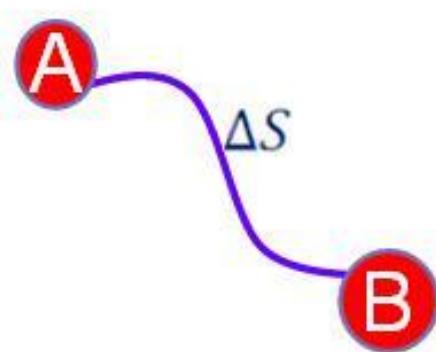
$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r} - \vec{r}_0 \text{ - перемещение,}$$

$\Delta \vec{r}$ - вектор, характеризуется численным значением и направлением

Для характеристики движения вводим понятие скорости.

Скорость - это физическая величина, которая определяет как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени.

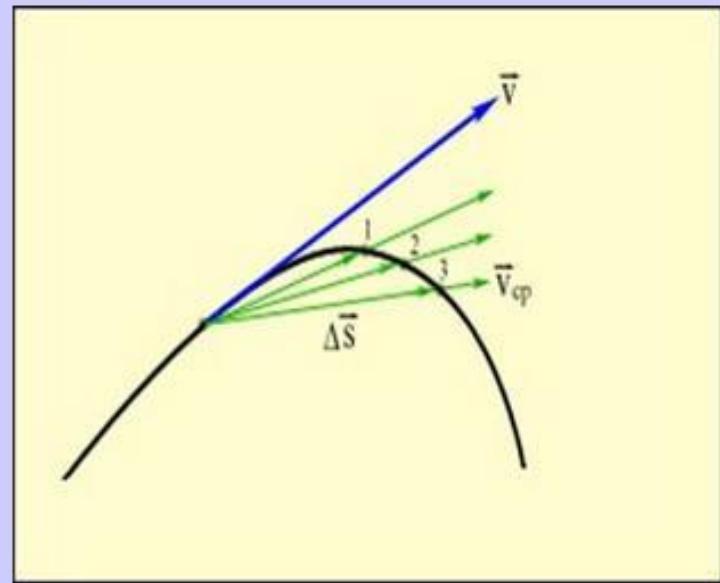
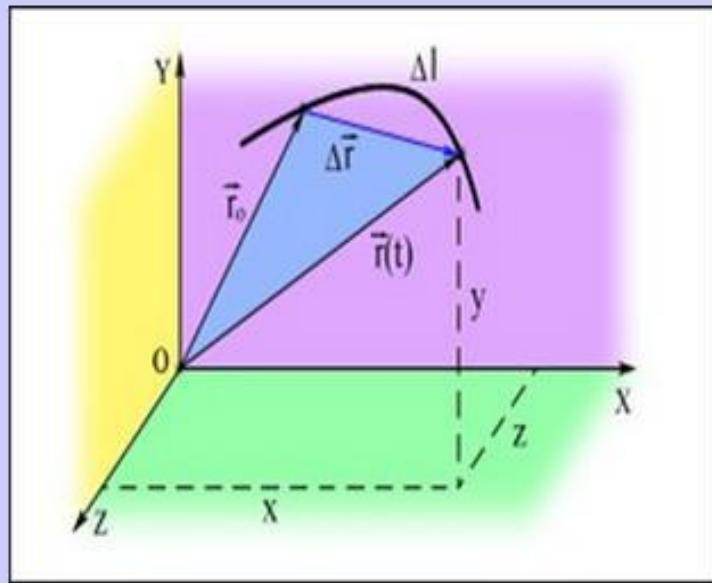
Пусть материальная точка, двигаясь по криволинейной траектории, прошла за промежуток времени Δt путь ΔS . Отношение пути, пройденного материальной точкой, к промежутку времени, за который этот путь пройден, называется средней скоростью движения



$$\langle \vec{V} \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t} \rightarrow \langle \vec{V} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

1

Скорость точки при криволинейном движении



$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d \vec{r}}{dt}$$

Предел этого отклонения при $\Delta t \rightarrow 0$ назовем скоростью в данный момент времени или мгновенной скоростью

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} \quad \rightarrow \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Мгновенная скорость движения в любой точке траектории есть вектор, направленный по касательной к траектории, а по модулю равный пределу средней скорости при стремлении промежутка времени к нулю.

Для характеристики движения тела вводятся следующие понятия:

1) **средняя скорость**: . $\bar{V}_{cp} = \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

Вектор \bar{V} совпадает по направлению с $\Delta \vec{r}$.

2) **мгновенная скорость**: скорость в заданный момент времени.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

- это вектор, всегда направленный по касательной к данной точке траектории. Скорость можно определить как производную радиуса – вектора движущейся точки по времени:

$$v = \frac{dr}{dt}$$

$$dr = dv \cdot dt$$

Модуль мгновенной скорости определяется равенством:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$
 где v_x , v_y , v_z - проекции вектора скорости на координатные оси x, y, z

Направление вектора скорости задается косинусами:

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v} \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v} \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v}$$

$$v_x = x' \\ v_y = y' \\ v_z = z'$$

где α , β , γ - углы между вектором скорости и осями x, y, z соответственно.

Скорость – первая производная пути по времени.

При $\Delta t \rightarrow 0$ численное значение скорости

$$\bar{V} = \frac{\overline{dS}}{dt}$$
 откуда $\overline{dS} = \bar{V} dt$

Проинтегрируем это выражение в интервале от t до $t + \Delta t$

$$S = \int_t^{t+\Delta t} V dt$$
 3

Если движение равномерное

$$S = V \Delta t$$
 4

где $S = [м]$; $V = [м/с]$; $t = [с]$.

Равномерным называется движение - с неизменной скоростью.

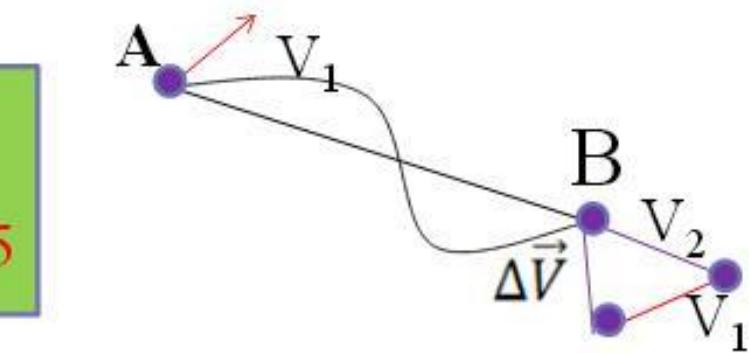
Если движение не равномерное, то вводится понятие ускорения.

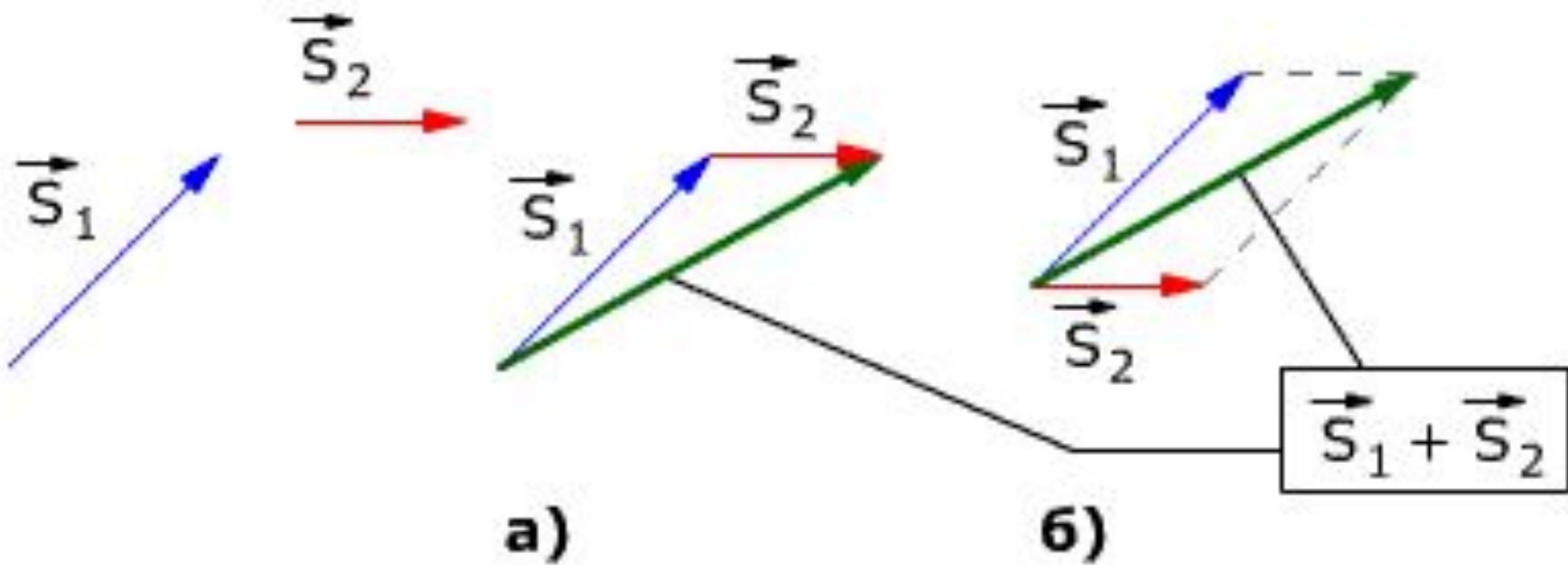
Ускорение – физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости по величине и направлению.

Пусть материальная точка переместилась за малый промежуток времени Δt из точки “A”, где она имела скорость V_1 , в точку “B”, где она имеет скорость V_2 .

Изменение скорости движения точки есть вектор ΔV , равный разности векторов конечной и начальной скоростей.

$$\Delta \bar{V} = \bar{V}_2 - \bar{V}_1$$





Среднее ускорение – это отношение изменения скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло.

$$\bar{a} = \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t}$$
 6

Ускорение направлено в ту же сторону, что и вектор изменения скорости $\Delta \bar{V}$

Предел этого отношения при $\Delta t \rightarrow 0$ есть 1-я производная скорости по времени и называется мгновенным ускорением

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \frac{d \bar{V}}{dt}$$
 7

Так как

$$V = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \bar{a} = \frac{d(\frac{ds}{dt})}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$
 8

Ускорение - это вторая производная пути по времени.
Измеряется $a = [\text{м}/\text{с}^2]$.

Ускорение, как и скорость, имеет направление.

В общем случае ускорение зависит от времени
(движение с переменным ускорением).

Если направление ускорения совпадает с направлением
скорости – движение равноускоренное.

Если противоположно – равнозамедленное.

УСКОРЕНИЕ

- характеристика неравномерного движения, показывает на сколько изменилась скорость за 1с.

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$$

v – конечная скорость

v_0 – начальная скорость

a – ускорение ($\text{м}/\text{с}^2$)

$a > 0$ движение равноускоренное, v увеличивается

$a < 0$ движение равнозамедленное, v уменьшается

Направление вектора ускорения совпадает с направлением изменения скорости.

Рассмотрим случай, когда пройденный путь определяется выражением.

$$S = A + Bt + Ct^2$$

9

Возьмем первую и вторую производные пути по времени

$$V = \frac{dS}{dt} = B + 2Ct$$

10

$$a = \frac{d^2S}{dt^2} = 2C = \text{const}$$

случай равноускоренное движение

Значит, $C = \frac{a}{2}$

Введем обозначения: $A = S_0$; $B = V_0$; $C = \frac{a}{2}$

Получаем формулу пути при равноускоренном движении:

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2} \quad 11$$

а скорость

$$V = V_0 + at \quad 12$$

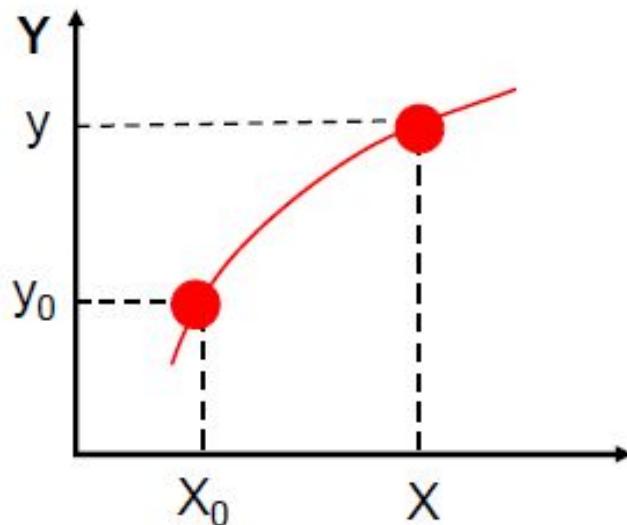
выразим из формулы скорости ускорение

$$a = \frac{V - V_0}{t} \quad 13$$

-ускорение при
равноускоренном движении

Криволинейное движение - движение, траектория которого представляет собой не прямые, а кривые линии.

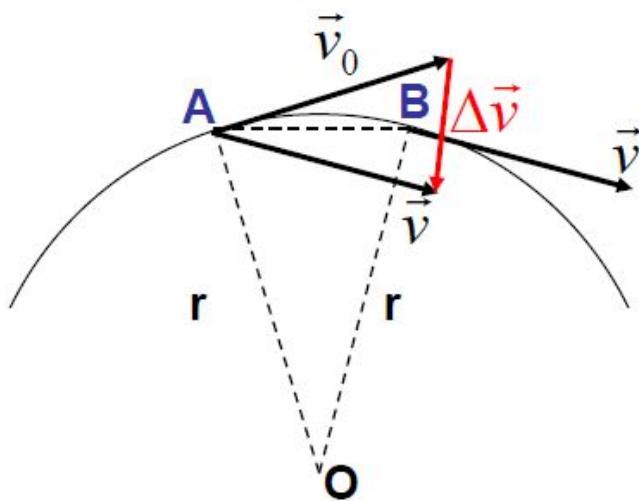
Криволинейное движение сложнее прямолинейного. При таком движении уже нельзя сказать, что изменяется только одна координата. Если движение происходит на плоскости, то изменяются две координаты: x и y



Непрерывно изменяется направление движения, т.е. направление вектора скорости, а значит и направление вектора ускорения. Могут изменяться и модули скорости и ускорения.

Равномерное движение по окружности – это движение с ускорением, хотя по модулю скорость не меняется.

Определим направление ускорения тела



Ускорение определяется формулой:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$$

Тело вращается по окружности радиуса r . Предположим, что тело за малый промежуток времени t переходит из точки А в точку В, расположенную близко к ней (тогда длина окружности АВ совпадает с хордой АВ). Скорости в точках А и В равны \vec{v}_0 и \vec{v} .

Перенесем вектор V в точку А. Соединив концы векторов \vec{v}_0 и \vec{V} отрезком прямой . Полученный вектор $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$ направлен внутрь окружности. Туда же будет направлен и вектор ускорения \vec{a} .

При равномерном движении тела по окружности его ускорение во всех точках направлено к центру. Ускорение называется **центробежительное**.

Чему равен модуль центростремительного ускорения?

Треугольник из векторов \vec{v}_0 , \vec{v} и $\Delta\vec{v}$ равнобедренный, т.к. $\vec{v} = \vec{v}_0$

Треугольник ОАВ тоже равнобедренный (OA и OB радиусы окружности). Треугольники подобны как равнобедренные с равными углами при вершинах. Из подобия треугольников следует пропорциональность сходственных сторон.

модуль изменения
скорости

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{AB} = \frac{|\vec{v}|}{r}$$

модуль скорости

Длина дуги (= хорды) AB – путь, пройденный телом со скоростью

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{|\vec{v}| \cdot t} = \frac{|\vec{v}|}{r}$$

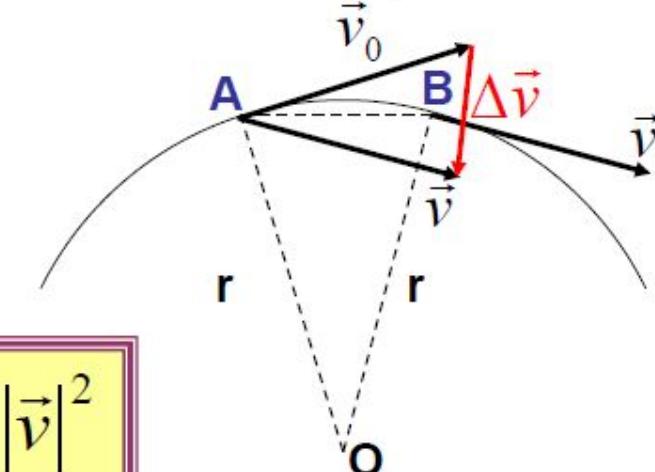
или

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{t} = \frac{|\vec{v}|^2}{r}$$

Учитывая, что $|\vec{a}| = \frac{|\vec{v} - \vec{v}_0|}{t}$ получаем

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{v}|^2}{r}$$

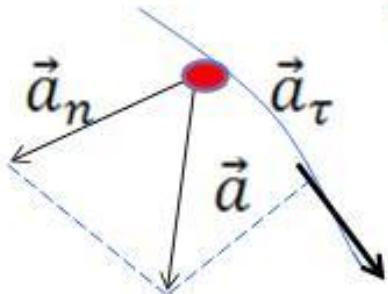
$$AB = |\vec{v}| \cdot t \text{огда}$$



Разложим вектор ускорения на 2 составляющие: *тангенциальную* и *нормальную*. Первая составляющая направлена по касательной к траектории, вторая по нормали.

Численное значение полного ускорения равно:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$



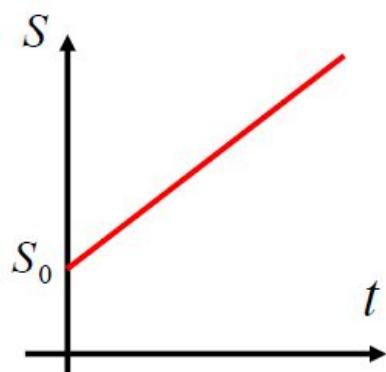
Тангенциальное ускорение - характеризует быструю изменение скорости.

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} \quad 14$$

Нормальное ускорение - характеризует изменение скорости по направлению.

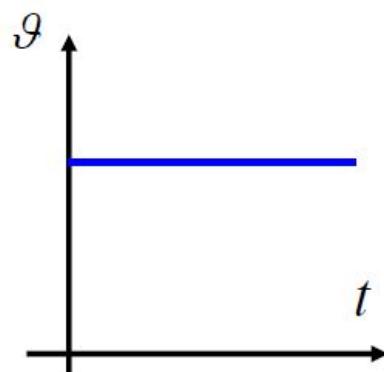
$$a_n = \frac{V^2}{R} \quad 15$$

Графическое представление перемещения, скорости и ускорения при равномерном прямолинейном движении



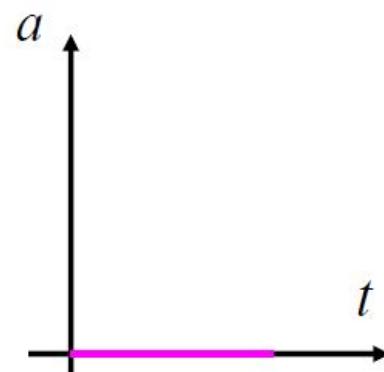
перемещение

$$S = S_0 + V_x \cdot t$$



скорость

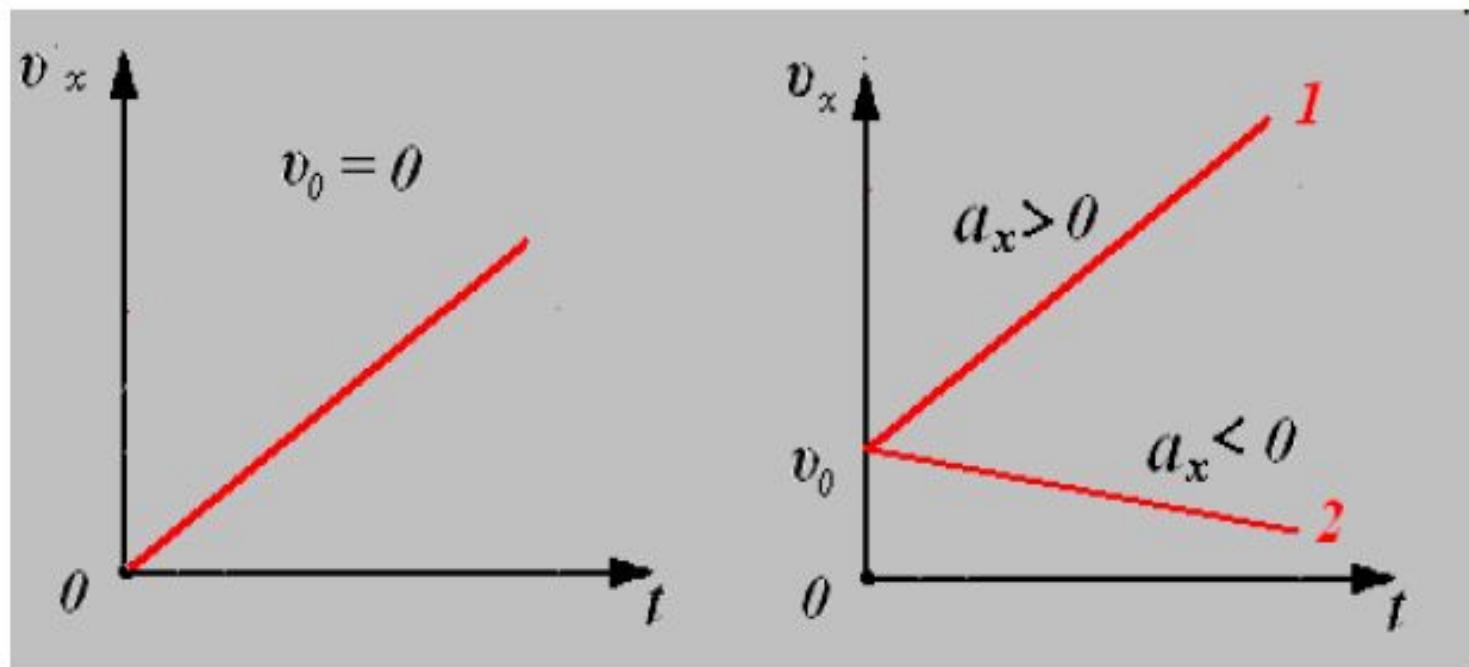
$$V = \text{Const}$$



ускорение

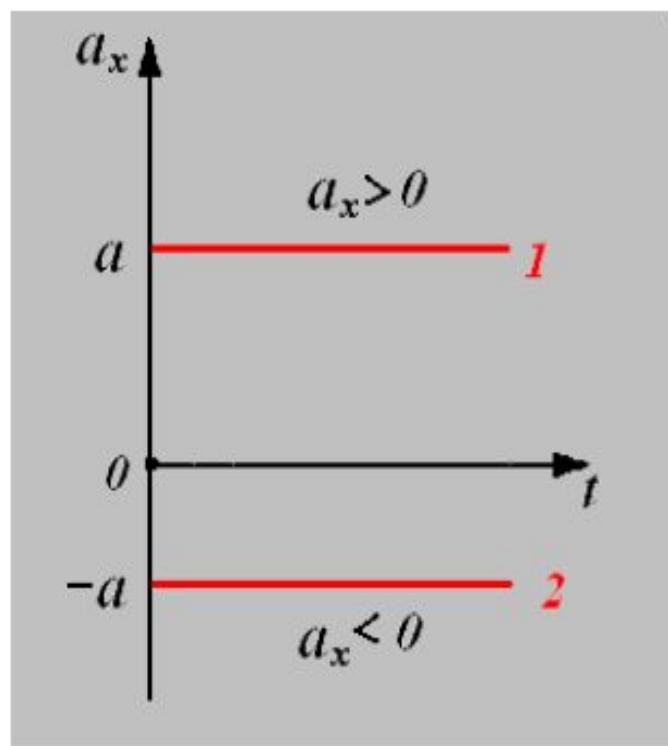
$$a = 0$$

график зависимости проекции скорости от времени.



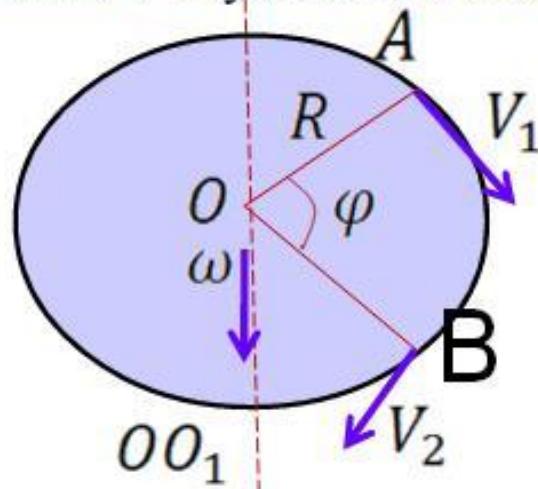
1 м/с² - ускорение прямолинейно и равноускоренно движущейся точки, при котором за 1с ее скорость изменяется на 1м/с.

график зависимости проекции ускорения от времени.



При вращательном движении - все точки, принадлежащие твердому телу, описывают окружности относительно оси вращения.

Вращательное движение характеризуется двумя величинами: линейной V и угловой ω скоростями.



Угловой скоростью ω - называется отношение угла поворота радиуса R (угловой путь) к промежутку времени, за который этот поворот произошел.

В случае равномерного движения:

$$\langle \bar{\omega} \rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$
 16

Где $\Delta\varphi$ – угол поворота, [рад]; $\langle \bar{\omega} \rangle$ – средняя скорость [рад/с];
 Δt – время, [с].

В случае неравномерного движения мгновенная угловая
скорость будет иметь вид:

$$\bar{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad [\text{рад/с}]$$
 17

Угловая скорость – первая производная угла поворота по времени.

При неравномерном вращательном движении вводим понятие углового ускорения.

Среднее угловое ускорение – отношение изменения угловой скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

18

Мгновенное ускорение – предел среднего углового ускорения при $\Delta t \rightarrow 0$

$$\bar{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \text{ [рад/с}^2]$$

19

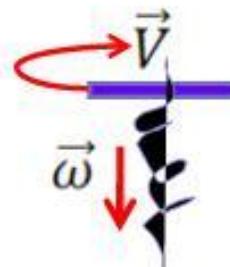
Угловое ускорение – это первая производная скорости по времени и вторая производная углового пути по времени.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\left(d \frac{d\varphi}{dt} \right)}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

20

Направление углового ускорения совпадает с вектором угловой скорости при равноускоренном движении и противоположно при равнозамедленном. Направление угловой скорости определяется правилом буравчика.

Вектор угловой скорости направлен в сторону поступательного движения буравчика, рукоятка которого вращается в направлении линейной скорости.



Обозначим: $\Delta\varphi = 2\pi$, $dt = T$ – период – время, в течение которого совершается один полный оборот, получим:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu_{21}$$

где $\nu = 1/T$ – угловая частота Гц]; T – период, [с].

$$\omega = 2\pi\nu_{22}$$

угловая скорость, выраженная через частоту

Линейная скорость при вращательном движении

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

23

Если материальная точка совершает полный оборот, то $\Delta S = 2\pi R$

$$V = 2\pi R \nu$$

24

$$V = \frac{2\pi R}{T}$$

*линейная скорость,
выраженная через
частоту*

*Линейная скорость,
выраженная через
период*

Линейные

$$S, \bar{S}, \bar{V}, \bar{a}$$

$$V = V_0 + at$$

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{dr}{dt}$$

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$$

Угловые

$$\varphi, \bar{\omega}, \bar{\varepsilon}$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

При равномерном движении по окружности

$$AB = S, \Rightarrow S = R \cdot \varphi$$

Возьмем 1-ю производную по времени

$$\frac{dS}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}; \quad \frac{dS}{dt} = V; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

$$V = \omega R$$

25

Связь между линейной и угловой скоростью.

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{R d\omega}{dt} = R \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

$$a = \varepsilon \cdot R$$

26

связь между ускорением линейным и угловым