Кинематика материальной точки

Слова **механика, физика, кинематика** появилась в древней Греции в 7-6 вв. до н.э. Еще в древней Греции говорилось о первичности и о материальности окружающего нас мира.

Задача физиков не только объяснить те или иные явления, но и создать целостное представление о мире. **Энштейн писал**: *«Высшим долгом физиков является поиск тех общих элементарных законов из которых возможно получить картину мира».*

Физика – это ***наука, изучающая наиболее общие законы, которым подчиняется окружающий нас внешний мир.***

Роль физики в естествознании очень велика. Например: закон сохранения и изменения энергии, законы термодинамики и др. справедливы и для живой природы.

Вседствие всеобщности физических законов возникло много смежных с физикой дисциплин: биофизика, физическая химия, астрофизика и т. д.

Физика **рассматривает следующие формы движения материи**:

- Электромагнитная
- Тепловая
- Механическая
- Внутриатомная
- Гравитационная

Существует два вида измерений:

1. **Прямое** – ***результат получается из опытных данных сравнения измеряемой величины с эталоном*** (измерение длины – линейкой, штангенциркулем, микрометром; времени – часами, секундомером).

2. **Косвенное** – ***результат получается на основании опытных данных прямых измерений нескольких величин, связанных между собой функциональной зависимостью.*** Например: $V = S / t$.

Совокупность основных единиц и выраженных через них производных, называется системой единиц СИ, принятой Международной конвенцией.

<u>Основные единицы</u>: *длина* – метр (м), *масса* – килограмм (кг), *время* – секунда (с), *сила тока* – Ампер (А), *температура* – Кельвин (К), *количество вещества* – моль (масса изотопа С12 0,012 кг), *сила света* – Кандела.

<u>Дополнительные единицы</u>: *радиан, стерадиан* (плоский и объемный угол).

Широко используются другие системы, например, *физическая СГС*. Название системы складывается из названий основных единиц – сантиметр, грамм, секунда.

Первым известным физиком механиком в истории человечества был Архимед. Который уделял большое внимание созданию различных приборов в том числе и военного оборудования.

Механика- «механе»-орудие, приспособление.

Механика изучает самый простой вид движения перемещение тел в пространстве.

В механике рассматривается движение тел.

Кинематика - *изучает движение тел, но не рассматривает причины, вызывающие это движение.*

Динамика - *изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.*

Статика - *изучает законы равновесия системы тел. Если известны законы движения тел, то из них можно установить и законы равновесия.*

Механическое движение *– изменение положения тела или частей тела в пространстве с течением времени.*

Существует два вида механического движения:

- *поступательное;*
- *вращательное.*

При **поступательном движении** ***все точки тела движутся одинаково, имеют одинаковые скорости и ускорения.***

Наиболее простым случаем движения является движение материальной точки.

Материальной точкой ***называется тело, формой и размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием, на котором оно рассматривается***

Выбираем систему отсчета, относительно которой будем рассматривать движение материальной точки. *Например:* прямоугольная система координат XYZ. Положение материальной точки можно задать тремя скалярными уравнениями

$x = f_1(t);$

$y = f_2(t);$

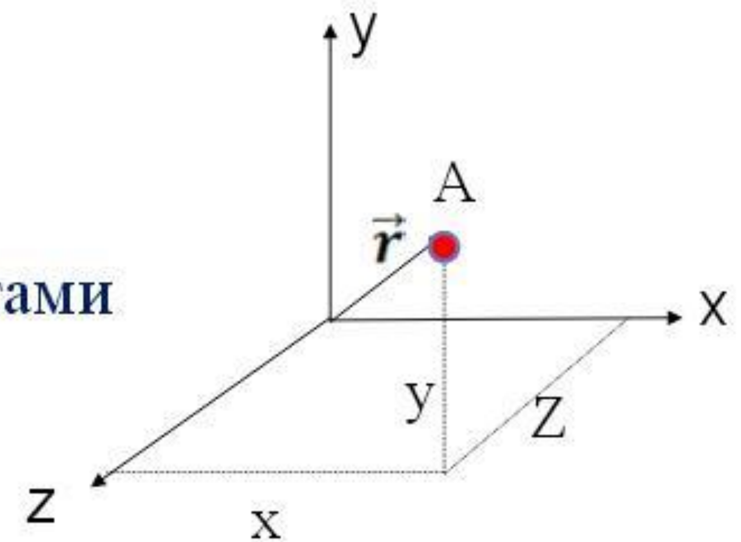
$z = f_3(t)$

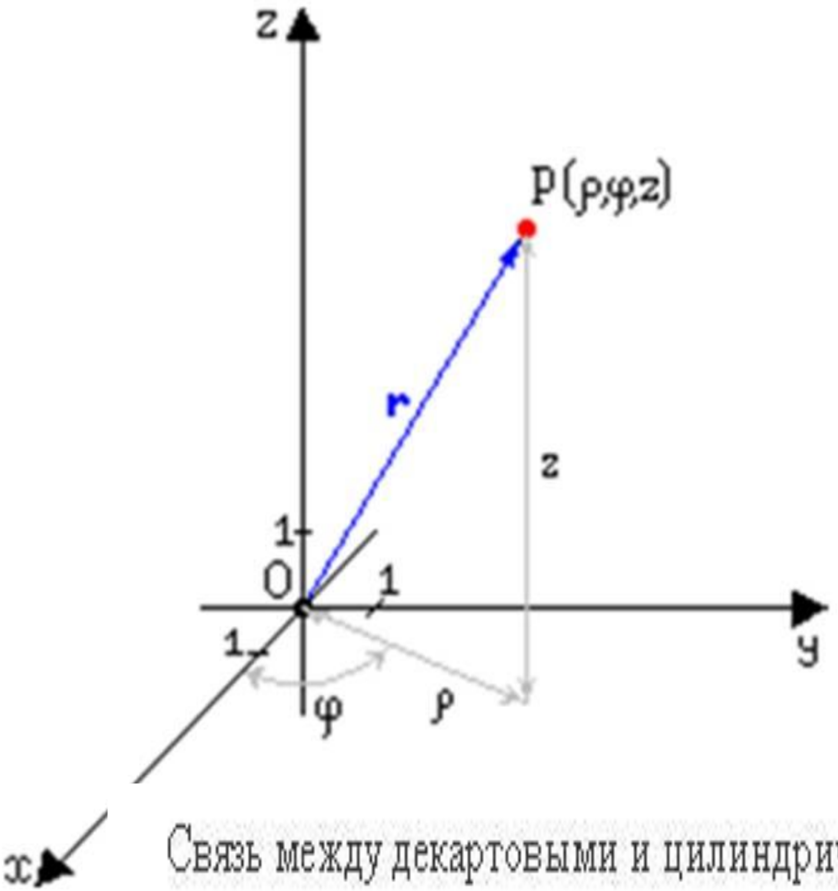
одним векторным

$\vec{r} = \vec{r}(t)$

А также тремя координатами

(X, Y, Z).





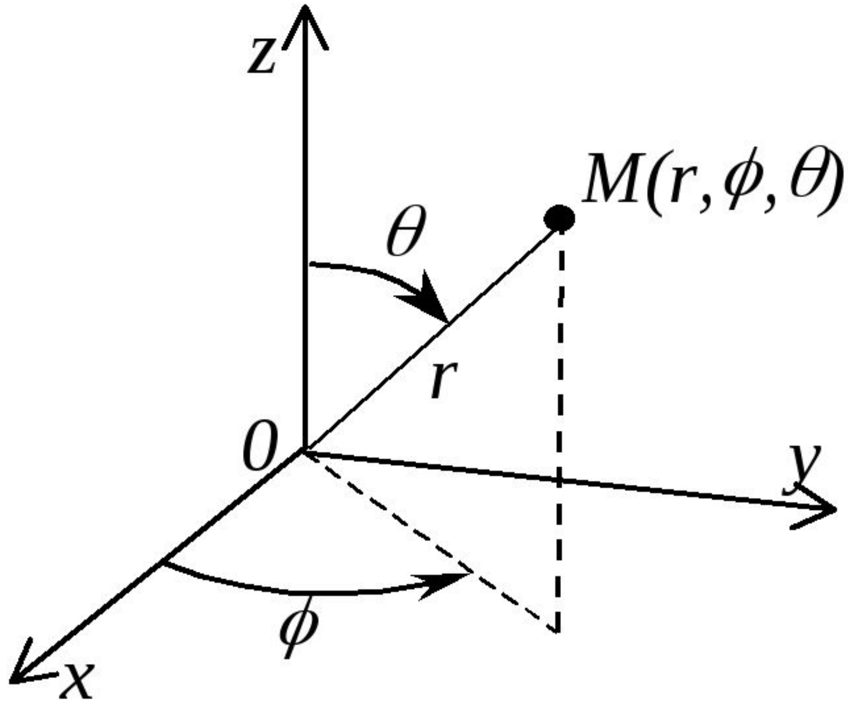
Цилиндрическая система координат

трехмерный аналог полярных,
в котором точка P представляется трехкомпонентным кортежем(r,θ,h).

Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами описывается формулами

$$x = \rho\cos\varphi\ ,\quad y = \rho\sin\varphi\ ,\quad z = z,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}.$$



Связь между декартовыми и сферическими координатами описывается формулами

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\ ,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi\ ,\ \ z = r\cos\theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ ,\ \ \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ \ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Связь между сферическими и цилиндрическими координатами описывается формулами

$$\rho = r\sin\theta\ ,\ \ \varphi = \varphi\ ,\ \ z = r\cos\theta\ ,$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}\ ,\quad \operatorname{tg}\theta = \frac{\rho}{z}.$$

<u>Траектория</u>- ***это линия вдоль которой движется тело.***

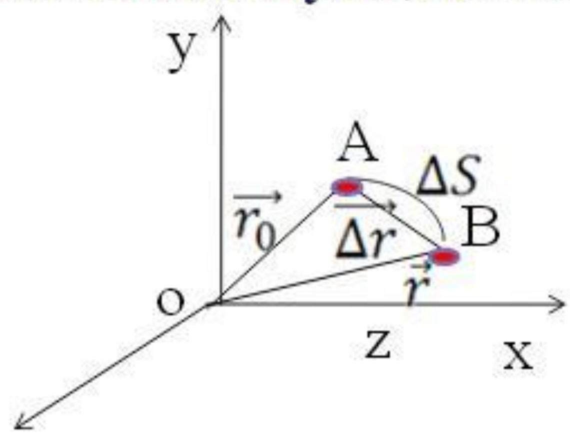
Рассмотрим перемещение точки из положения А в положение В за промежуток времени Δt

В зависимости от формы траектории различают:

- *Прямолинейное движение (траектория - прямая линия)*
- *Криволинейное движение (траектория -кривая линия)*

<u>Путь</u>- ***расстояние, измеренное вдоль траектории.***

$AB = \Delta S$ –путь или длина пути, длина траектории.



ΔS - скалярная величина (положительная, отрицательная). Измеряется в м.

<u>**Перемещение**</u> - ***направленный отрезок, соединяющий начальную точку с конечной. Это векторная величина.***

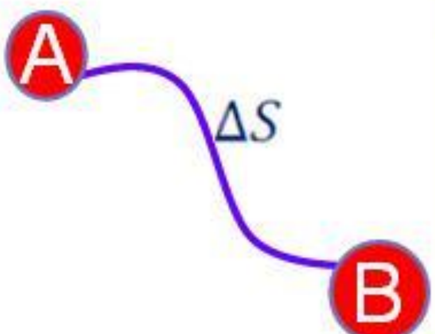
$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ -перемещение,

$\Delta\vec{r}$ - вектор, характеризуется численным значением и направлением

Для характеристики движения вводим понятие скорости.

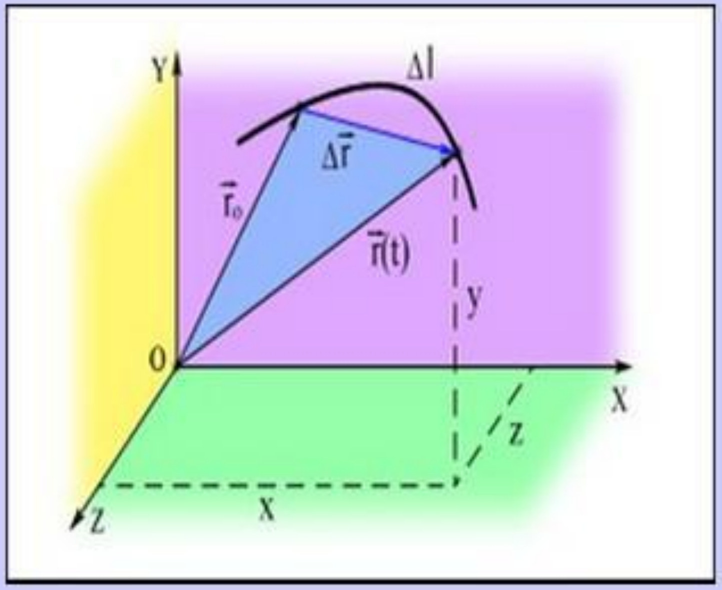
<u>Скорость</u> - это физическая величина, которая определяет как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени.

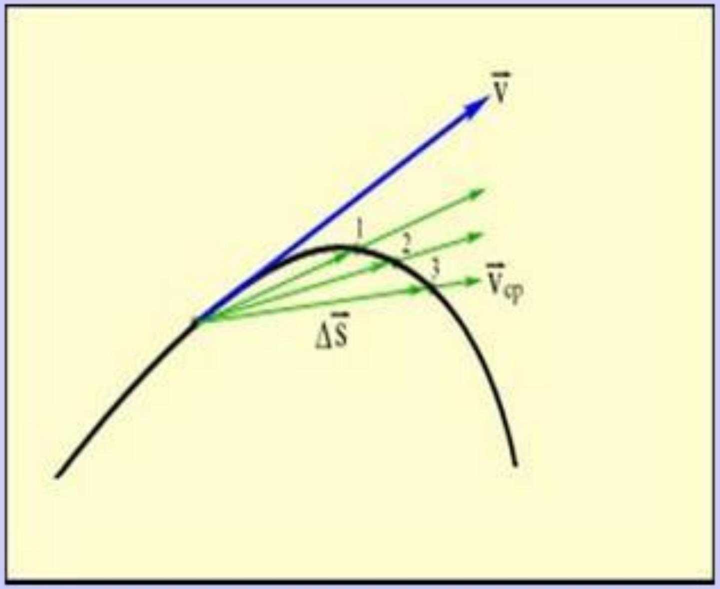
Пусть материальная точка, двигаясь по криволинейной траектории, прошла за промежуток времени Δt путь ΔS. Отношение пути, пройденного материальной точкой, к промежутку времени, за который этот путь пройден, называется средней скоростью движения



$$< \vec{V} > = \frac{\Delta S}{\Delta t} \Rightarrow < \vec{V} > = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad (1)$$

Скорость точки при криволинейном движении





$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Предел этого отклонения при $\Delta t \to 0$ назовем скоростью в данный момент времени или мгновенной скоростью

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad 2$$

<u>Мгновенная</u> <u>скорость</u> ***движения в любой точке траектории есть вектор, направленный по касательной к траектории, а по модулю равный пределу средней скорости при стремлении промежутка времени к нулю.***

Для характеристики движения тела вводятся следующие понятия:

1) ***средняя скорость***: . $\vec{V}_{cp} = \dfrac{\Delta\vec{S}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

Вектор **V** совпадает по направлению с **Δr**.

2) ***мгновенная скорость***: скорость в заданный момент времени.

$$\boxed{\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$

- это вектор, *всегда* направленный по касательной к данной точке траектории.

Скорость можно определить как производную радиуса – вектора движущейся точки по времени:

$$\boxed{v = \frac{dr}{dt}} \qquad \boxed{dr = dv \cdot dt}$$

Модуль мгновенной скорости определяется равенством:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

где V_x, V_y, V_z - проекции вектора скорости на координатные оси x, y, z

$$v_x = x' \qquad v_y = y' \qquad v_z = z'$$

Направление вектора скорости задается косинусами:

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} \qquad \cos\beta = \frac{v_y}{v} \qquad \cos\gamma = \frac{v_z}{v}$$

где α , β , γ -углы между вектором скорости и осями x, y, z соответственно.

<u>Скорость</u> – ***первая производная пути по времени.***

При $\Delta t \to 0$ численное значение скорости

$$\bar{V} = \frac{\overline{dS}}{dt} \qquad \text{откуда} \qquad \overline{dS} = \bar{V}\,dt$$

Проинтегрируем это выражение в интервале от **t** до **t+Δt**

$$S = \int_{t}^{t+\Delta t} V\,dt \qquad 3$$

Если движение равномерное

$$S = V\Delta t \qquad 4$$

где S=[м]; V=[м/с]; t=[с].

Равномерным называется движение -с неизменной скоростью.

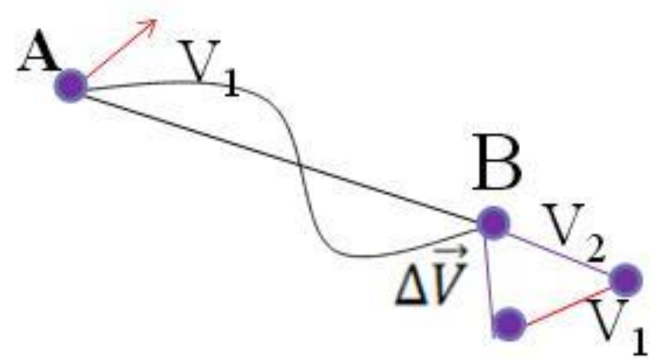
Если движение не равномерное, то вводится понятие ускорения.

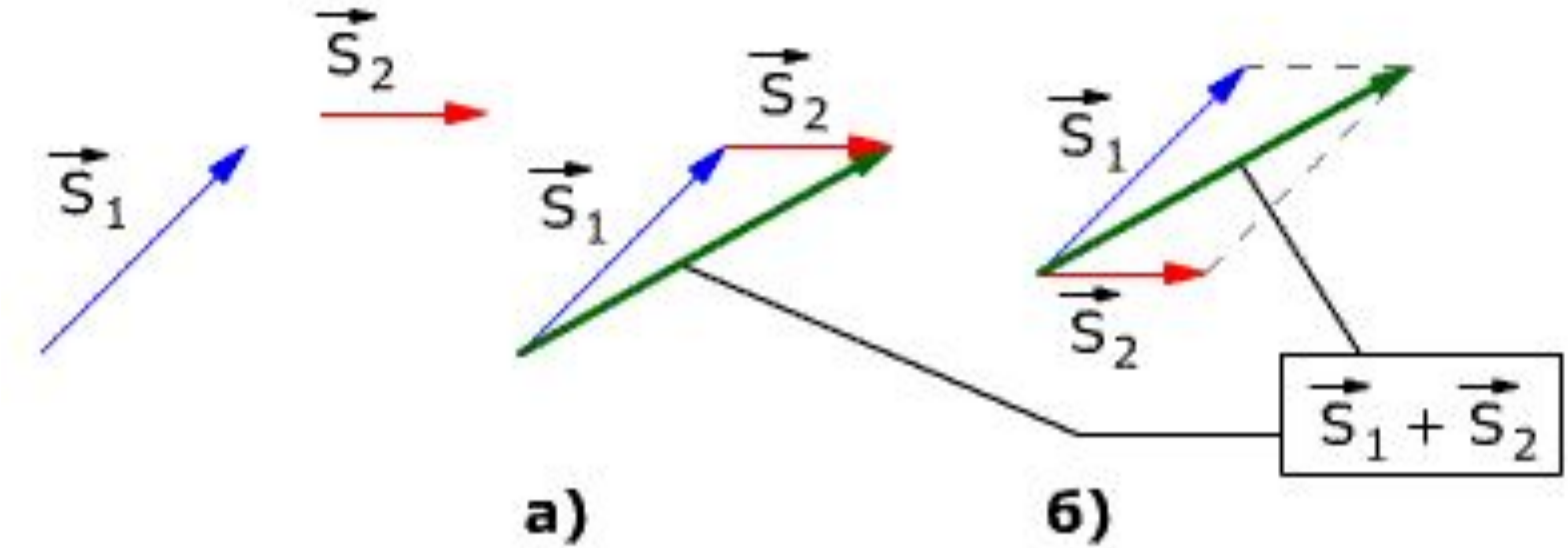
Ускорение – ***физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости по величине и направлению.***

Пусть материальная точка переместилась за малый промежуток времени Δt из точки “A”, где она имела скорость V_1, в точку “B”, где она имеет скорость V_2.

Изменение скорости движения точки есть вектор ΔV, равный разности векторов конечной и начальной скоростей.

$$\Delta\bar{V} = \bar{V}_2 - \bar{V}_1 \qquad 5$$




$\vec{S}_1$
$\vec{S}_2$
$\vec{S}_1$
$\vec{S}_2$
$\vec{S}_1$
$\vec{S}_2$
$\vec{S}_1 + \vec{S}_2$
а)
б)

Среднее ускорение – *это отношение изменения скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло.*

$$<\bar{a}> = \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} \quad 6$$

Ускорениенаправлено в ту же сторону, что и вектор изменения скорости $\overline{\Delta V}$

Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ есть ***1-я производная скорости по времени*** **и <u>называется мгновенным ускорением</u>**

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \frac{d\bar{V}}{dt} \quad 7$$

Так как

$$V = \frac{dS}{dt} \Rightarrow \bar{a} = \frac{d(\frac{dS}{dt})}{dt} = \frac{d^2 S}{d t^2} \quad 8$$

<u>Ускорение</u> - это вторая производная пути по времени.

Измеряется a =[м/с^2].

Ускорение, как и скорость, имеет направление.

В общем случае ускорение зависит от времени

(движение с переменным ускорением).

Если направление ускорения совпадает с направлением скорости – **<u>движение равноускоренное.</u>**

Если противоположно – **<u>равнозамедленное.</u>**

УСКОРЕНИЕ

– ***характеристика неравномерного движения, показывает на сколько изменилась скорость за 1с.***

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$$

v – конечная скорость

v_0 – начальная скорость

a – ускорение (м/с²)

a>0 движение равноускоренное, v <u>увеличивается</u>

a<0 движение равнозамедленное, v <u>уменьшается</u>

Направление вектора ускорения совпадает с направлением изменения скорости.

Рассмотрим случай, когда пройденный путь определяется выражением.

$$S = A + Bt + Ct^2 \quad (9)$$

Возьмем первую и вторую производные пути по времени

$$V = \frac{dS}{dt} = B + 2Ct \quad (10)$$

$$a = \frac{d^2S}{dt^2} = 2C = const$$

случай равноускоренное движение

Значит, $C = \frac{a}{2}$

Введем обозначения: A= S_0 ; B=V_0 ; $C = \frac{a}{2}$

Получаем формулу пути при равноускоренном движени:

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2} \quad 11$$

а скорость

$$V = V_0 + at \quad 12$$

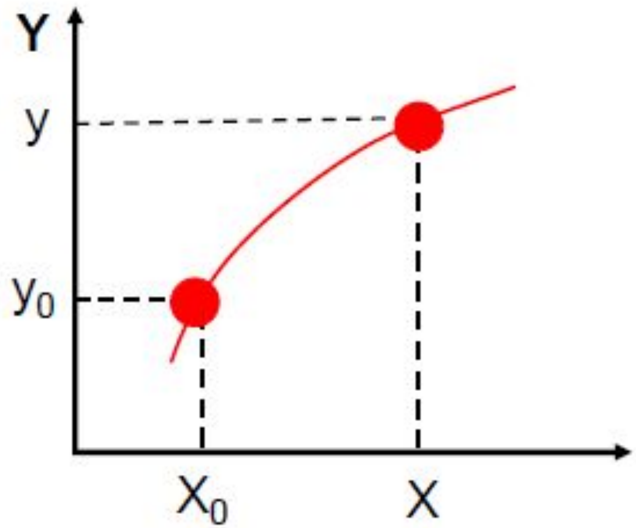
выразим из формулы скорости ускорение

$$a = \frac{V - V_0}{t} \quad 13$$

-ускорение при равноускоренном движении

Криволинейное движение - движение, траектория которого представляет собой не прямые, а кривые линии.

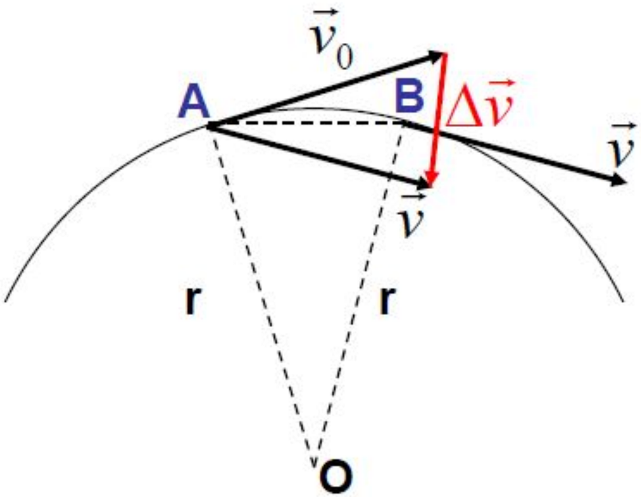
Криволинейное движение сложнее прямолинейного. При таком движении уже нельзя сказать, что изменяется только одна координата. Если движение происходит на плоскости, то изменяются две координаты: x и y



Непрерывно изменяется направление движения, т.е. направление вектора скорости, а значит и направление вектора ускорения. Могут изменяться и модули скорости и ускорения.

Равномерное движение по окружности – это движение с ускорением, хотя по модулю скорость не меняется.

Определим направление ускорения тела



Ускорение определяется формулой:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$$

Тело вращается по окружности радиуса r. Предположим, что тело за малый промежуток времени t переходит из точки A в точку B, расположенную близко к ней (тогда длина окружности AB совпадает с хордой AB). Скорости в точках A и B равны $\vec{v}_0$ и $\vec{v}$

Перенесем вектор V в точку A. Соединив концы векторов $\vec{v}_0$ и $\vec{v}$ отрезком прямой . Полученный вектор $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$ направлен внутрь окружности. Туда же будет направлен и вектор ускорения $\vec{a}$.

При равномерном движении тела по окружности его ускорение во всех точках направлено к центру. Ускорение называется **центростремительное.**

Чему равен модуль центростремительного ускорения?

Треугольник из векторов $\vec{v}_0$ $\vec{v}$ и $\Delta\vec{v}$ равнобедренный, т.к. $\vec{v} = \vec{v}_0$

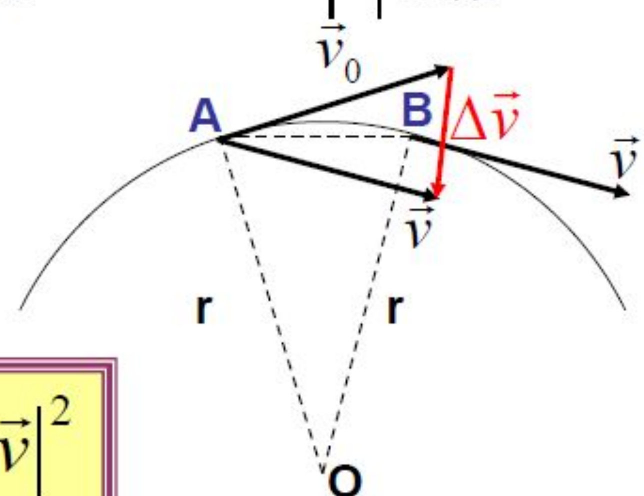
Треугольник ОАВ тоже равнобедренный (ОА и ОВ радиусы окружности). Треугольники подобны как равнобедренные с равными углами при вершинах. Из подобия треугольников следует пропорциональность сходственных сторон.

модуль изменения скорости

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{AB} = \frac{|\vec{v}|}{r}$$

модуль скорости

Длина дуги (= хорды) АВ – путь, пройденный телом со скоростью $AB = |\vec{v}| \cdot t$ тогда



$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{|\vec{v}| \cdot t} = \frac{|\vec{v}|}{r}$$

или

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{t} = \frac{|\vec{v}|^2}{r}$$

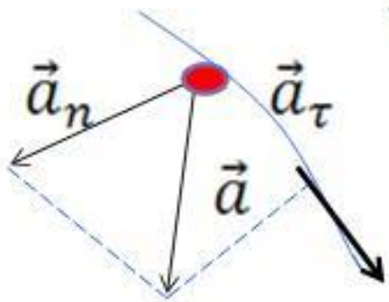
Учитывая, что $|\vec{a}| = \dfrac{|\vec{v} - \vec{v}_0|}{t}$ получаем

$$\boxed{|\vec{a}| = \frac{|\vec{v}|^2}{r}}$$

Разложим вектор ускорения на 2 составляющие: *тангенциальную* и *нормальную*. Первая составляющая направлена по касательной к траектории, вторая по нормали.

Численное значение полного ускорения равно:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$



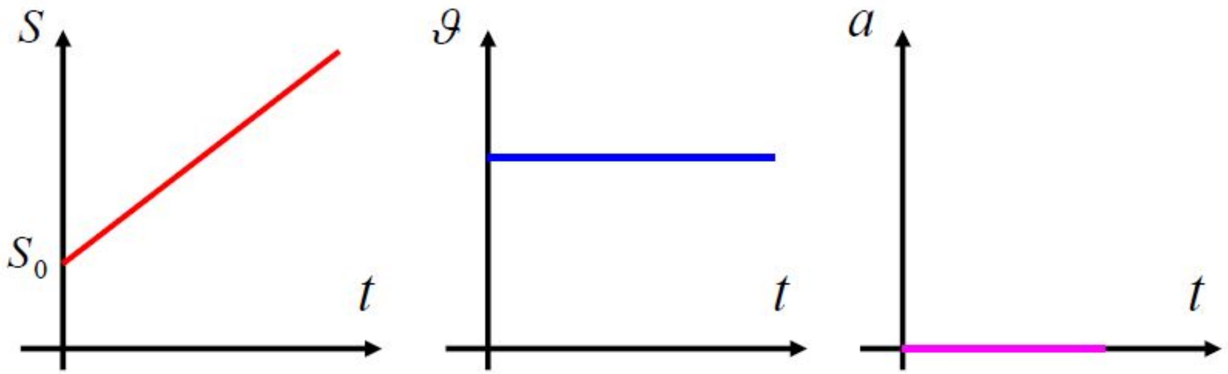
Тангенциальное ускорение -*характеризует быстроту изменения скорости.*

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} \quad 14$$

Нормальное ускорение - *характеризует изменение скорости по направлению.*

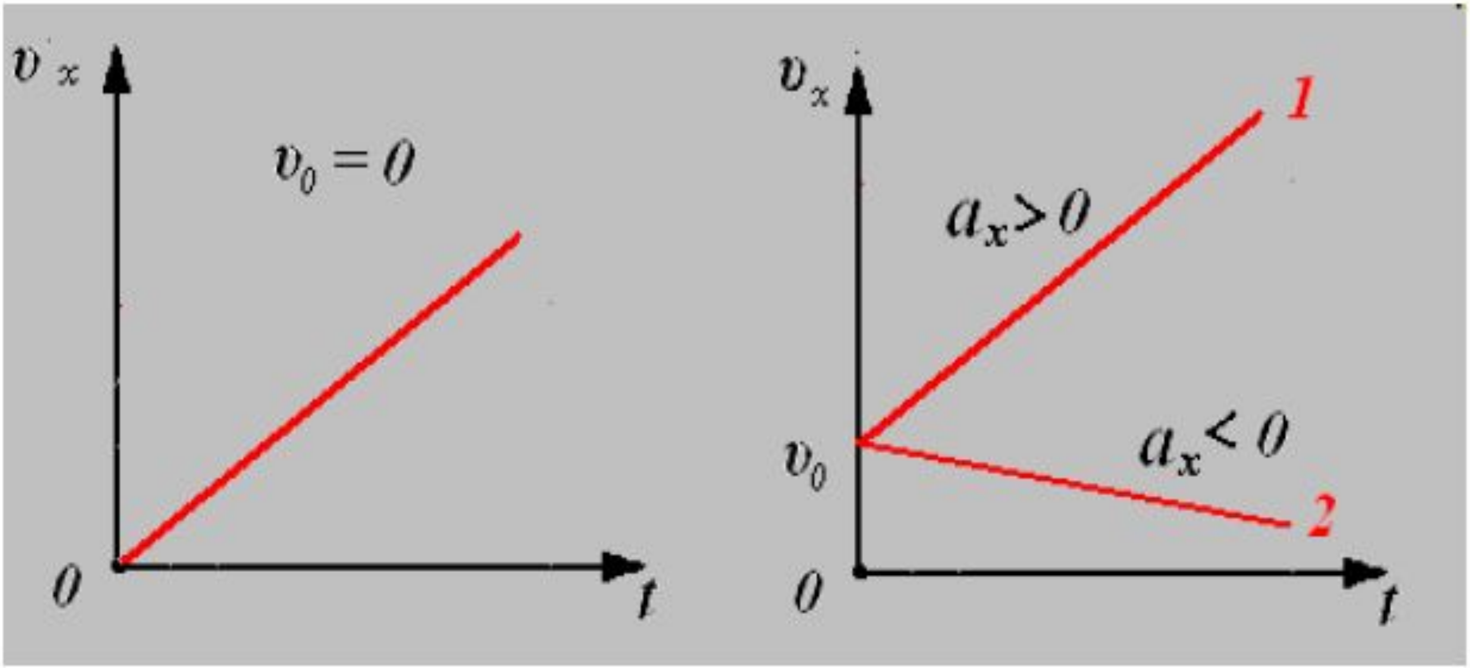
$$a_n = \frac{V^2}{R} \quad 15$$

Графическое представление перемещения, скорости и ускорения при равномерном прямолинейном движении



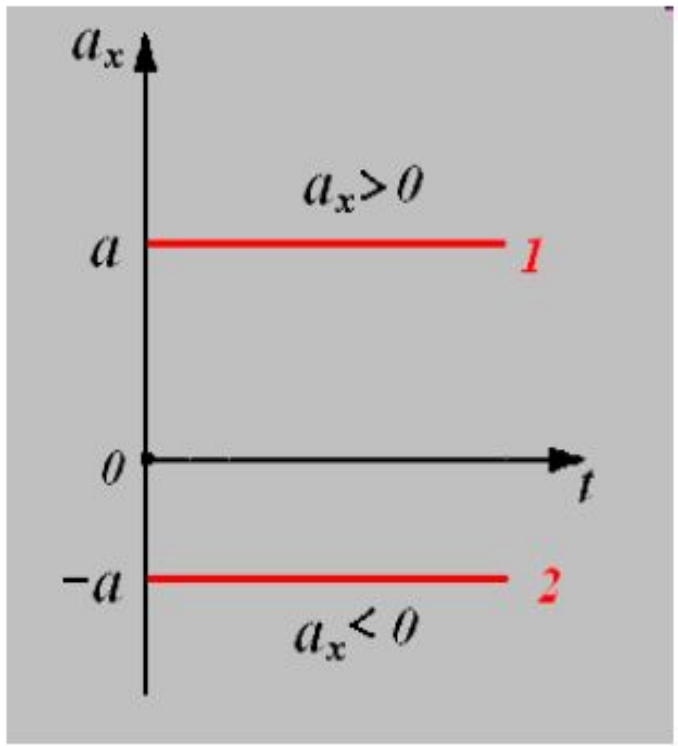
перемещение	скорость	ускорение
$S = S_0 + V_x \cdot t$	$V = Const$	$a = 0$

график зависимости проекции скорости от времени.



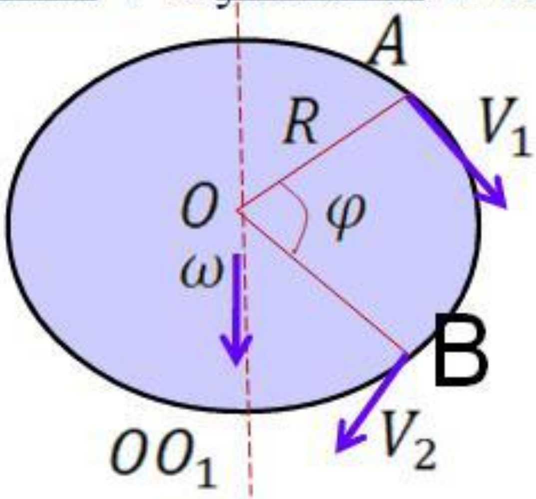
1 м/с² - ускорение прямолинейно и равноускоренно движущейся точки, при котором за 1с ее скорость изменяется на 1м/с.

график зависимости проекции ускорения от времени.



При <u>вращательном движении</u> - все точки, принадлежащие твердому телу, описывают окружности относительно оси вращения.

Вращательное движение характеризуется двумя величинами: <u>линейной</u> **V** и <u>угловой</u> **ω** скоростями.



***<u>Угловой скоростью</u>** ω - называется отношение угла поворота радиуса R (угловой путь) к промежутку времени, за который этот поворот произошел.*

В случае равномерного движения:

$$< \bar{\omega} >= \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad 16$$

Где $\Delta\varphi$ – угол поворота, [рад]; $< \bar{\omega} >$ – средняя скорость[рад/с];

Δt – время, [с].

В случае неравномерного движения мгновенная угловая скорость будет иметь вид:

$$\bar{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad [\text{рад/с}] \quad 17$$

Угловая скорость – *первая производная угла поворота по времени.*

При неравномерном вращательном движении вводим понятие углового ускорения.

Среднее угловое ускорение – *отношение изменения угловой скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло*

$$<\bar{\varepsilon}> = \frac{\Delta\bar{\omega}}{\Delta t} \quad 18$$

Мгновенное ускорение– *предел среднего углового ускорения при $\Delta t \to 0$*

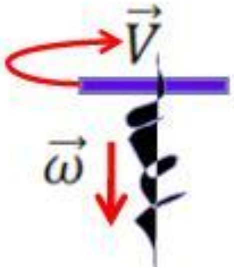
$$\bar{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad [\text{рад/с}^2] \quad 19$$

Угловое ускорение – *это первая производная скорости по времени и вторая производная углового пути по времени.*

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\left(d\,\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad (20)$$

Направление углового ускорения совпадает с вектором угловой скорости при равноускоренном движении и противоположно при равнозамедленном. Направление угловой скорости определяется ***правилом буравчика***:

Вектор угловой скорости направлен в сторону поступательного движения буравчика, рукоятка которого вращается в направлении линейной скорости.



Обозначим: $\Delta\varphi = 2\pi$, $dt = T$ – *период* – ***время, в течение которого совершается один полный оборот,*** получим:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad 21$$

где ν =**1/T** – угловая частота Гц]; **T** – период, [с].

$$\omega = 2\pi\nu \quad 22$$

угловая скорость, выраженная через частоту

Линейная скорость при вращательном движении

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$ 23

Если материальная точка совершает полный оборот, то $\Delta S = 2\pi R$

$$V = 2\pi R \nu$$ 24

$$V = \frac{2\pi R}{T}$$

линейная скорость, выраженная через частоту

Линейная скорость, выраженная через период

Линейные **Угловые**

Линейные	Угловые
$S, \bar{S}, \bar{V}, \bar{a}$	$\varphi, \overline{\omega}, \bar{\varepsilon}$
$V = V_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$
$V = \frac{dS}{dt} = \frac{dr}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}$	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

При равномерном движении по окружности

$$AB = S, \Longrightarrow S = R \cdot \varphi$$

Возьмем 1-ю производную по времени

$$\frac{dS}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt}\ ; \quad \frac{dS}{dt} = V; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

$$V = \omega R$$

25

Связь между линейной и угловой скоростью.

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{R d\omega}{dt} = R \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

$$a = \varepsilon \cdot R$$

26

связь между ускорением линейным и угловым