

# ОПТИКА

## Лк-31

## Литература

1. Конспект лекций
2. Любой учебник по общей физике, раздел "Оптика", например, И. В. Савельев Курс общей физики, том III.
3. А. Н. Матвеев Оптика. - Высшая школа 1985 г.
4. Дж. Орир Физика, том 2. - Мир. 1981 г.
5. Интернет, из которого можно скачать любой учебник или конспект лекций по оптике.

Оптика – наука о свете. Свет представляет собой электромагнитные волны с длинами волн в диапазоне от 400 нм до 750 нм. ЭМ волны описываются уравнениями электродинамики. Если в рассматриваемой области пространства нет свободных зарядов и сторонних токов, система уравнений электродинамики записывается в виде простых уравнений, связывающих между собой векторы напряженностей электрической -  $\vec{E}$  и магнитной -  $\vec{H}$  составляющих поля.

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\mu\mu_0 \int_S \frac{d\vec{H}}{dt} d\vec{s} \quad (31.1)$$

$$\oint_{L'} \vec{H} d\vec{l} = \varepsilon\varepsilon_0 \int_{S'} \frac{d\vec{E}}{dt} d\vec{s}$$

Из первого уравнения следует, что изменение во времени напряженности магнитного поля ( $dH/dt \neq 0$ ) вызывает появление вихревого электрического поля, причем силовые линии его "накручиваются" на силовые линии магнитного поля, захватывая соседние области пространства. Второе уравнение аналогично первому, только определяет создание вихревого магнитного поля по тому же принципу. В результате электромагнитное возмущение распространяется в пространстве с некой конечной скоростью. Эта скорость определяется коэффициентами  $\epsilon$  и  $\mu$ , которые называются соответственно диэлектрической и магнитной проницаемостью среды. Система интегральных уравнений (31.1) преобразуется в дифференциальные уравнения, описывающие напряженности полей в какой-либо точке пространства. Для простого одномерного случая они имеют вид:

$$\frac{dH_y}{dz} = \epsilon\epsilon_0 \frac{dE_x}{dt}, \quad \frac{dE_x}{dz} = \mu\mu_0 \frac{dH_y}{dt} \quad (31.2)$$

Для упрощения записи не будем записывать индексы  $x$  и  $y$ , помня, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно перпендикулярны.

Система дифференциальных уравнений (31.2) расцепляется и порождает два одинаковых уравнения для электрической и магнитной составляющих. Эти уравнения называются волновыми:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \qquad (31.3)$$

Одним из решений данных дифференциальных уравнений второго порядка является синусоидальная зависимость напряженностей полей от координаты и времени:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t - kz + \varphi_E); \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_m \cos(\omega t - kz + \varphi_H). \qquad (31.4)$$



Параметры фазы -  $\omega$ ,  $k$ ,  $\varphi$  соответственно носят названия круговой частоты, волнового числа и начальной фазы. *В случае произвольного направления распространения волны вместо волнового числа используется волновой вектор  $\vec{k}$ , направление которого совпадает с направлением распространения волны. При этом в выражении для фазы волны произведение  $kz$  заменяется скалярным произведением  $\vec{k} \cdot \vec{r}$ , где  $r$  - радиус-вектор точки, в которой наблюдается волна.*

Длиной волны -  $\lambda$  называется приращение координаты  $z$  при котором фаза изменяется на величину периода косинуса -  $2\pi$ , т.е.  $k\lambda=2\pi$ . Это позволяет выразить волновое число через длину волны, которую относительно легко измерить:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (31.6)$$

Световые волны занимают известный диапазон длин волн от 400 до 750 нм.

Цвет	Диапазон длин волн, нм
Фиолетовый	380—440
Синий	440—485
Голубой	485—500
Зелёный	500—565
Жёлтый	565—590
Оранжевый	590—625
Красный	625—740

Причем длина световой волны связана с ощущением цвета. В таблице 31.1 приведены названия цветов и соответствующие им длины волн.

Подставив выражение любой из напряженностей из (31.4) в уравнение (31.3), определим соотношение между частотой колебаний -  $\omega$  и волновым числом -  $k$ .

$$k = \omega \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \quad (31.7)$$

Фазовой скоростью распространения волны называется скорость перемещения в пространстве точки постоянного значения фазы. Полагая  $(\omega t - kx + \varphi) = \text{const}$  и дифференцируя это равенство по времени, получим  $\omega - k dx/dt = 0$ . отсюда

$$\frac{dx}{dt} = v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}} \quad (31.8)$$

Если в эту формулу подставить проницаемости вакуума -  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ , то получим величину фазовой скорости, совпадающую со скоростью света  $C=2.998*10^8$  м/с. Именно это обстоятельство, в свое время, явилось основанием для предположения о том, что свет является ЭМ волной.

Если свет распространяется не в вакууме, а в среде иными величинами диэлектрической и магнитной проницаемостей, то его фазовая скорость будет другой. Магнитную проницаемость любой прозрачной среды можно всегда полагать равной  $\mu=1$ . Скорость света будет определяться только диэлектрической проницаемостью:

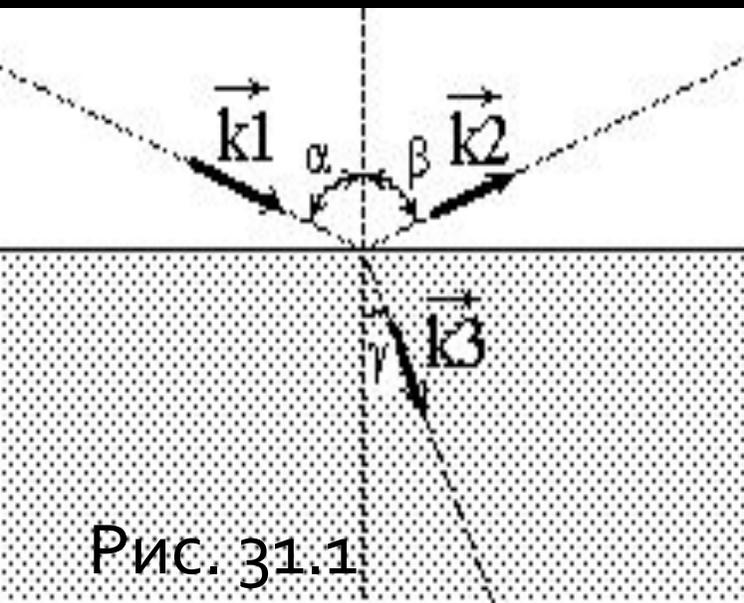
$$v_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \quad (31.9)$$

где  $c$  - скорость света в вакууме. Коэффициент уменьшения скорости распространения волны в какой-либо среде, в сравнении со скоростью в вакууме называется абсолютным коэффициентом преломления данной среды -  $n$ .

Как видно из (31.9), показатель преломления выражается через диэлектрическую проницаемость среды:  $n = \sqrt{\epsilon}$ .

## ***Преломление и отражение плоской ЭМ волны на плоской границе раздела сред.***

Рассмотрим прохождение ЭМ волны через плоскую границу раздела двух прозрачных сред, занимающих верхнее и нижнее полупространства. При этом падающая волна с волновым вектором  $\vec{k}_1$  частично отражается, превращаясь в волну с волновым вектором  $\vec{k}_2$  и частично проходит во вторую среду, где имеет



волновой вектор  $\vec{k}_3$ . Все три волны полагаем плоскими. Запишем уравнения, например, для напряженностей электрических полей каждой из волн.

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{m1} \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{m2} \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})$$

$$\vec{E}_3 = \vec{E}_{m3} \cos(\omega t - \vec{k}_3 \cdot \vec{r})$$

Рис. 31.1

Частота колебаний остается неизменной при отражении и прохождении света во вторую среду. На границе раздела для напряженностей полей должны выполняться граничные условия. Это возможно только в том случае, если скалярные произведения  $\vec{k} * \vec{r}$  на границе раздела сред будут одинаковы для всех трех волн. При вычислении скалярного произведения на плоскости раздела берутся проекции волновых векторов на эту плоскость. Эти проекции должны совпадать. Обозначим углы между волновыми векторами и перпендикуляром к поверхности раздела как показано на рисунке. Тогда требование совпадения проекций волновых векторов на плоскость раздела: выразятся в следующем виде:

1. Волновые векторы  $k_1, k_2, k_3$  должны находиться в одной плоскости, перпендикулярной плоскости раздела сред.
2.  $k_1 \sin(\alpha) = k_2 \sin(\beta) = k_3 \sin(\gamma)$

Эти требования известны как законы Снеллиуса

Подставив вместо модулей волновых векторов их выражения через параметры сред (31.7) и сократив на  $\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  получим

$$\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\sin(\alpha) = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\sin(\beta) = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\sin(\gamma) \quad (31.10)$$

Из первого равенства следует, что  $\alpha=\beta$  – закон отражения, а из второго – закон преломления

$$\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\sin(\alpha) = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\sin(\gamma) \quad (31.11)$$

Согласно (31.8)  $\sqrt{\varepsilon_a\mu_a} = c/v$ , - отношение скорости света в вакууме и среде. Поэтому (31.11) запишется в таком виде:

$$\frac{\sin(\alpha)}{v_1} = \frac{\sin(\gamma)}{v_2} \quad (31.12)$$

Можно также выразить скорости волн через скорость света в вакууме и абсолютные показатели преломления сред

$$v = \frac{c}{n}$$

Тогда закон преломления примет привычный вид

$$n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\gamma) \quad (31.13)$$

Естественно, что электромагнитная теория свет приводит к тем же результатам, которые дают другие способы изучения света.

## ***Геометрическая оптика***

(ее называют также лучевой оптикой) рассматривает поведение света, представляя его в виде лучей. Если плоскую световую волну пропустить через отверстие в непрозрачной преграде, то прошедший пучок света уже не будет плоской волной. Волновые векторы по сечению пучка не будут параллельны, а пучок будет расходящимся. Однако, если размеры отверстия намного больше длины волны, расходимось пучка оказывается небольшой и его можно считать лучом, распространяющимся в однородной среде прямолинейно. Длины световых волн составляют доли микрона, поэтому отверстия с размерами в доли миллиметра уже удовлетворяют требованию огромности.

## *Преломление света на сферической поверхности раздела сред.*

Преломление луча сферической поверхностью показано на рисунке

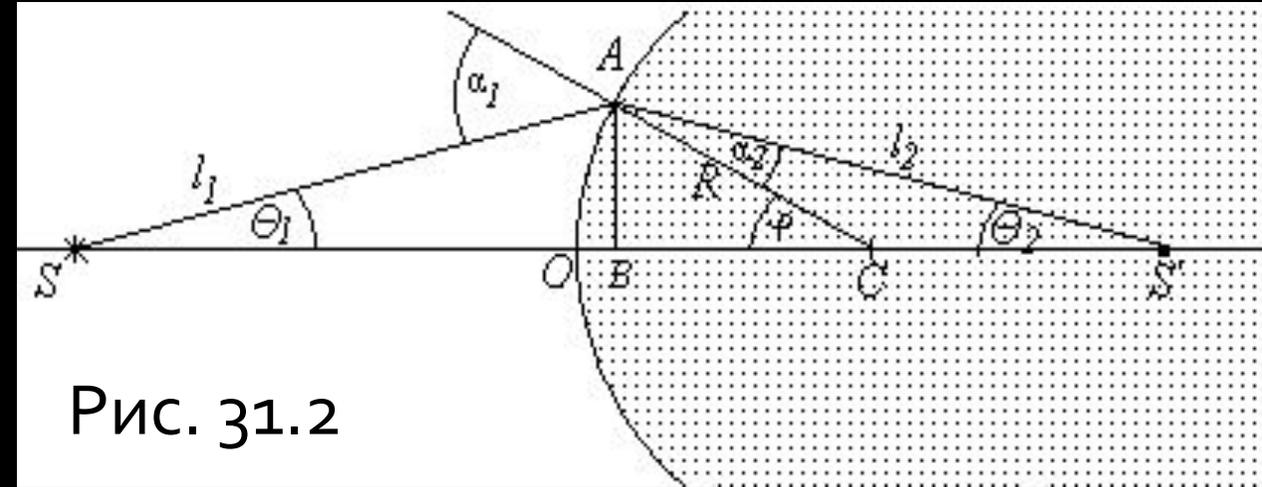
Центр сферической поверхности и ее радиус обозначены через  $C$  и  $R$ .

Линия, проходящая через центр по-

верхности и источник света -  $S$  называется главной оптической осью.

Рассмотрим ход луча, испущенного источником, и падающего на точку  $A$  поверхности. Длина этого луча -  $l_1$ . Преломленный луч пройдет через точку  $S'$  на главной оптической оси. Его длина до этой точки -  $l_2$ . **Точки  $S$  и  $S'$  называются сопряженными.** Точно также лучи  $SA$  и  $AS'$  называют сопряженными. Определим соотношение, связывающее положения сопряженных точек  $S$  и  $S'$ . Для этого выразим длину отрезка  $AB$  из треугольников  $SAB$  и  $S'AB$ . В результате получим следующее равенство

$$|AB| = l_1 \sin(\theta_1) = l_2 \sin(\theta_2) = R \sin(\varphi)$$



Угол  $\theta_1$  выразится из треугольника SAC через угол  $\varphi$  угол падения -  $\alpha_1$ , который является внешним углом данного треугольника:  $\theta_1 = \alpha_1 - \varphi$ . Аналогично из треугольника S'AC выразится угол  $\theta_2 = \varphi - \alpha_2$ . Подставив  $\theta_1$  и  $\theta_2$  в формулу для длин лучей и расписав синусы разностей углов, получим:

$$l_1 \sin(\alpha_1) \cos(\varphi) - l_1 \sin(\varphi) \cos(\alpha_1) = R \sin(\varphi)$$

$$l_2 \sin(\varphi) \cos(\alpha_2) - l_2 \sin(\alpha_2) \cos(\varphi) = R \sin(\varphi)$$

Эти два равенства переписутся в другом виде:

$$l_1 \sin(\alpha_1) \cos(\varphi) = \sin(\varphi) (R + l_1 \cos(\alpha_1))$$

$$l_2 \sin(\alpha_2) \cos(\varphi) = \sin(\varphi) (l_2 \cos(\alpha_2) - R)$$

Введем систему координат, центр которой поместим в точку O, где главная оптическая ось пересекает преломляющую поверхность. Тогда координаты сопряженных точек -S и S' определятся приближительными равенствами:

$$x_S = -l_1 \cos(\theta_1), \quad x_{S'} = l_2 \cos(\theta_2) \quad l_1 \approx -x_S, \quad l_2 \approx x_{S'}$$

Данные равенства основаны на том, что рассматриваются только лучи, близкие к оптической оси, которые называются *параксиальными* лучами. После подстановки этих равенств в предыдущие и деления первого из них на второе получим:

$$\frac{-x_S \sin(\alpha_1)}{x_{S'} \sin(\alpha_2)} = \frac{R - x_S}{x_{S'} - R}$$

Заменяя отношение синусов обратным отношением показателей преломления:  $\sin(\alpha_1)/\sin(\alpha_2) = n_2/n_1$  и собрав члены с  $x_S$  и  $x_{S'}$  в одной части равенства, а члены с  $R$  - в другой, получим:

$$\left( \frac{n_1}{x_S} - \frac{n_2}{x_{S'}} \right) = \frac{n_1 - n_2}{R} \quad (31.14)$$

Эта формула позволяет при заданных  $x_S, n_1, n_2$  вычислить  $x_{S'}$ . т.е. по заданному положению точечного источника света найти точку его изображения, даваемого сферической поверхностью

Параксиальные лучи, расходящиеся от источника после преломления сферической поверхностью, могут либо стать сходящимися и дать действительное изображение источника, либо остаться расходящимися. В последнем случае изображение источника будет находиться в первой среде на продолжении в нее расходящихся после преломления лучей. Это мнимое изображение.

**Фокусы сферической поверхности** - это точки, в которых сходится пучок параллельных лучей, посланный на поверхность. Для имитации параллельного пучка слева от поверхности следует в (31.14) положить  $x_S = \infty$ . Тогда координатой фокуса будет  $x_{S'}$ , обозначим ее как  $f_2$ . Из (31.14) получим:

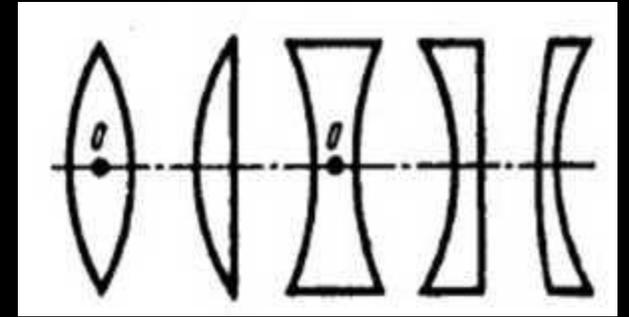
$$\left(-\frac{n_2}{f_2}\right) = \frac{n_1 - n_2}{R} \quad \Rightarrow \quad f_2 = R \frac{n_2}{n_2 - n_1} \quad (31.15)$$

Аналогично, полагая  $x_{S'} = \infty$ , найдем положение фокуса при облучении поверхности справа.

$$f_1 = -R \frac{n_1}{n_2 - n_1} \quad (31.16)$$

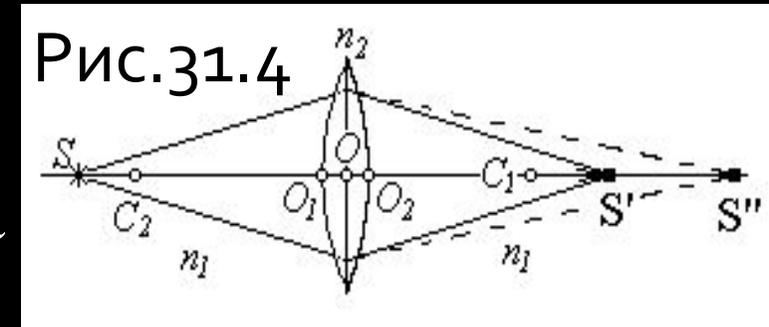
Понятно, что фокусы могут быть действительными и мнимыми.

**Центрированная оптическая система.** - это набор преломляющих сферических поверхностей, центры которых лежат на одной прямой. Эта прямая называется *главной осью* системы. На рисунке показана система линз – двойных сферических поверхностей и главная оптическая ось.



Простейший случай центрированной системы, состоящей всего из двух сферических поверхностей, ограничивающих какой-либо прозрачный хорошо преломляющий материал, (обычно стекло) от окружающего воздуха. Такая система представляет обычную линзу.

Линза называется тонкой, если обе ее вершины можно считать совпадающими, т.е. если толщина линзы мала по сравнению с  $R_1$  и  $R_2$ , радиусами кривизны ограничивающих поверхностей. На рисунке для ясности линза изображена толстой. В дальнейших расчетах будем полагать, что точки  $O_1$  и  $O_2$  сливаются, и обозначим их буквой  $O$ . Все расстояния будем отсчитывать от этой точки  $O$ , которая носит название оптического центра линзы.



Лобой параксиальный луч, проходящий через  $O$ , практически не испытывает преломления. Прямую, проходящую через оптический центр, мы назовем осью линзы. Та из осей, которая проходит через центры обеих поверхностей, называется главной оптической осью (ГОО), остальные - побочными.

Допустим, что параксиальный пучок лучей от источника  $S$  на главной оптической оси падает на линзу (См. рисунок 31. 4). Преломление на первой сферической поверхности создало бы без второй сферической поверхности в сплошном стекле с показателем преломления  $n_2$  изображение в точке  $S''$ ,

$$\left( \frac{n_1}{x_S} - \frac{n_2}{x_{S''}} \right) = \frac{n_1 - n_2}{R_1}$$

где  $R_1$  - радиус кривизны первой поверхности линзы.

Для второй поверхности  $S''$  является как бы мнимым источником света.

Построение изображения этого источника после преломления на второй поверхности линзы даст точку  $S'$  на расстоянии  $x_{S'}$  от линзы. Здесь опять применима формула (31.14)

$$\left( \frac{n_2}{x_{S''}} - \frac{n_1}{x_{S'}} \right) = \frac{n_2 - n_1}{R_2}$$

Складывая эти два равенства получим

$$\left( \frac{1}{x_S} - \frac{1}{x_{S'}} \right) = \left( 1 - \frac{n_2}{n_1} \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (31.17)$$

Эта общая формула линзы, связывающая координаты сопряженных точек. Она справедлива для линз выпуклых и вогнутых при любом расположении источника и соответствующем расположении фокуса. Нужно только принять во внимание знаки  $x_S$ ,  $x_{S'}$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ , считая их положительными если они отложены вправо от линзы, и отрицательными, если они отложены от линзы влево (как было сделано при выводе формулы (31.14)). Если знаки  $x_S$  и  $x_{S'}$  одинаковы, то одна из сопряженных точек мнимая, т.е. в ней пересекаются не сами лучи, а их воображаемые продолжения

**Фокусные расстояния тонкой линзы.** Отодвигая источник света в  $-\infty$ , т.е. полагая в (5)  $x_S = -\infty$ , получим его изображение в первом фокусе:

$$f_1 = \frac{1}{(N - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} \quad (31.18)$$

где через  $N = n_2/n_1$  обозначен относительный показатель преломления материала линзы. Аналогично, полагая  $x_S = \infty$ , получим координату второго фокуса

$$f_2 = - \frac{1}{(N - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} \quad (31.19)$$

Итак, фокусные расстояния линзы равны по величине и противоположны по знаку, т.е. фокусы лежат по разные стороны от линзы.

В зависимости от знака и величины  $R_1$  и  $R_2$ , а также от знака  $(N-1)$ , величина  $f_1$  может быть положительной либо отрицательной, Т.е. фокус может быть мнимым или действительным. То же относится и к  $f_2$ , причем нетрудно видеть, что они оба либо мнимые, либо действительные.

Если фокусы действительны, Т.е. параллельные лучи после преломления в линзе сходятся, то линза называется собирающей или положительной. При мнимых фокусах параллельные лучи после преломления в линзе становятся расходящимися. Поэтому такие линзы называются рассеивающими или отрицательными. Если материал тонкой линзы преломляет сильнее, чем окружающая среда (например, стеклянная линза в воздухе), то собирательными будут линзы, утолщающиеся к середине, К рассеивающим линзам принадлежит линзы, утончающиеся к середине.

Вводя фокусное расстояние линзы  $f=f_1=-f_2$ , придадим формуле линзы (5) привычный вид:

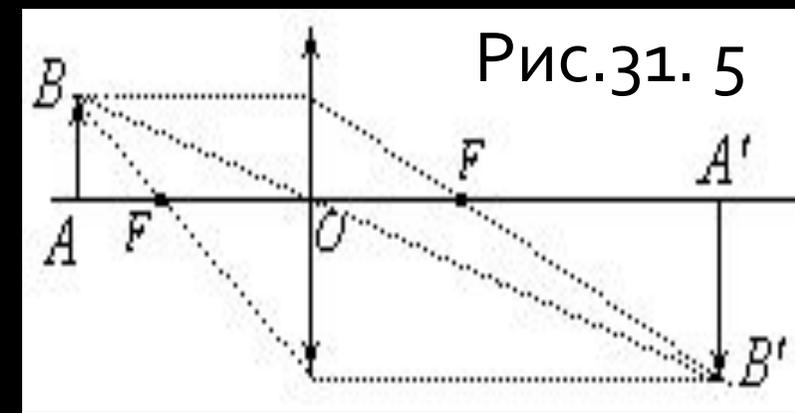
$$\frac{1}{x_{S'}} - \frac{1}{x_S} = \frac{1}{f} \quad (31.20)$$

Здесь вновь необходимо соблюдать знаки координат и фокусного расстояния. На оптических схемах тонкая линза изображается в виде двунаправленной стрелки, пересекающей главную оптическую ось и точек фокусов.

### *Построение изображений в линзах.*

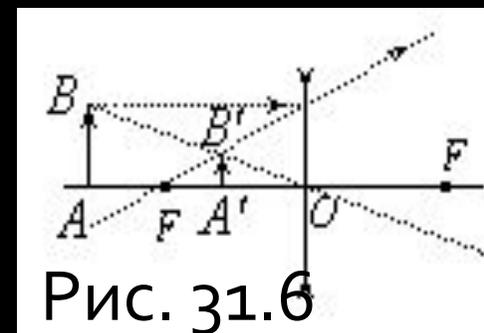
Пусть малый объект АВ (рисунок 6) изображается положительной линзой. Построение можно выполнить при помощи параксиальных пучков. Поскольку доказано, что они, будучи испущены точкой предмета, пройдя линзу, вновь соберутся в точке. Для построения изображения точки достаточно определить ход каких-либо двух лучей, испущенных этой точкой. Наиболее простое построение выполняется при помощи лучей, указанных на рисунке 5. АВ

Один из них - луч, параллельный главной оптической оси, после линзы проходит через точку заднего фокуса  $F$ , другой луч  $BOB'$ , идущий вдоль побочной оптической оси, не преломляется линзой. Наконец третий луч из точки  $B$  проходит через передний фокус



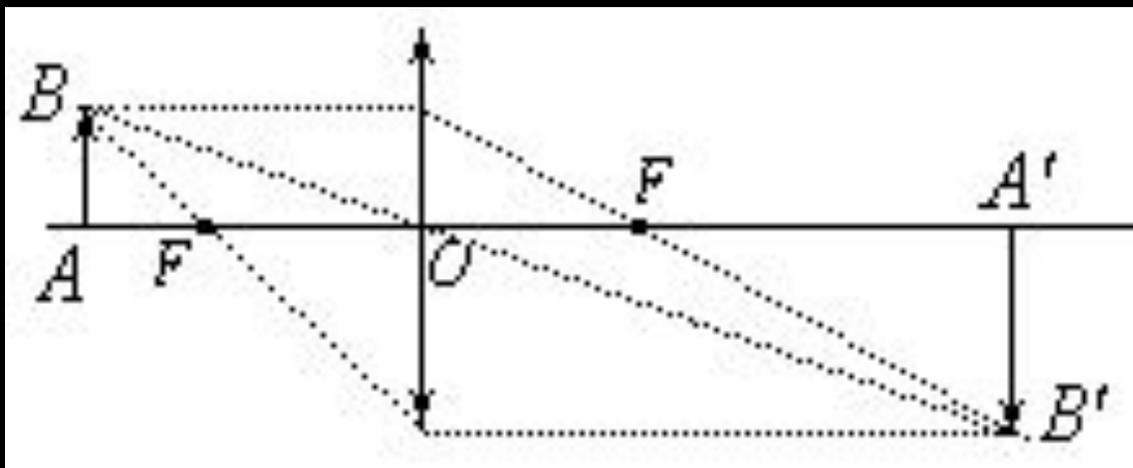
и, преломляясь линзой пойдет за ней параллельно главной оптической оси. Построение этих лучей выполняется без затруднений, а точка пересечения их определит точку  $B'$ , сопряженную с точкой  $B$ . В данном случае получается действительное перевернутое увеличенное изображение предмета .

На рисунке 6 показано построение изображения, даваемого отрицательной линзой. В этом случае луч, испущенный точкой  $B$  параллельно главной оптической оси, отклоняется линзой вверх. Его мысленное продолжение в обратную сторону проходит через передний фокус. Точка пересечения этого продолжения с лучом вдоль побочной оптической оси даст изображение точки  $B$ . В этом случае изображение оказалось мнимым, неперевернутым, уменьшенным.



**Увеличения, даваемые линзой** - это отношения параметров изображения к соответствующим параметрам изображаемого предмета. При этом различается несколько увеличений. **Поперечное увеличение** - Это отношение размера изображения в направлении, перпендикулярном главной оптической оси к соответствующему размеру предмета. Из подобия треугольников на рисунке 6 и формулы линзы получим:

$$\Gamma_{\perp} = \frac{x_{S'}}{x_S} = \frac{f}{x_S + f} \quad (31.21)$$



При использовании этой формулы необходимо учитывать знаки  $x_{S'}$  и  $x_S$ . Если предмет находится слева от линзы, то  $x_S$  — отрицательно. Знак  $\Gamma_{\perp}$  также имеет смысл. Отрицательное значение  $\Gamma_{\perp}$  означает, что изображение перевернуто.

Предположим, что предмет сместился по главной оптической оси на некоторое расстояние  $\Delta x_S$ . Это вызовет смещение его изображения на расстояние  $\Delta x_{S'}$ . Отношение смещения изображения и предмета вдоль главной оптической оси называется **продольным увеличением линзы**. Продольное увеличение - это отношение расстояний от линзы до изображения и от линзы до предмета:

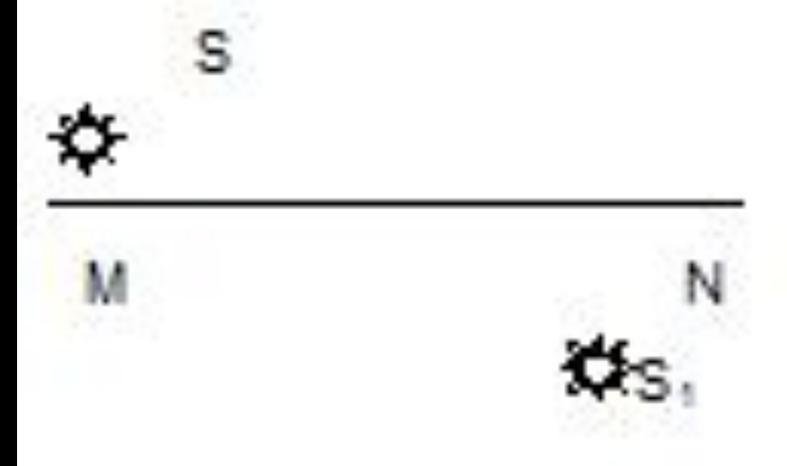
$$\Gamma_{\parallel} = \frac{|\Delta x_{S'}|}{|\Delta x_S|} = \frac{dx_{S'}}{dx_S} = \frac{d}{dx_S} \left( \frac{x_S f}{f + x_S} \right) = \frac{f^2}{(f + x_S)^2} = \Gamma_{\perp}^2 \quad (31.22)$$

Продольное увеличение всегда положительно. Это означает, что знаки смещений предмета и изображения одинаковы: предмет сдвинули вправо и его изображение сдвинется вправо.

*Угловое увеличение* - это отношение угла, под которым видно изображение, к углу, под которым виден предмет с расстояния наилучшего зрения, которое принимается равным 250 мм.

Поскольку речь идет о малых углах, то такие углы приблизительно равны их синусам или тангенсам. Поэтому угловое увеличение иногда определяется как отношение тангенсов или синусов углов под которыми видны изображение предмета и сам предмет.

1. На рисунке  $S$  – точечный источник света,  $S_1$  – его изображение. Определить построением положение оптического центра линзы и каждого из его главных фокусов, если главной оптической осью линзы является прямая  $MN$ .



2. Собирающая линза даёт в три раза увеличенное действительное изображение предмета. Чтобы получить в три раза увеличенное, но мнимое изображение, линзу передвинули в сторону предмета на  $a = 10$  см. Каково фокусное расстояние линзы?