Анализ сетей массового обслуживания с положительными и отрицательными заявками

Задачи:

- Описание сети массового обслуживания с положительными и отрицательными заявками
- Вывод системы РДУ
- Исследование и применение метода многомерных производящих функции
- Получение выражения для многомерной производящей функции
- Расчет примера

Вывод системы РДУ

$$\frac{dP(k,t)}{dt} = -\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_{0i}^{+} + \lambda_{0i}^{-} + \mu_i\right]P(k,t) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\lambda_{0i}^{+}u(k_i(t))P(k - I_i, t) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_{0i}^{-} + \mu_i\left(p_{i0} + \sum_{j=1}^{n}p_{ij}^{-}\left(1 - u\left(k_j(t)\right)\right)\right)\right]P(k + I_i, t) +$$

$$+\sum_{i,\,j=1}^{n}\mu_i\left[p_{ij}^{+}u\left(k_j(t)\right)P\left(k + I_i - I_j, t\right) + p_{ij}^{-}P\left(k + I_i + I_j, t\right)\right].$$

Исследование и применение метода многомерных производящих функции

$$\Psi_n(z,t)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=0}^{\infty}P(k,t)\prod_{i=1}^{n}z_i^{k_i}\ .$$

$$\Psi_n(z,t)=a_0(t)\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_{0i}^{+}z_it\right\}\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_ip_{i0}+\lambda_{0i}^{-}}{z_i}t\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\mu_ip_{ij}^{+}\frac{z_j}{z_i}t\right\}\exp\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\mu_ip_{ij}^{-}\frac{1}{z_iz_j}t\right\}\prod_{l=1}^{n}z_l^{\alpha_l}\ ,$$

$$a_0(t)=\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_{0i}^{+}+\lambda_{0i}^{-}+\mu_i\right)t\right\}.$$

Выражение для производящей функции

$$\Psi_n(z,t)=a_0(t)\sum_{l_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{l_n=0}^{\infty}\sum_{q_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{q_n=0}^{\infty}\sum_{r_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\sum_{u_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{u_n=0}^{\infty}t^{\sum_{i=1}^{n}(l_i+q_i+r_i+u_i)}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\left(\lambda_{0i}^{+}\right)^{l_n}\left(\mu_i p_{i0}+\lambda_{0i}^{-}\right)^{q_i}\mu_i^{r_i+u_i}\left(\prod_{j=1}^{n}p_{ij}^{+}\right)^{r_i}\left(\prod_{j=1}^{n}p_{ij}^{-}\right)^{u_i}}{l_i!\,q_i!\,r_i!\,u_i!}z_i^{\alpha_i+l_i-q_i-r_i+R-u_i-U}\right]$$

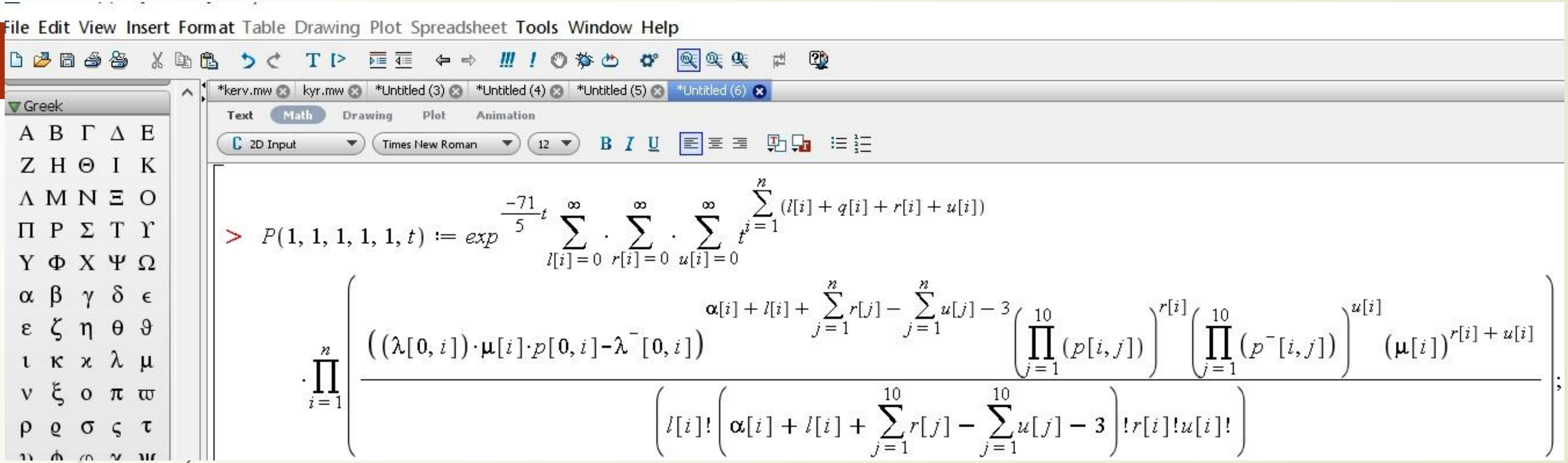
Расчет примера

Пример. Пусть количество СМО в сети $n = 5$. Интенсивности входного потока положительных и отрицательных заявок λ_{0i}^{+} и λ_{0i}^{-} равны соответственно: $\lambda_{01}^{+} = 2$, $\lambda_{02}^{+} = 3$, $\lambda_{03}^{+} = 2$, $\lambda_{04}^{+} = 4$, $\lambda_{05}^{+} = 5$, $\lambda_{01}^{-} = 1$, $\lambda_{02}^{-} = \lambda_{03}^{-} = \lambda_{04}^{-} = 0$, $\lambda_{05}^{-} = 1$. Интенсивности обслуживания заявок μ_i равны $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 2$, $\mu_4 = 1$, $\mu_5 = 3$. Пусть также вероятности p_{0i}^{+}, с которыми положительная заявка направляется в СМО S_i, равны $p_{01}^{+} = 2/15$, $p_{02}^{+} = 1/5$, $p_{03}^{+} = 1/15$, $p_{04}^{+} = 4/15$, $p_{05}^{+} = 1/3$, а аналогичные вероятности для отрицательных заявок равны $p_{01}^{-} = 1/3$, $p_{02}^{-} = p_{03}^{-} = p_{04}^{-} = 0$, $p_{05}^{-} = 2/3$. Вероятности p_{ij}^{+} того, что положительные заявки, обслуженные в СМО S_i, направятся в СМО S_j как положительные заявки, равны: $p_{12}^{+} = p_{13}^{+} = p_{14}^{+} = p_{21}^{+} = p_{23}^{+} = p_{24}^{+} = p_{31}^{+} = p_{32}^{+} = p_{34}^{+} = 1/3$, $p_{41}^{+} = p_{42}^{+} = p_{43}^{+} = p_{45}^{+} = 1/4$,

Расчет примера

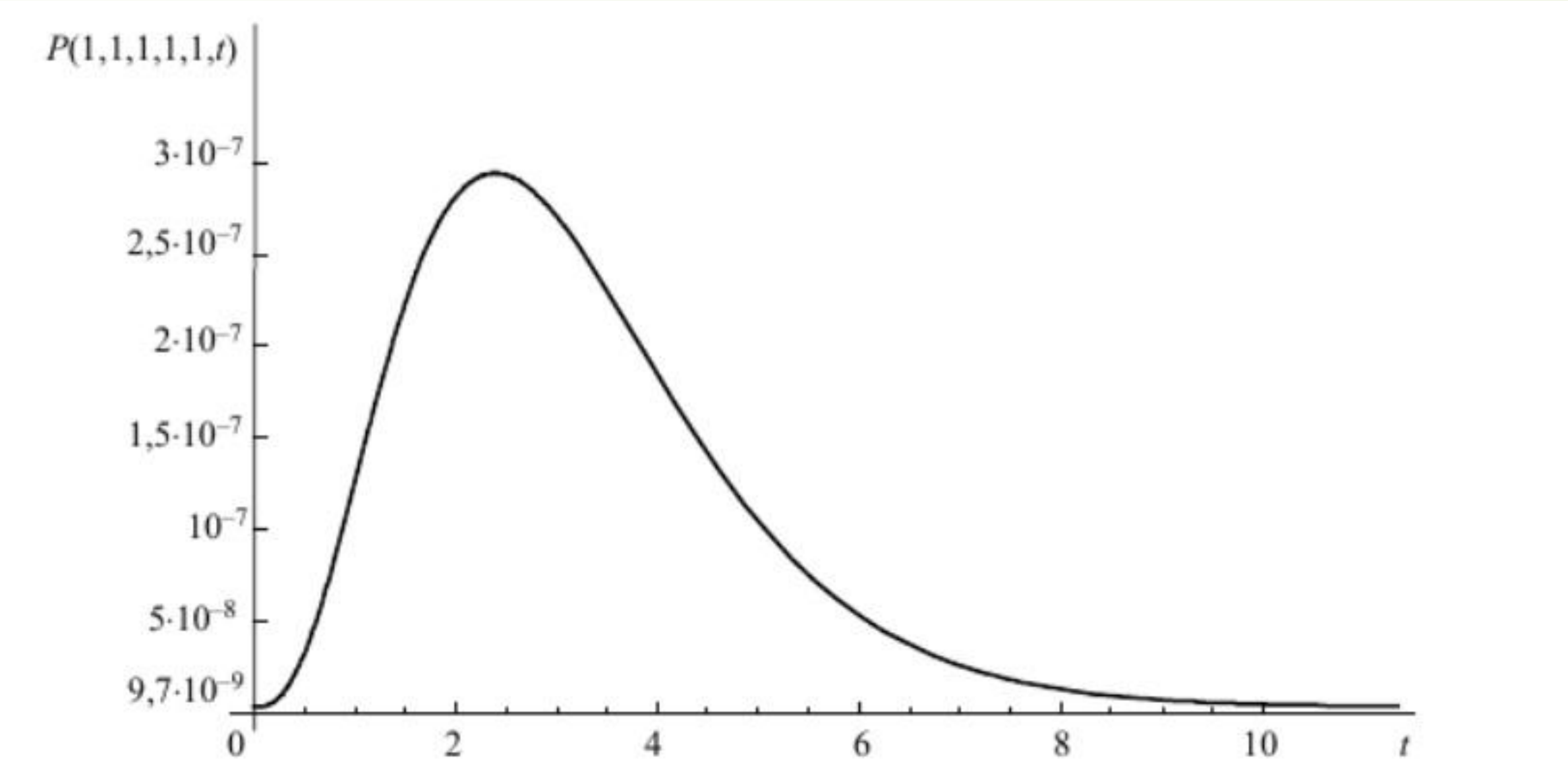
$$P(1,1,1,1,1,t)=e^{-\frac{71}{5}t}\sum_{l_1=0}^{\infty}\dots\sum_{l_n=0}^{\infty}\sum_{r_1=0}^{\infty}\dots\sum_{r_n=0}^{\infty}\sum_{u_1=0}^{\infty}\dots\sum_{u_n=0}^{\infty}t^{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+2l_i)+n(R-U-1)}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\lambda_{0i}^{+\,l_n}p_{0i}^{+\,l_1}\left(\mu_i p_{i0}^{+}+\lambda_{0i}^{-}p_{0i}^{-}\right)^{\alpha_i+l_i+\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}r_j-\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}u_j-1}\mu_i^{r_i+u_i}\left(\prod\limits_{j=1}^{n}p_{ij}^{+}\right)^{r_i}\left(\prod\limits_{j=1}^{n}p_{ij}^{-}\right)^{u_i}}{l_i!\left(\alpha_i+l_i+\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}r_j-\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}u_j-1\right)!r_i!\mathrm{u}_i!}\right],\ n=5$$



Далее подставляем значения в формулу и считаем

Расчет примера



Заключение

- В работе предложена методика нахождения нестационарных вероятностей состояний сети МО с однолинейными СМО, положительными и отрицательными заявками, основанная на использовании аппарата многомерных производящих функции. Получены приближенные выражения для вероятностей состоянии в условиях высокой нагрузки. Дальнейшие исследования в этом направлении связаны с получением аналогичных результатов для сетей с многолинейными СМО