

# Анализ сетей массового обслуживания с положительными и отрицательными заявками



# Задачи:

- Описание сети массового обслуживания с положительными и отрицательными заявками
- Вывод системы РДУ
- Исследование и применение метода многомерных производящих функции
- Получение выражения для многомерной производящей функции
- Расчет примера

# Вывод системы РДУ

$$\begin{aligned} \frac{dP(k,t)}{dt} = & - \sum_{i=1}^n [\lambda_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- + \mu_i] P(k,t) + \\ & + \sum_{i=1}^n \lambda_{0i}^+ u(k_i(t)) P(k - I_i, t) + \\ & + \sum_{i=1}^n \left[ \lambda_{0i}^- + \mu_i \left( p_{i0} + \sum_{j=1}^n p_{ij}^- (1 - u(k_j(t))) \right) \right] P(k + I_i, t) + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \mu_i \left[ p_{ij}^+ u(k_j(t)) P(k + I_i - I_j, t) + p_{ij}^- P(k + I_i + I_j, t) \right]. \end{aligned}$$

# Исследование и применение метода многомерных производящих функции

$$\Psi_n(z, t) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} P(k, t) \prod_{i=1}^n z_i^{k_i}.$$

$$\Psi_n(z, t) = a_0(t) \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_{0i}^+ z_i t \right\} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i p_{i0} + \lambda_{0i}^-}{z_i} t \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \sum_{i,j=1}^n \mu_i p_{ij}^+ \frac{z_j}{z_i} t \right\} \exp \left\{ \sum_{i,j=1}^n \mu_i p_{ij}^- \frac{1}{z_i z_j} t \right\} \prod_{l=1}^n z_l^{\alpha_l},$$

$$a_0(t) = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n (\lambda_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- + \mu_i) t \right\}.$$

## Выражение для производящей функции

$$\Psi_n(z, t) = a_0(t) \sum_{l_1=0}^{\infty} \dots \sum_{l_n=0}^{\infty} \sum_{q_1=0}^{\infty} \dots \sum_{q_n=0}^{\infty} \sum_{r_1=0}^{\infty} \dots \sum_{r_n=0}^{\infty} \sum_{u_1=0}^{\infty} \dots \sum_{u_n=0}^{\infty} t^{\sum_{i=1}^n (l_i + q_i + r_i + u_i)} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^n \left[ \frac{(\lambda_{0i}^+)^{l_i} (\mu_i p_{i0} + \lambda_{0i}^-)^{q_i} \mu_i^{r_i + u_i} \left( \prod_{j=1}^n p_{ij}^+ \right)^{r_i} \left( \prod_{j=1}^n p_{ij}^- \right)^{u_i}}{l_i! q_i! r_i! u_i!} z_i^{\alpha_i + l_i - q_i - r_i + R - u_i - U} \right]$$

# Расчет примера

**Пример.** Пусть количество СМО в сети  $n = 5$ . Интенсивности входного потока положительных и отрицательных заявок  $\lambda_{0i}^+$  и  $\lambda_{0i}^-$  равны соответственно:  $\lambda_{01}^+ = 2$ ,  $\lambda_{02}^+ = 3$ ,  $\lambda_{03}^+ = 2$ ,  $\lambda_{04}^+ = 4$ ,  $\lambda_{05}^+ = 5$ ,  $\lambda_{01}^- = 1$ ,  $\lambda_{02}^- = \lambda_{03}^- = \lambda_{04}^- = 0$ ,  $\lambda_{05}^- = 1$ . Интенсивности обслуживания заявок  $\mu_i$  равны  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 2$ ,  $\mu_4 = 1$ ,  $\mu_5 = 3$ . Пусть также вероятности  $p_{0i}^+$ , с которыми положительная заявка направляется в СМО  $S_i$ , равны  $p_{01}^+ = 2/15$ ,  $p_{02}^+ = 1/5$ ,  $p_{03}^+ = 1/15$ ,  $p_{04}^+ = 4/15$ ,  $p_{05}^+ = 1/3$ , а аналогичные вероятности для отрицательных заявок равны  $p_{01}^- = 1/3$ ,  $p_{02}^- = p_{03}^- = p_{04}^- = 0$ ,  $p_{05}^- = 2/3$ . Вероятности  $p_{ij}^+$  того, что положительные заявки, обслуженные в СМО  $S_i$ , направляются в СМО  $S_j$  как положительные заявки, равны:  $p_{12}^+ = p_{13}^+ = p_{14}^+ = p_{21}^+ = p_{23}^+ = p_{24}^+ = p_{31}^+ = p_{32}^+ = p_{34}^+ = 1/3$ ,  $p_{41}^+ = p_{42}^+ = p_{43}^+ = p_{45}^+ = 1/4$ ,

# Расчет примера

$$P(1,1,1,1,1,t) = e^{-\frac{71}{5}t} \sum_{l_1=0}^{\infty} \dots \sum_{l_n=0}^{\infty} \sum_{r_1=0}^{\infty} \dots \sum_{r_n=0}^{\infty} \sum_{u_1=0}^{\infty} \dots \sum_{u_n=0}^{\infty} t^{\sum_{i=1}^n (\alpha_i + 2l_i) + n(R-U-1)} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^n \left[ \frac{\lambda_{0i}^{+l_i} p_{0i}^{+l_i} (\mu_i p_{i0}^{+} + \lambda_{0i}^{-} p_{0i}^{-})^{\alpha_i + l_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n r_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n u_j - 1} \mu_i^{r_i + u_i} \left( \prod_{j=1}^n p_{ij}^{+} \right)^{r_i} \left( \prod_{j=1}^n p_{ij}^{-} \right)^{u_i}}{l_i! \left( \alpha_i + l_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n r_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n u_j - 1 \right)! r_i! u_i!} \right], \quad n = 5$$

File Edit View Insert Format Table Drawing Plot Spreadsheet Tools Window Help

\*kerv.mw kyr.mw \*Untitled (3) \*Untitled (4) \*Untitled (5) \*Untitled (6)

Text Math Drawing Plot Animation

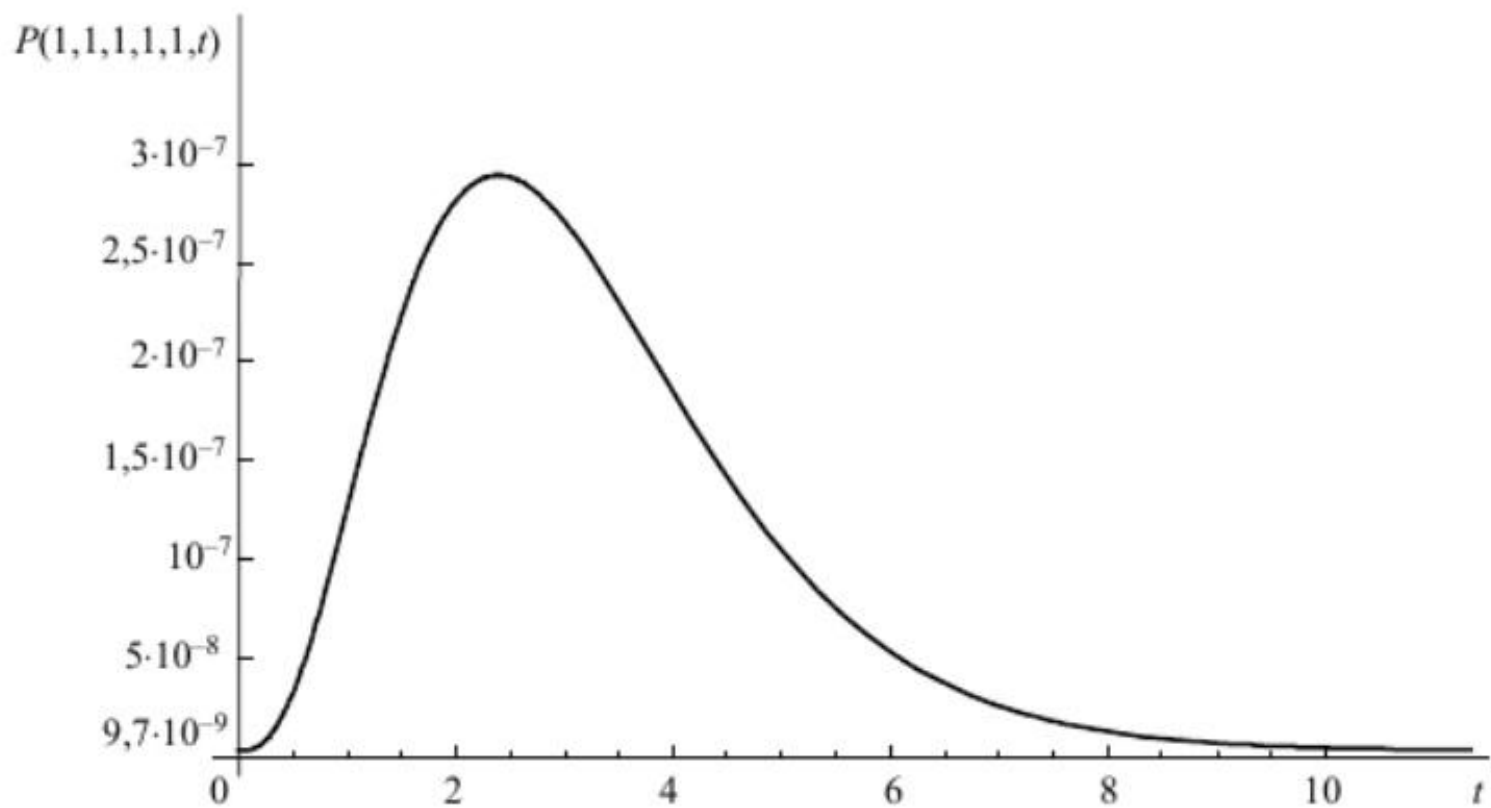
2D Input Times New Roman 12 B I U

$$\begin{aligned}
 &> P(1, 1, 1, 1, 1, t) := \exp\left(\frac{-71}{5}t\right) \sum_{l[i]=0}^{\infty} \cdot \sum_{r[i]=0}^{\infty} \cdot \sum_{u[i]=0}^{\infty} t^{\sum_{i=1}^n (l[i] + q[i] + r[i] + u[i])} \\
 &\cdot \prod_{i=1}^n \left( \frac{((\lambda[0, i]) \cdot \mu[i] \cdot p[0, i] - \lambda^{-}[0, i])^{\alpha[i] + l[i] + \sum_{j=1}^n r[j] - \sum_{j=1}^n u[j] - 3} \left(\prod_{j=1}^{10} (p[i, j])\right)^{r[i]} \left(\prod_{j=1}^{10} (p^{-}[i, j])\right)^{u[i]} (\mu[i])^{r[i] + u[i]}}{l[i]! \left(\alpha[i] + l[i] + \sum_{j=1}^{10} r[j] - \sum_{j=1}^{10} u[j] - 3\right)! r[i]! u[i]!} \right);
 \end{aligned}$$

Далее подставляем значения в формулу и считаем



# Расчет примера





# Заключение

- В работе предложена методика нахождения нестационарных вероятностей состояний сети МО с однолинейными СМО, положительными и отрицательными заявками, основанная на использовании аппарата многомерных производящих функции. Получены приближенные выражения для вероятностей состояний в условиях высокой нагрузки. Дальнейшие исследования в этом направлении связаны с получением аналогичных результатов для сетей с многолинейными СМО
- 