Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ижевский государственный технический университет
имени М. Т. Калашникова»

Кафедра «Программное обеспечение»

Курс «Дискретная математика»

Тема «Множества и отношения»

Автор Макарова О.Л.

Ижевск
2013

Вопросы

- **Множества**
  1. Основные определения
  2. Алгебра множеств
  3. Представление множеств

Множества. Основные определения

- *Множество* - это совокупность определенных различимых объектов, для каждого из которых можно установить, принадлежит этот объект данному множеству или нет. Различимые объекты называются *элементами множества*.

Обозначения «наивной» теории множеств

$a \in A$ - элемент a принадлежит множеству A

$a \notin A$ - элемент a не принадлежит A

Множества. Основные определения

Способы задания множеств

- прямым перечислением всех элементов $A = \{a, b, c, \ldots, z\}$

  множество простых чисел, не превосходящих 10: $\{2, 3, 5, 7\}$;

  множество всех месяцев года : { *январь, февраль, … , декабрь* };

  множество всех натуральных чисел: $\mathbb{N} = \{1,2,3, \ldots\}$.

- характеристическим предикатом $A = \{a \mid P(a)\}$

  множество целых степеней двойки: $S_2 = \{s \mid s = 2^k, k \in \mathbb{N}\}$;

  множество четных чисел: { *x* | *x* – *четно*, $x \in \mathbb{Z}$ }.

- порождающей процедурой $A = \{a \mid a{:=}f\}$

  множество однозначных чисел: N_1 = { *n* | **for** *n*:= 1 **to** 9 **do** *write*(*n*); };

  множество чисел Фибоначчи: $F = \{f_i \mid f_1 = f_2 = 1; f_{n+2} = f_n + f_{n+1}, i \in \mathbb{N}\}$.

Множества. Основные определения

- *Универсальное множество* или *универсум* есть множество U, состоящее из элементов всех рассматриваемых множеств.

Пример: *Пусть* $A = \{ 1, 3, 5 \}$, $D = \{ 2, 3, 8 \}$, $N = \{ 4 \}$.

Тогда $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 8 \}$.

- *Пустое множество* – это множество без элементов.

$$\varnothing = \{ \}$$

- *Семейство* - множество, элементами которого являются множества.

Пример: *Пусть* $A = \{ 1, 3, 5 \}$, $D = \{ 2, 3, 8 \}$.

Тогда $N = \{ A, D, 5 \} = \{ \{ 1 ,3 ,5 \}, \{ 2 ,3 ,8 \}, 5 \}$.

Множества. Основные определения

- ***Мультимножество*** – совокупность элементов, в которые элементы входят по нескольку раз.

  расписание занятий – один и тот же предмет повторяется несколько раз;

  штатное расписание – одна и та же должность повторяется несколько раз.

<u>Обозначения:</u>

$X = \langle \underbrace{a, \dots, a}_{n_1};\ \underbrace{b, \dots, b}_{n_2};\ \dots;\ \underbrace{z, \dots, z}_{n_k} \rangle = [a^{n1}, b^{n2}, \dots, z^{nk}]$ – *мультимножество*

$A = \{a, b, c, \dots, z\}$ – *носитель* мультимножества

$n_1, n_2, \dots, n_k$ – *показатели* элементов мультимножества

<u>Пример:</u>

Пусть $A = \{a, b, c\}$. *Тогда* $X = [a^0, b^3, c^4] = \langle b, b, b; c, c, c, c \rangle$

Сравнение множеств

- *Множество A* является *подмножеством* множества *B*, если любой элемент множества *A* принадлежит множеству *B*

$$A \subset B \iff (x \in A) \Rightarrow (x \in B).$$

Говорят: множество *A* *содержится* в множестве *B* (множество *B* *включает* множество *A*).

- *Два множества равны*, если они являются подмножествами друг друга

$$A = B \iff A \subset B \text{ и } B \subset A$$

Свойства: 1. $\forall A\ (A \subset A)$;

2. $\forall A, B\ ((A \subset B \text{ и } B \subset A) \Rightarrow (A = B))$;

3. $\forall A, B, C\ ((A \subset B \text{ и } B \subset C) \Rightarrow (A \subset C))$.

Мощность множеств. Сравнение мощностей

- Множество A называется ***собственным*** подмножеством множества B, если $A \subset B$ и $A \neq B$.
- ***Равномощными*** называются множества, между элементами которых можно установить *взаимно-однозначное соответствие*, т.е. $|A| = |B| \Leftrightarrow A \sim B$.

<u>Пример:</u> *Пусть* $\mathbb{N}$ *- множество натуральных чисел,*

N_2 *- множество четных натуральных чисел. Очевидно,* $N_2 \subset \mathbb{N}$ *и* $N_2 \neq \mathbb{N}$.

$$\left.\begin{array}{lcccccc} \mathbb{N}: & 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ N_2: & 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n & \ldots \end{array}\right] \Rightarrow \mathbb{N} \sim N_2 \text{ или } |\mathbb{N}| = |N_2|.$$

<u>Свойства:</u> 1. $\forall A\ (|A| = |A|)$;

2. $\forall A, B\ (|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A|)$;

3. $\forall A, B, C\ ((|A| = |B| \text{ и } |B| = |C|) \Rightarrow (|A| = |C|))$.

Мощность множеств. Сравнение мощностей

- *Конечным* называется такое множество A, у которого не существует равномощного собственного подмножества, т.е.

$$\forall B\ ((\ B \subset A\ \text{ и }\ |B| =\ |A|) \Rightarrow (\ B = A\ ))$$

<u>Обозначение:</u> $|A| < \infty$

- *Бесконечным* называется такое множество, которое равномощно некоторому своему собственному подмножеству, т.е.

$$\exists B\ (\ B \subset A\ \text{ и }\ |B| =\ |A|\ \text{ и }\ B \neq A\ )$$

<u>Обозначение:</u> $|A| = \infty$

Множества. Алгебра множеств

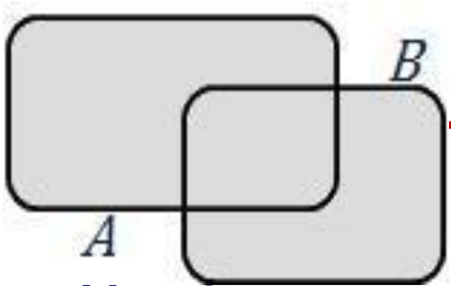
Операции над множествами

- *Объединение* $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ или } x \in B \}$
- *Пересечение* $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \in B \}$
- *Разность* $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \notin B \}$
- *Симметрическая разность*

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

- *Дополнение* $\overline{A} = \{ x \mid x \notin A \} = U \setminus A$, где U – универсум.

Объединение

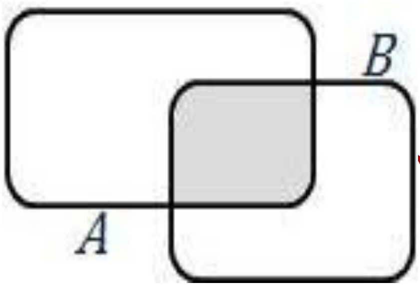


\- $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ или } x \in B \}$

Свойства

- *Идемпотентность* $A \cup A = A$
- *Коммутативность* $A \cup B = B \cup A$
- *Ассоциативность* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$
- *свойство нуля* $A \cup \varnothing = A$
- *свойство единицы* $A \cup U = U$

Пересечение



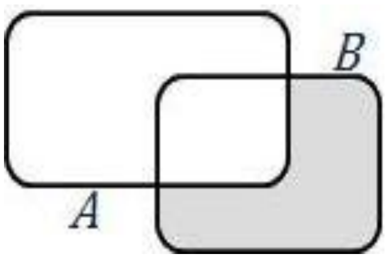
$\cap B = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$

Свойства

- *идемпотентность* $A \cap A = A$
- *коммутативность* $A \cap B = B \cap A$
- *ассоциативность* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
- *свойство нуля* $A \cap \varnothing = \varnothing$
- *свойство единицы* $A \cap U = A$

Множества. Алгебра множеств

Разность

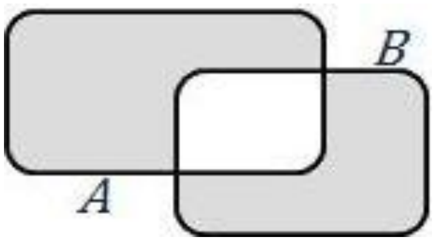


$B \setminus A = \{ x \mid x \in B \text{ и } x \notin A \}$

<u>Свойства</u>

- *свойства нуля* $A \setminus \varnothing = A \quad \varnothing \setminus A = \varnothing$
- *свойства единицы* $A \setminus U = \varnothing \quad U \setminus A = \overline{A}$

Симметрическая разность



$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Свойства

- *коммутативность* $A \Delta B = B \Delta A$
- *Ассоциативность* $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C = A \Delta B \Delta C$
- *свойство нуля* $A \Delta \varnothing = A$
- *свойство единицы* $A \Delta U = A$

Разбиения. Покрытия

- Семейство множеств $F = \{ F_i \}$ называется *покрытием* множества B, если для любого элемента множества B найдется подмножество F_i, которому он принадлежит, т.е.

$$\forall\, x \in B\ (\ \exists F_i\ (x \in F_i))$$

- Покрытие называется *разбиением* множества B, если :
  1. $\forall i\ \ (F_i \subset B)$
  2. $\forall\ i,j\ \ (i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j = \varnothing)$, т.е. никакие два подмножества покрытия не пересекаются

Пример: Пусть $A = \{1, 2, 3\}$. Тогда

$\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}$ – покрытие множества A, но не разбиение;

$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ – разбиение множества A;

$\{\{\varnothing\}, \{1\}, \{3\}\}$ - не является ни покрытием, ни разбиением.

Булеан

- *Булеаном* множества A называется множество всех подмножеств множества A и обозначается как 2^A или $P(A)$.

  Обозначение: $2^A = P(A) = \{ B \mid B \subset A \}$

Теорема: Если множество A - конечно, то $|2^A| = 2^{|A|}$.

Пример:

Если $A = \{ 1, 2, 3 \}$, то

$2^A = \{ \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$.

Если $A = \varnothing$, то

$|2^A| = 2^{|A|} = 2^1 = 2$, т.е. $2^A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Множества. Алгебра множеств

- *Алгебра множеств* – множество всех подмножеств множества U с операциями пересечения, объединения, разности и дополнения.

  Обозначение: $2^U = \langle U; \ \cap, \cup, \setminus, \neg \rangle$

  U – носитель алгебры

  $\{ \cap, \cup, \setminus, \neg \}$ – сигнатура алгебры

Законы алгебры множеств

- Дистрибутивный $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Закон поглощения $(A \cap B) \cup A = A$

  $(A \cup B) \cap A = A$
- Законы де Моргана $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

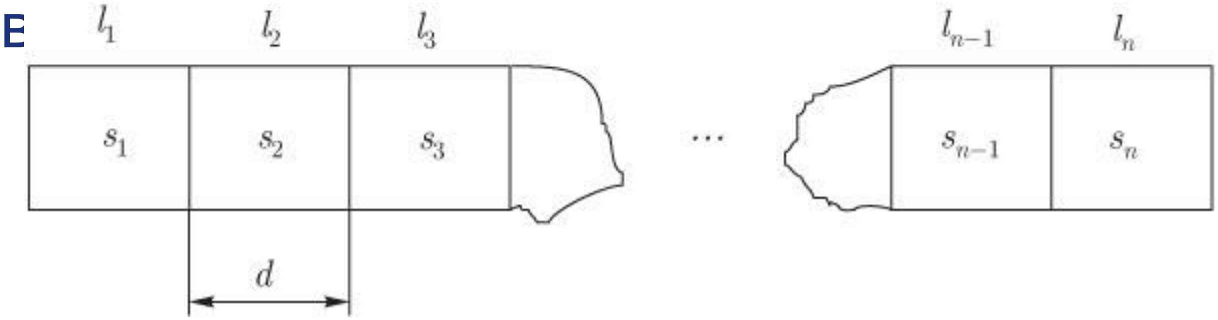
  $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- Выражение для разности $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- Закон двойного отрицания $A = \overline{\overline{A}}$

Представление множеств

- Массив
- Связанный список
- Двоичный вектор

Представление множеств

- *Массив* – простейшее представление конечного множеств



Плюсы:

прямой доступ к любому элементу ($l_i = l_1 + (i - 1)d$)

Минусы:

количество элементов ограничено размером массива;

время поиска элемента определяется размером массива;

для хранения массива необходимо выделять память;

более сложная реализация операций над множествами (изменение/удаление элемента влечет перемещение многих элементов).

Представление множеств

- *Характеристический вектор* – разновидность последовательного распределения

Длина вектора – мощность универсума $|U|$

Пример: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$

$P = \{2, 3, 5, 7\}$ – множество простых чисел

$v_p = (0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0)$ – вектор множества P

Плюсы:

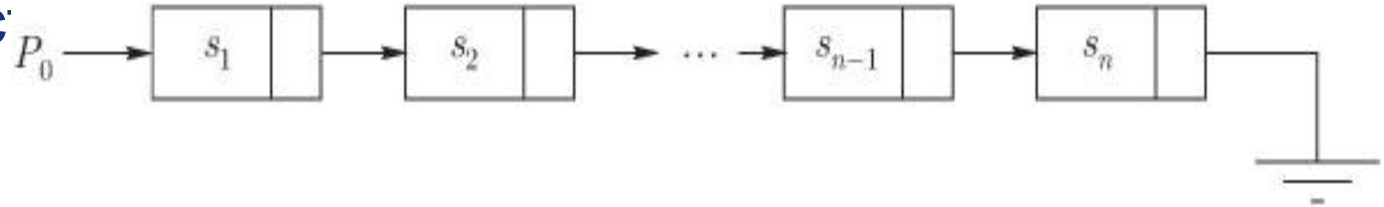
легко изменять список (место каждого элемента известно)

Минусы:

ограниченность количества элементов множества;
необходимость упорядочивания элементов множества;
неэкономичность в случае «*редкого*» распределения.

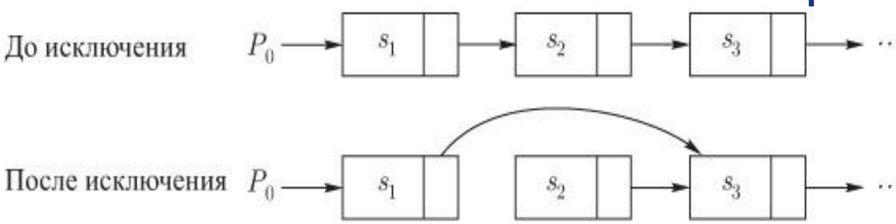
Представление множеств

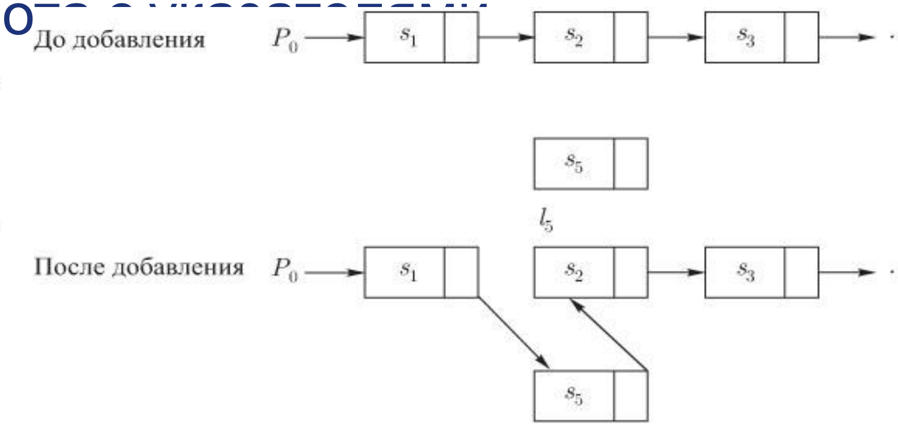
• *Список* – более гибкое представление конечного множес



Плюсы:

легко изменять список – рабо





Минусы:

приходится тратить память на указатели;
количество элементов списка ограничено размером оперативной памяти;
время поиска определяется длиной списка.

Применение множеств

- Словари (справочники)
- Хэш – таблицы (системы представителей)
- Очереди с приоритетами (задачи планирования)
- Базы данных (знаний)

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ