

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Ижевский государственный технический университет
имени М. Т. Калашникова»



Кафедра «Программное обеспечение»

Курс «Дискретная математика»

Тема «Множества и отношения»

Автор Макарова О.Л.

- **Множества**
 1. Основные определения
 2. Алгебра множеств
 3. Представление множеств

Множества. Основные определения

- *Множество* - это совокупность определенных различных объектов, для каждого из которых можно установить, принадлежит этот объект данному множеству или нет. Различные объекты называются *элементами множества*.

Обозначения «наивной» теории множеств

$a \in A$ - элемент a принадлежит множеству A

$a \notin A$ - элемент a не принадлежит A

Множества. Основные определения

Способы задания множеств

- прямым перечислением всех элементов $A = \{a, b, c, \dots, z\}$
множество простых чисел, не превосходящих 10: $\{2, 3, 5, 7\}$;
множество всех месяцев года: $\{\text{январь}, \text{февраль}, \dots, \text{декабрь}\}$;
множество всех натуральных чисел: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- характеристическим предикатом $A = \{a \mid P(a)\}$
множество целых степеней двойки: $S_2 = \{s \mid s = 2^k, k \in \mathbb{N}\}$;
множество четных чисел: $\{x \mid x - \text{четно}, x \in \mathbb{Z}\}$.
- порождающей процедурой $A = \{a \mid a := f\}$
множество однозначных чисел: $N_1 = \{n \mid \text{for } n := 1 \text{ to } 9 \text{ do write}(n); \}$;
множество чисел Фибоначчи: $F = \{f_i \mid f_1 = f_2 = 1; f_{n+2} = f_n + f_{n+1}, i \in \mathbb{N}\}$.

Множества. Основные определения

- *Универсальное множество* или *универсум* есть множество U , состоящее из элементов всех рассматриваемых множеств.

Пример: Пусть $A = \{ 1, 3, 5 \}$, $D = \{ 2, 3, 8 \}$, $N = \{ 4 \}$.

Тогда $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 8 \}$.

- *Пустое множество* – это множество без элементов.

$$\emptyset = \{ \}$$

- *Семейство* - множество, элементами которого являются множества.

Пример: Пусть $A = \{ 1, 3, 5 \}$, $D = \{ 2, 3, 8 \}$.

Тогда $N = \{ A, D, 5 \} = \{ \{ 1, 3, 5 \}, \{ 2, 3, 8 \}, 5 \}$.

Множества. Основные определения

- **Мультимножество** – совокупность элементов, в которые элементы входят по несколько раз.

*расписание занятий – один и тот же предмет повторяется несколько раз;
штатное расписание – одна и та же должность повторяется несколько раз.*

Обозначения:

$X = \langle \underbrace{a, \dots, a}_{n_1}; \underbrace{b, \dots, b}_{n_2}; \dots; \underbrace{z, \dots, z}_{n_k} \rangle = [a^{n_1}, b^{n_2}, \dots, z^{n_k}]$ – мультимножество

$A = \{a, b, c, \dots, z\}$ – носитель мультимножества

n_1, n_2, \dots, n_k – показатели элементов мультимножества

Пример:

Пусть $A = \{a, b, c\}$. Тогда $X = [a^0, b^3, c^4] = \langle b, b, b; c, c, c, c \rangle$

Сравнение множеств

- *Множество A является подмножеством* множества B , если любой элемент множества A принадлежит множеству B

$$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A) \Rightarrow (x \in B).$$

Говорят: множество A *содержится* в множестве B
(множество B *включает* множество A).

- *Два множества равны,* если они являются подмножествами друг друга

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ и } B \subset A$$

Свойства:

1. $\forall A (A \subset A)$;
2. $\forall A, B ((A \subset B \text{ и } B \subset A) \Rightarrow (A = B))$;
3. $\forall A, B, C ((A \subset B \text{ и } B \subset C) \Rightarrow (A \subset C))$.

Множества. Алгебра множеств

Мощность множеств. Сравнение мощностей

- Множество A называется *собственным* подмножеством множества B , если $A \subset B$ и $A \neq B$.
- *Равномощными* называются множества, между элементами которых можно установить *взаимно-однозначное соответствие*, т.е. $|A| = |B| \Leftrightarrow A \sim B$.

Пример: Пусть \mathbb{N} - множество натуральных чисел,

N_2 - множество четных натуральных чисел. Очевидно, $N_2 \subset \mathbb{N}$ и $N_2 \neq \mathbb{N}$.

\mathbb{N} :	1	2	3	...	n	...
	↓	↓	↓	⇒	↓	
N_2 :	2	4	6	...	2n	...

или $|\mathbb{N}| = |N_2|$.

- Свойства:
1. $\forall A (|A| = |A|)$;
 2. $\forall A, B (|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A|)$;
 3. $\forall A, B, C ((|A| = |B| \text{ и } |B| = |C|) \Rightarrow (|A| = |C|))$.

Мощность множеств. Сравнение мощностей

- **Конечным** называется такое множество A , у которого не существует равномощного собственного подмножества, т.е.

$$\forall B ((B \subset A \text{ и } |B| = |A|) \Rightarrow (B = A))$$

Обозначение: $|A| < \infty$

- **Бесконечным** называется такое множество, которое равномощно некоторому своему собственному подмножеству, т.е.

$$\exists B (B \subset A \text{ и } |B| = |A| \text{ и } B \neq A)$$

Обозначение: $|A| = \infty$

Операции над множествами

- Объединение $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$

- Пересечение $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$

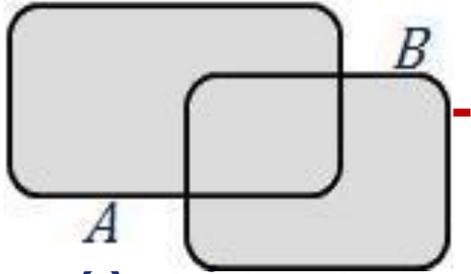
- Разность $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$

- Симметрическая разность

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

- Дополнение $A = \{x \mid x \notin A\} = U \setminus A$, где U – универсум.

Объединение

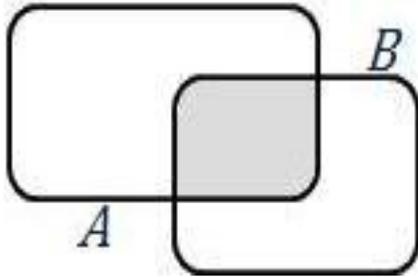


$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$

СВОЙСТВА

- *Идемпотентность* $A \cup A = A$
- *Коммутативность* $A \cup B = B \cup A$
- *Ассоциативность* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$
- *свойство нуля* $A \cup \emptyset = A$
- *свойство единицы* $A \cup U = U$

Пересечение

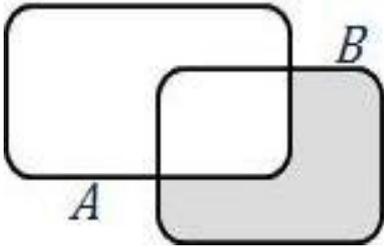


$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

Свойства

- *идемпотентность* $A \cap A = A$
- *коммутативность* $A \cap B = B \cap A$
- *ассоциативность* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
- *свойство нуля* $A \cap \emptyset = \emptyset$
- *свойство единицы* $A \cap U = A$

Разность



$$B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ и } x \notin A\}$$

Свойства

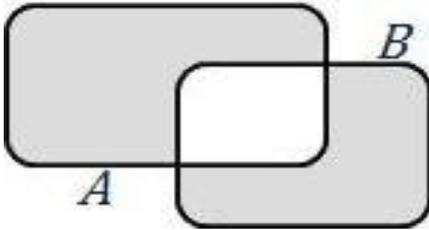
- *свойства нуля*

$$A \setminus \emptyset = A \quad \emptyset \setminus A = \emptyset$$

- *свойства единицы*

$$A \setminus U = \emptyset \quad U \setminus A = A \quad \text{—}$$

Симметрическая разность



$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Свойства

- коммутативность $A \Delta B = B \Delta A$
- Ассоциативность $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C = A \Delta B \Delta C$
- свойство нуля $A \Delta \emptyset = A$ —
- свойство единицы $A \Delta U = A$

Разбиения. Покрытия

- Семейство множеств $F = \{ F_i \}$ называется *покрытием* множества B , если для любого элемента множества B найдется подмножество F_i , которому он принадлежит, т.е.
$$\forall x \in B (\exists F_i (x \in F_i))$$
- Покрытие называется *разбиением* множества B , если :
 - $\forall i (F_i \subset B)$
 - $\forall i, j (i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j = \emptyset)$, т.е. никакие два подмножества покрытия не пересекаются

Пример: Пусть $A = \{1, 2, 3\}$. Тогда

$\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}$ – покрытие множества A , но не разбиение;

$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ – разбиение множества A ;

$\{\{\emptyset\}, \{1\}, \{3\}\}$ - не является ни покрытием, ни разбиением.

Булеан

- **Булеаном** множества A называется множество всех подмножеств множества A и обозначается как 2^A или $P(A)$.

Обозначение: $2^A = P(A) = \{ B \mid B \subset A \}$

□ **Теорема:** Если множество A - конечно, то $|2^A| = 2^{|A|}$.

Пример:

Если $A = \{ 1, 2, 3 \}$, то

$$2^A = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}.$$

Если $A = \emptyset$, то

$$|2^A| = 2^{|A|} = 2^1 = 2, \text{ т.е. } 2^A = \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}.$$

- *Алгебра множеств* – множество всех подмножеств множества U с операциями пересечения, объединения, разности и дополнения.

Обозначение: $2^U = \langle U; \cap, \cup, \setminus, \neg \rangle$

U – носитель алгебры

$\{ \cap, \cup, \setminus, \neg \}$ – сигнатура алгебры

Множества. Алгебра множеств

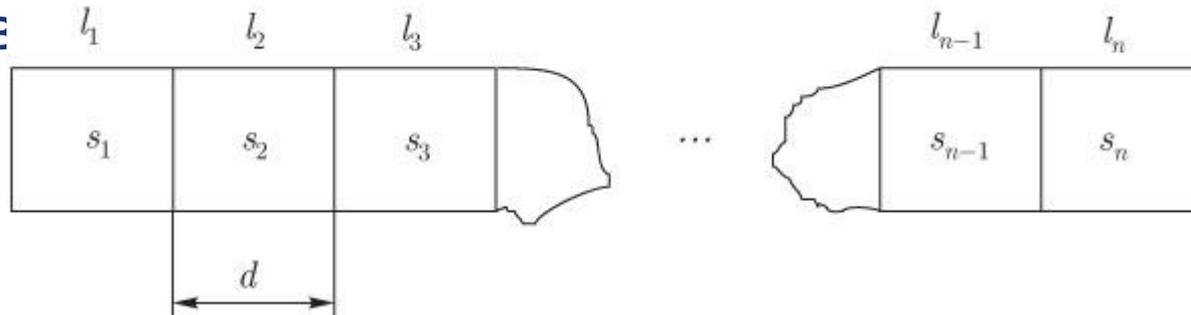
Законы алгебры множеств

- Дистрибутивный $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Закон поглощения $(A \cap B) \cup A = A$
 $(A \cup B) \cap A = A$
- Законы де Моргана $(A \cup B) = \overline{A \cap B}$ — —
 $(A \cap B) = \overline{A \cup B}$ — —
- Выражение для разности $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- Закон двойного отрицания $A = \overline{\overline{A}}$

- Массив
- Связанный список
- Двоичный вектор

Представление множеств

- **Массив** – простейшее представление конечного множества



Плюсы:

прямой доступ к любому элементу ($l_i = l_1 + (i - 1)d$)

Минусы:

количество элементов ограничено размером массива;
время поиска элемента определяется размером массива;

для хранения массива необходимо выделять память;
более сложная реализация операций над множествами (изменение/удаление элемента влечет перемещение многих элементов).

Представление множеств

- *Характеристический вектор* – разновидность последовательного распределения

Длина вектора – мощность универсума $|U|$

Пример: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$

$P = \{2, 3, 5, 7\}$ – множество простых чисел

$v_p = (0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$ – вектор множества P

Плюсы:

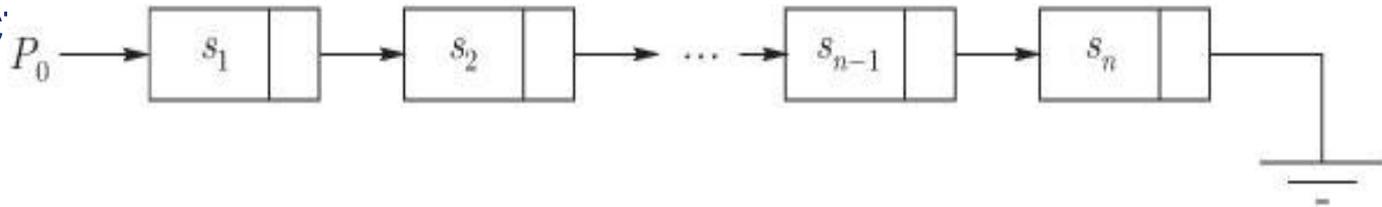
легко изменять список (место каждого элемента известно)

Минусы:

ограниченность количества элементов множества;
необходимость упорядочивания элементов множества;
неэкономичность в случае «редкого» распределения.

Представление множеств

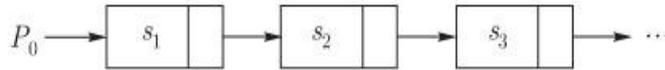
- **Список** – более гибкое представление конечного множества



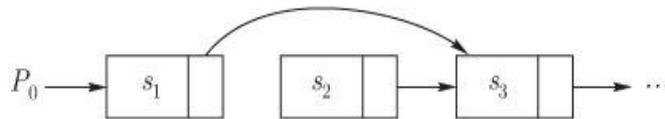
Плюсы:

легко изменять список – работа

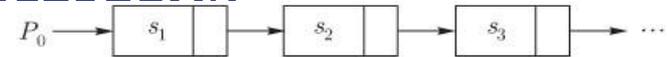
До исключения



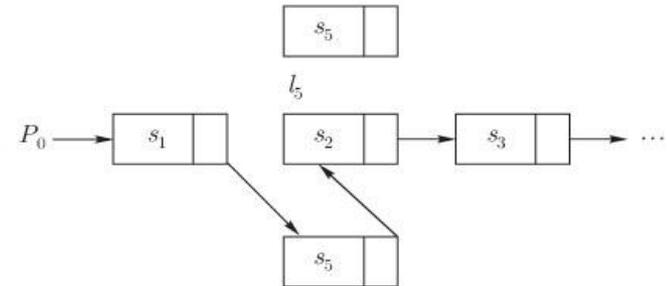
После исключения



До добавления



После добавления



Минусы:

приходится тратить память на указатели;
количество элементов списка ограничено размером оперативной памяти;
время поиска определяется длиной списка.

- Словари (справочники)
- Хэш – таблицы (системы представителей)
- Очереди с приоритетами (задачи планирования)
- Базы данных (знаний)

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

© ФГБОУ ВПО ИжГТУ имени М.Т. Калашникова, 2013

© Макарова Ольга Леонидовна, 2013