Элементы нелинейного функциональног о анализа

Глава 2.
Гладкие многообразия

§ 1. Топологическое пространство и непрерывное отображение

1. Определение топологического пространства. Пусть X — множество произвольной природы и $\tau = \{U\}$ — совокупность его подмножеств, обладающая следующими свойствами:

1) $\varnothing, X \in \tau$;

2) объединение любой совокупности множеств из τ принадлежит τ;

3) пересечение любого конечного числа множеств из τ принадлежит τ.

Такая совокупность подмножеств τ называется *топологией* на X. Множество X с заданной на нем топологией τ называется *топологическим пространством* и обозначается (X, τ), подмножества из совокупности τ называются *открытыми* (в пространстве (X, τ)).

Пример 1. X — числовая прямая $\mathbb{R}^1$. Топологию на $\mathbb{R}^1$ можно задать следующим набором подмножеств: пустое множество $\varnothing$, всевозможные интервалы и их объединения $U = \bigcup\limits_{\alpha} (a_\alpha, b_\alpha)$ (проверьте!).

Пример 2. $X = \mathbb{R}^2$. Открытым множеством назовем всякое множество в $X = \mathbb{R}^2$, которое вместе с каждой своей точкой содержит достаточно малый открытый круг с центром в этой точке, а также пустое множество. Легко проверить, что система всех открытых множеств в $X = \mathbb{R}^2$ образует топологию.

Пример 3. X — произвольное множество. Совокупность $\tau_0 = \{\varnothing, X\}$ задает топологию на X (проверьте!).

Пример 4. X — произвольное множество, $\tau_1 = \{$всевозможные подмножества из $X\}$. Совокупность τ — топология на X (проверьте!).

Топология τ_1 называется *максимальной* или *дискретной*, а топология τ_0 — *минимальной* или *тривиальной*. Таким образом, на одном и том же множестве можно ввести различные топологии, например тривиальную и дискретную.

С понятием открытого множества в топологическом пространстве (X, τ) тесно связано двойственное понятие *замкнутого множества*: так называют множество, дополнение которого открыто. Таким образом, если $U \in \tau$, то $X \setminus U$ замкнуто, и обратно: если F замкнуто, то $X \setminus F$ открыто.

Упражнение 1°. Проверьте, что следующие множества замкнуты: отрезок $[a, b]$ в $\mathbb{R}^1$ с топологией примера 1; замкнутый круг в $\mathbb{R}^2$ с топологией примера 2.

2. Непрерывное отображение. Гомеоморфизм. Обсудим теперь определение непрерывного отображения топологических пространств.

Пусть (X, τ), (Y, σ) — два топологических пространства с топологиями τ, σ соответственно. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение множеств.

Определение. Говорят, что f — *непрерывное отображение* топологических пространств, если полный прообраз $f^{-1}(V)$ любого открытого множества V пространства (Y, σ) является открытым множеством пространства (X, τ).

Если $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ — отображения топологических пространств, то естественно определяется суперпозиция $gf: X \to Z$ по правилу $(gf): x \mapsto g(f(x))$.

Теорема. *Если f, g непрерывны, то и gf непрерывно.*

Доказательство легко следует из замечания

$$(gf)^{-1}(W) = f^{-1}\left(g^{-1}(W)\right),$$

где $W \subset Z$ — произвольное множество.

Определение. Два топологических пространства, (X, τ), (Y, σ), называются *гомеоморфными*, если существует отображение $f: X \to Y$, удовлетворяющее условиям: 1) $f: X \to Y$ — биективное отображение; 2) f непрерывно; 3) f^{-1} непрерывно.

Отображение f в этом случае называется ***гомеоморфизмом.***

Подпространство топологического пространства. Как видно из предыдущего, подмножества метрических и топологических пространств часто рассматриваются как самостоятельные объекты. При этом подмножество Y метрического пространства X естественно наследует метрику из X. Определим теперь понятие наследственной топологии на подмножестве Y, когда X — топологическое пространство.

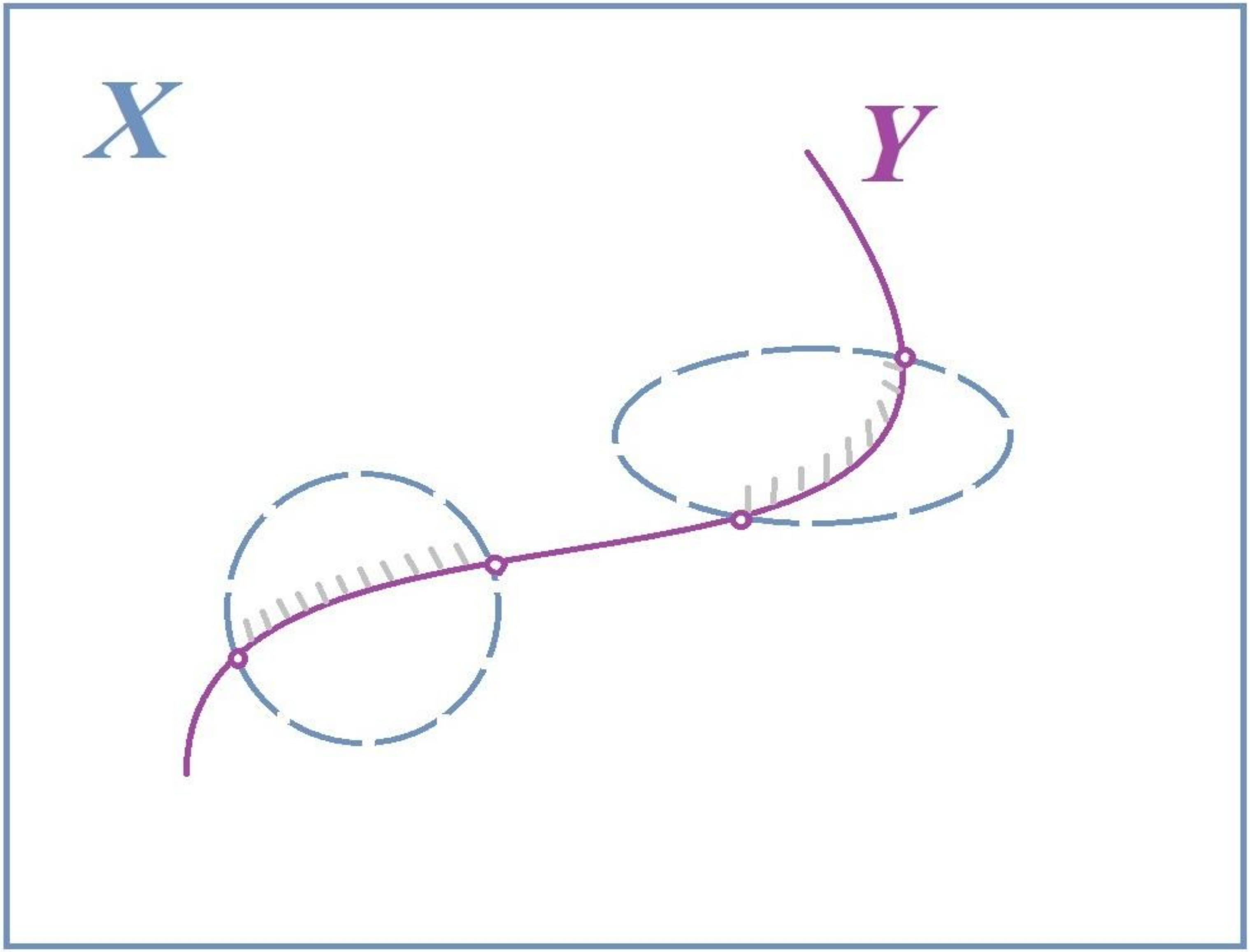
Пусть (X, τ) — топологическое пространство, $Y \subset X$ — подмножество в X. Рассмотрим систему подмножеств множества Y

$$\tau_Y = \{V: V = U \cap Y, U \in \tau\}.$$

Теорема. *Система τ_Y является топологией на Y.*

Доказательство предлагается провести читателю (оно очевидно).

Топология τ_Y называется *индуцированной* или *наследственной топологией* из X. Пространство (Y, τ_Y) называется *подпространством* пространства (X, τ).

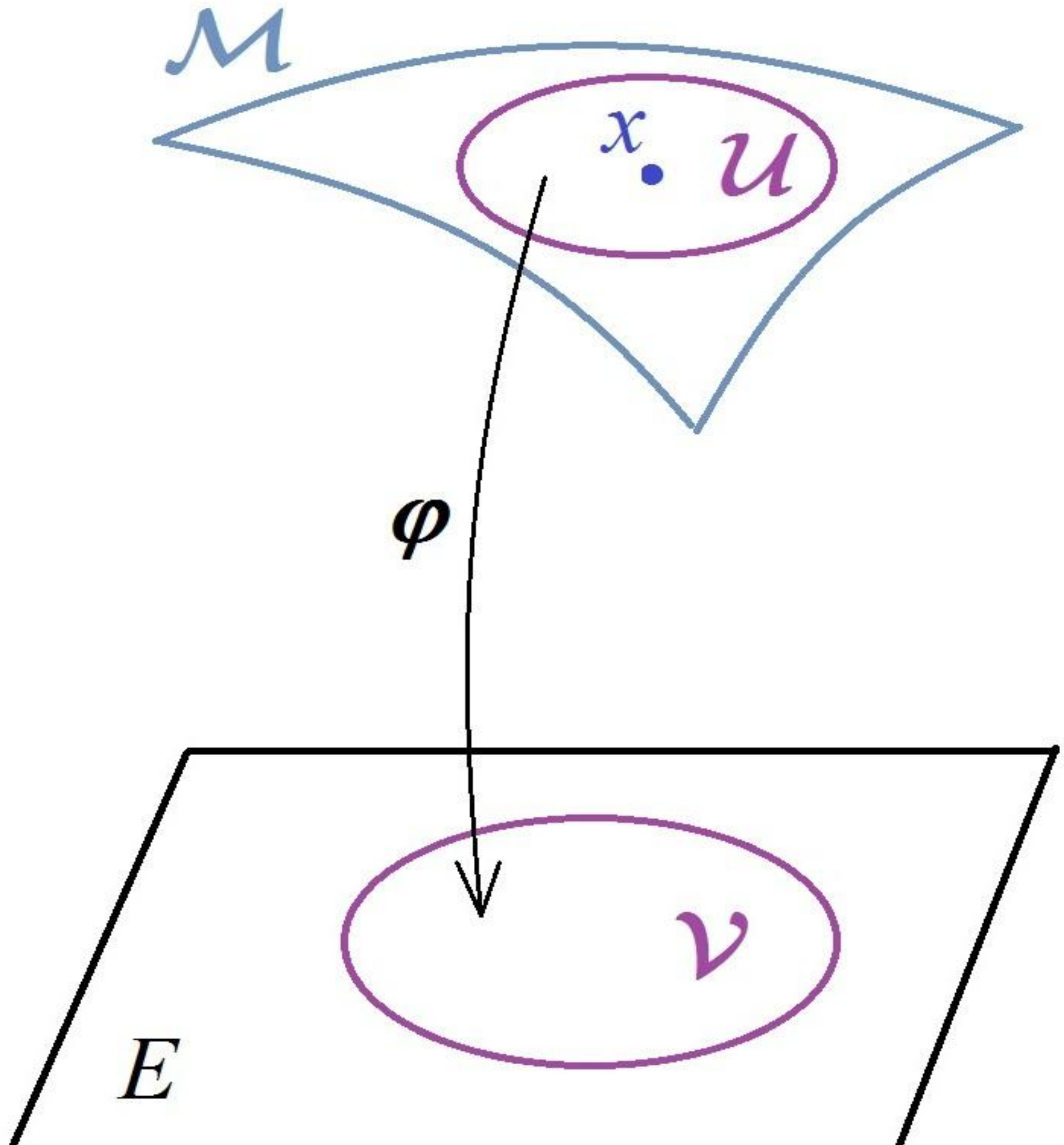

X
Y

§ 2. Определение гладкого многообразия

1. Топологические многообразия

Пусть M – топологическое пространство (ТП), E – банахово пространство (БП).

И пусть для каждой точки $x \in M$ существуют окрестность U (то есть открытое в ТП M множество, содержащее точку x), открытое в E множество $V \subset E$ и гомеоморфизм $\varphi : U \to V$ (другими словами, для каждой точки $x \in M$ существует окрестность U, гомеоморфная некоторому открытому множеству $V \subset E$).



$\mathcal{M}$
x
$\mathcal{U}$
φ
$\mathcal{V}$
E

Тогда ТП M называется ***топологическим многообразием (ТМ)***, а БП E – ***модельным пространством*** многообразия M.

Пара (U, φ) называется ***картой*** точки x.

Набор карт (конечный или счетный) $\{(U_i, \varphi_i)\}$ называется ***атласом*** многообразия M, если $\bigcup_i U_i = M$ (то есть если совокупность множеств $\{U_i\}$ является ***открытым покрытием*** многообразия M).

Таким образом, если на M задан атлас $\{(U_i, \varphi_i)\}$, то для каждой точки $x \in M$ найдется окрестность U_i, гомеоморфная открытому множеству $V_i = \varphi_i(U_i) \subset E$.

Если БП E конечномерно и $\dim E = n$, то ТМ M называется n–мерным и обозначается M^n.

Если БП E бесконечномерно, то ТМ M называется ***бесконечномерным*** или ***банаховым***.

Рассмотрим **частный случай**: $E = \mathbb{R}^n$ (то есть $\dim M = n$). Пусть точке $x \in M^n$ соответствует карта (U_i, φ_i). Тогда $\varphi_i(x) \in \mathbb{R}^n$ и $\varphi_i(x) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Координаты $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ называются ***локальными координатами*** точки x в карте (U_i, φ_i).

2. Гладкие многообразия

Пусть $\{(U_i, \varphi_i)\}$ – атлас многообразия M.

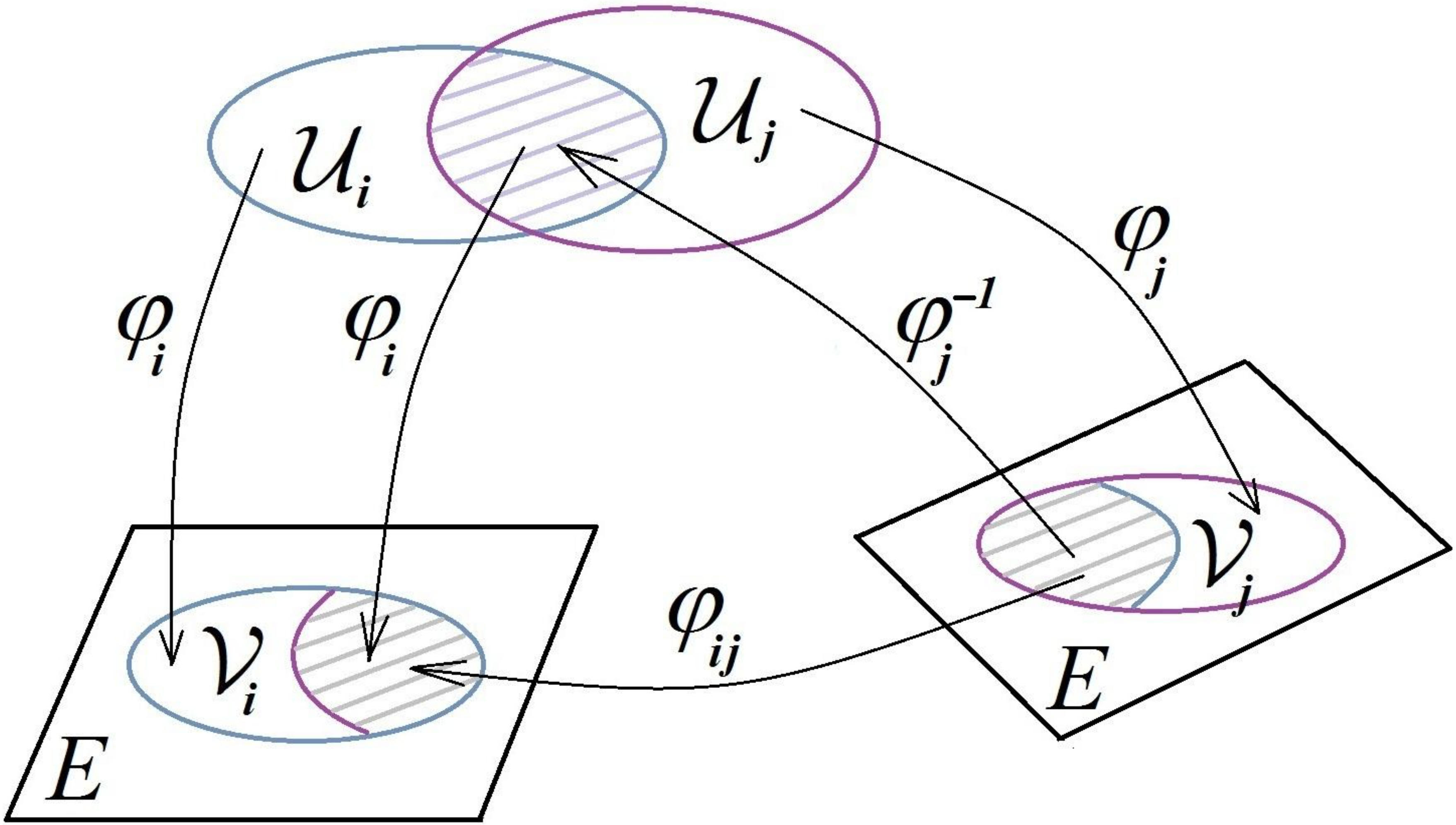
Карты (U_i, φ_i) и (U_j, φ_j) называются C^r – ***согласованными*** $(r \geq 1)$, если выполняется одно из следующих двух условий :

1) $U_i \bigcap U_j = \varnothing$;

2) $U_i \bigcap U_j \neq \varnothing$ и отображение

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \colon \varphi_j(U_i \bigcap U_j) \to \varphi_i(U_i \bigcap U_j)$$

является C^r – диффеоморфизмом.



$\mathcal{U}_i$
$\mathcal{U}_j$
φ_i
φ_i
φ_j^{-1}
φ_j
$\mathcal{V}_i$
$\mathcal{V}_j$
φ_{ij}
E
E

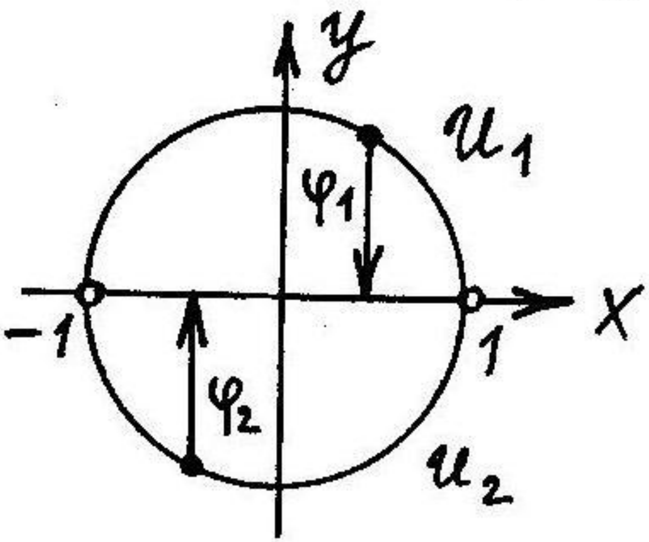
Отображение $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i \bigcap U_j) \to \varphi_i(U_i \bigcap U_j)$ называется ***функцией перехода*** (или ***отображением перехода***) от карты (U_j, φ_j) к карте (U_i, φ_i).

Атлас, каждые две карты которого являются C^r – согласованными $(r \geq 1)$, называется C^r – ***атласом.***

Топологическое многообразие, атлас которого является C^r – атласом, называется C^r – ***многообразием*** или ***гладким многообразием класса*** C^r.

§ 3. Два способа задания атласа на окружности

<u>1-й способ</u>. Рассм-м окружность S^1 единичного радиуса с центром в т. $O(0,0)$; $x^2+y^2=1$ – ур-е окруж-ти.

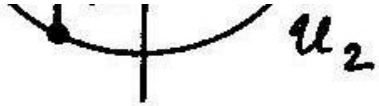


$U_1=\{(x,y)\in S^1: y>0\}$,

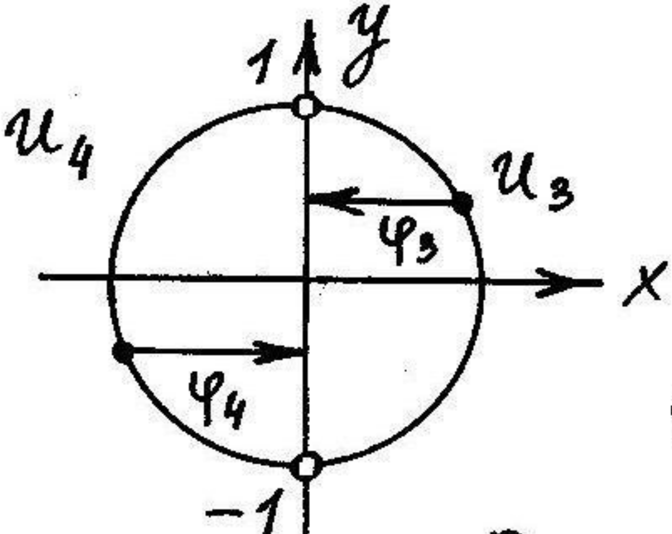
$U_2=\{(x,y)\in S^1: y<0\}$,

$U_3=\{(x,y)\in S^1: x>0\}$,

$U_4=\{(x,y)\in S^1: x<0\}$.



$$U_3 = \{(x,y)\in S^1 : x>0\},$$
$$U_4 = \{(x,y)\in S^1 : x<0\}.$$



Мн-ва U_i — открытые в ТП S^1 (в смысле индуцированной топологии).

Рассм-м карту (U_1, φ_1).

Рассм-м карту $(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$.

Отобр-е $\varphi_1 : \mathcal{U}_1 \longrightarrow V_1 = (-1, 1) \subset \mathbb{R}^1$;

$\varphi_1 : (x, y) \longmapsto x$:

а) φ_1 – биективное от-е;

б) φ_1 – непр. от-е, т.к. $\varphi_1 = \Pi_1 \big|_{\mathcal{U}_1}$, где π_1 – проекция $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^1$,

$$\pi_1 : (x, y) \longmapsto x;$$

в) обратное от-е $\varphi_1^{-1} : V_1 \to U_1$,

$\varphi_1^{-1}(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$ – непр-но, т.к.

$\psi_1^1(x) = x$ и $\psi_1^2(x) = \sqrt{1-x^2}$ – непр. ф-ции

на $(-1, 1)$.

След-но, $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ – гомеоморфизм.

Карта $(\mathcal{U}_2, \varphi_2)$: $\varphi_2 : \mathcal{U}_2 \longrightarrow V_2 = V_1$,

$\varphi_2(x, y) = x$, $\varphi_2^{-1}(x) = (x, -\sqrt{1-x^2})$.

Карта $(\mathcal{U}_3, \varphi_3)$: $\varphi_3 : \mathcal{U}_3 \longrightarrow V_3 = V_1$,

$\varphi_3(x, y) = y$, $\varphi_3^{-1}(y) = (\sqrt{1-y^2}, y)$.

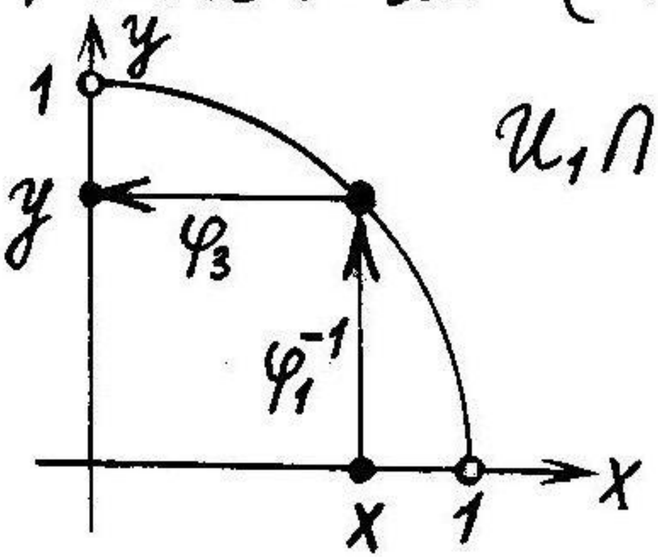
Карта $(\mathcal{U}_4, \varphi_4)$: $\varphi_4 : \mathcal{U}_4 \longrightarrow V_4 = V_1$,

$\varphi_4(x, y) = y$, $\varphi_4^{-1}(y) = (-\sqrt{1-y^2}, y)$.

$\bigcup\limits_{i=1}^{4} \mathcal{U}_i = S^1 \Rightarrow \{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{4}$ – атлас на S^1.

C^2 – согласованность карт.

Рассм-м $(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$ и $(\mathcal{U}_3, \varphi_3)$.



$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_3$

$$\varphi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_3) = (0,1)$$

$$\varphi_3(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_3) = (0,1)$$

$$\varphi_{31} = \varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} : (0,1) \longrightarrow (0,1);$$

$$\varphi_{31} : x \longmapsto y = \sqrt{1-x^2};$$

φ_{31} – класса C^∞;

$(\varphi_{31})^{-1}: y \longmapsto \sqrt{1-y^2}$ — от-е кл. C^∞.

Итак, $\varphi_{31}: \varphi_1(U_1 \cap U_3) \longrightarrow \varphi_3(U_1 \cap U_3)$

— диффеоморфизм кл. C^∞.

Для ост-х пар карт C^∞-согласованность также выполняется (проверьте самост-но!).

След-но, атлас $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=4}^{\infty}$ —

C^∞-атлас.

Литература

Борисович Ю.Г. и др.
«Введение в топологию»