

**Элементы
нелинейного
функциональног
о анализа**

Глава 2.

Гладкие многообразия

§ 1. Топологическое пространство и непрерывное отображение

1. Определение топологического пространства. Пусть X — множество произвольной природы и $\tau = \{U\}$ — совокупность его подмножеств, обладающая следующими свойствами:

- 1) $\emptyset, X \in \tau$;
- 2) объединение любой совокупности множеств из τ принадлежит τ ;
- 3) пересечение любого конечного числа множеств из τ принадлежит τ .

Такая совокупность подмножеств τ называется *топологией* на X . Множество X с заданной на нем топологией τ называется *топологическим пространством* и обозначается (X, τ) , подмножества из совокупности τ называются *открытыми* (в пространстве (X, τ)).

Пример 1. X — числовая прямая \mathbb{R}^1 . Топологию на \mathbb{R}^1 можно задать следующим набором подмножеств: пустое множество \emptyset , всевозможные интервалы и их объединения $U = \bigcup_{\alpha} (a_{\alpha}, b_{\alpha})$ (проверьте!).

Пример 2. $X = \mathbb{R}^2$. Открытым множеством назовем всякое множество в $X = \mathbb{R}^2$, которое вместе с каждой своей точкой содержит достаточно малый открытый круг с центром в этой точке, а также пустое множество. Легко проверить, что система всех открытых множеств в $X = \mathbb{R}^2$ образует топологию.

Пример 3. X — произвольное множество. Совокупность $\tau_0 = \{\emptyset, X\}$ задает топологию на X (проверьте!).

Пример 4. X — произвольное множество, $\tau_1 = \{\text{всевозможные подмножества из } X\}$. Совокупность τ — топология на X (проверьте!).

Топология τ_1 называется *максимальной* или *дискретной*, а топология τ_0 — *минимальной* или *тривиальной*. Таким образом, на одном и том же множестве можно ввести различные топологии, например тривиальную и дискретную.

С понятием открытого множества в топологическом пространстве (X, τ) тесно связано двойственное понятие *замкнутого множества*: так называют множество, дополнение которого открыто. Таким образом, если $U \in \tau$, то $X \setminus U$ замкнуто, и обратно: если F замкнуто, то $X \setminus F$ открыто.

Упражнение 1°. Проверьте, что следующие множества замкнуты: отрезок $[a, b]$ в \mathbb{R}^1 с топологией примера 1; замкнутый круг в \mathbb{R}^2 с топологией примера 2.

2. Непрерывное отображение. Гомеоморфизм. Обсудим теперь определение непрерывного отображения топологических пространств.

Пусть (X, τ) , (Y, σ) — два топологических пространства с топологиями τ , σ соответственно. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение множеств.

Определение. Говорят, что f — *непрерывное отображение* топологических пространств, если полный прообраз $f^{-1}(V)$ любого открытого множества V пространства (Y, σ) является открытым множеством пространства (X, τ) .

Если $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ — отображения топологических пространств, то естественно определяется суперпозиция $gf: X \rightarrow Z$ по правилу $(gf): x \mapsto g(f(x))$.

Теорема. Если f, g непрерывны, то и gf непрерывно.
Доказательство легко следует из замечания

$$(gf)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)),$$

где $W \subset Z$ — произвольное множество.

Определение. Два топологических пространства, (X, τ) , (Y, σ) , называются *гомеоморфными*, если существует отображение $f: X \rightarrow Y$, удовлетворяющее условиям: 1) $f: X \rightarrow Y$ — биективное отображение; 2) f непрерывно; 3) f^{-1} непрерывно.

Отображение f в этом случае называется *гомеоморфизмом*.

Подпространство топологического пространства. Как видно из предыдущего, подмножества метрических и топологических пространств часто рассматриваются как самостоятельные объекты. При этом подмножество Y метрического пространства X естественно наследует метрику из X . Определим теперь понятие наследственной топологии на подмножестве Y , когда X — топологическое пространство.

Пусть (X, τ) — топологическое пространство, $Y \subset X$ — подмножество в X . Рассмотрим систему подмножеств множества Y

$$\tau_Y = \{V: V = U \cap Y, U \in \tau\}.$$

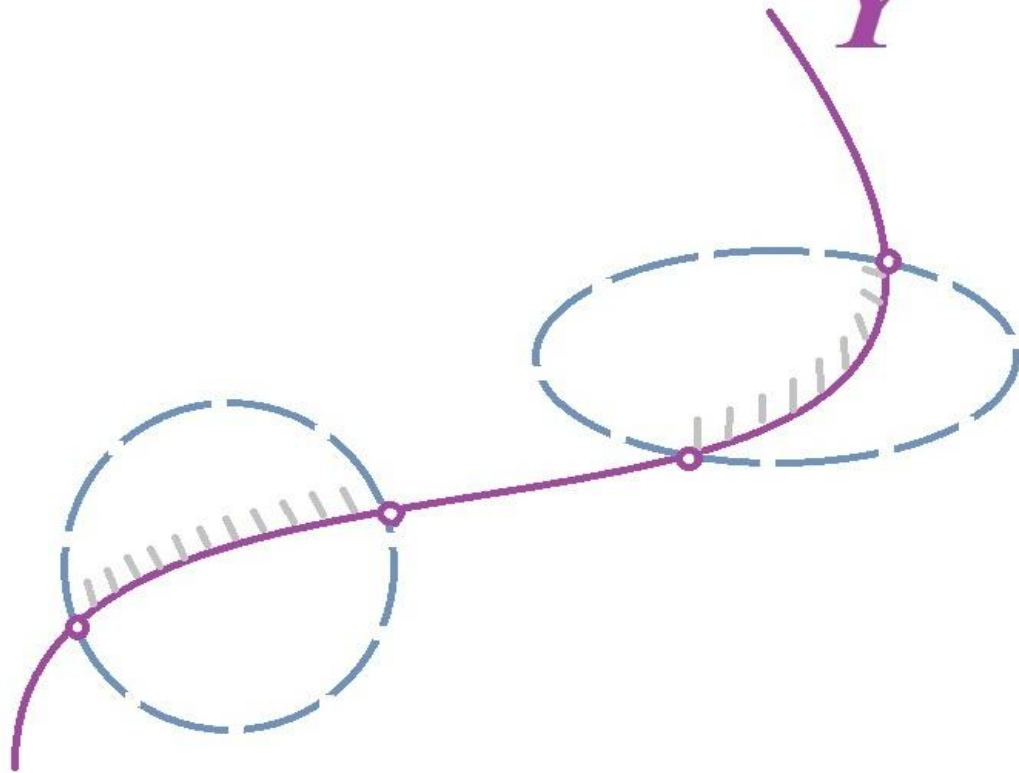
Теорема. Система τ_Y является топологией на Y .

Доказательство предлагается провести читателю (оно очевидно).

Топология τ_Y называется *индуцированной* или *наследственной топологией* из X . Пространство (Y, τ_Y) называется *подпространством* пространства (X, τ) .

X

Y

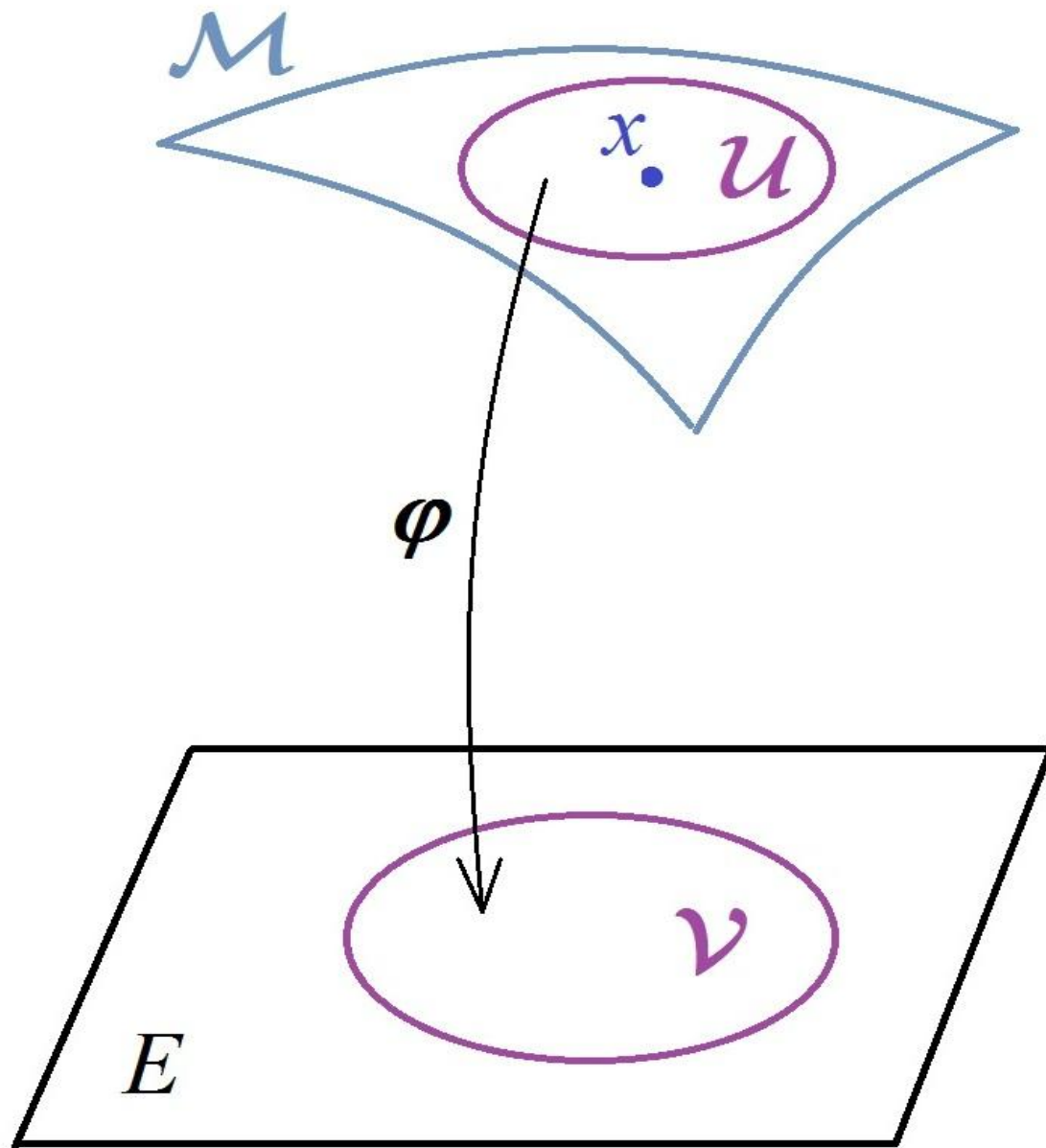


§ 2. Определение гладкого многообразия

1. Топологические многообразия

Пусть M – топологическое пространство (ТП), E – банахово пространство (БП).

И пусть для каждой точки $x \in M$ существуют окрестность U (то есть открытое в ТП M множество, содержащее точку x), открытое в E множество $V \subset E$ и гомеоморфизм $\varphi: U \rightarrow V$ (другими словами, для каждой точки $x \in M$ существует окрестность U , гомеоморфная некоторому открытому множеству $V \subset E$).



Тогда ТП M называется *топологическим многообразием (ТМ)*, а БП E – *модельным пространством* многообразия M .

Пара (U, φ) называется *картой* точки x .

Набор карт (конечный или счетный) $\{(U_i, \varphi_i)\}$ называется *атласом* многообразия M , если $\bigcup_i U_i = M$ (то есть если совокупность множеств $\{U_i\}$ является *открытым покрытием* многообразия M).

Таким образом, если на M задан атлас $\{(U_i, \varphi_i)\}$, то для каждой точки $x \in M$ найдется окрестность U_i , гомеоморфная открытому множеству $V_i = \varphi_i(U_i) \subset E$.

Если БП E конечномерно и $\dim E = n$, то ТМ M называется n -мерным и обозначается M^n .

Если БП E бесконечномерно, то ТМ M называется *бесконечномерным* или *банаховым*.

Рассмотрим **частный случай** : $E = \mathbb{R}^n$ (то есть $\dim M = n$). Пусть точке $x \in M^n$ соответствует карта (U_i, φ_i) . Тогда $\varphi_i(x) \in \mathbb{R}^n$ и $\varphi_i(x) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Координаты $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ называются **локальными координатами** точки x в карте (U_i, φ_i) .

2. Гладкие многообразия

Пусть $\{(U_i, \varphi_i)\}$ – атлас многообразия M .

Карты (U_i, φ_i) и (U_j, φ_j) называются

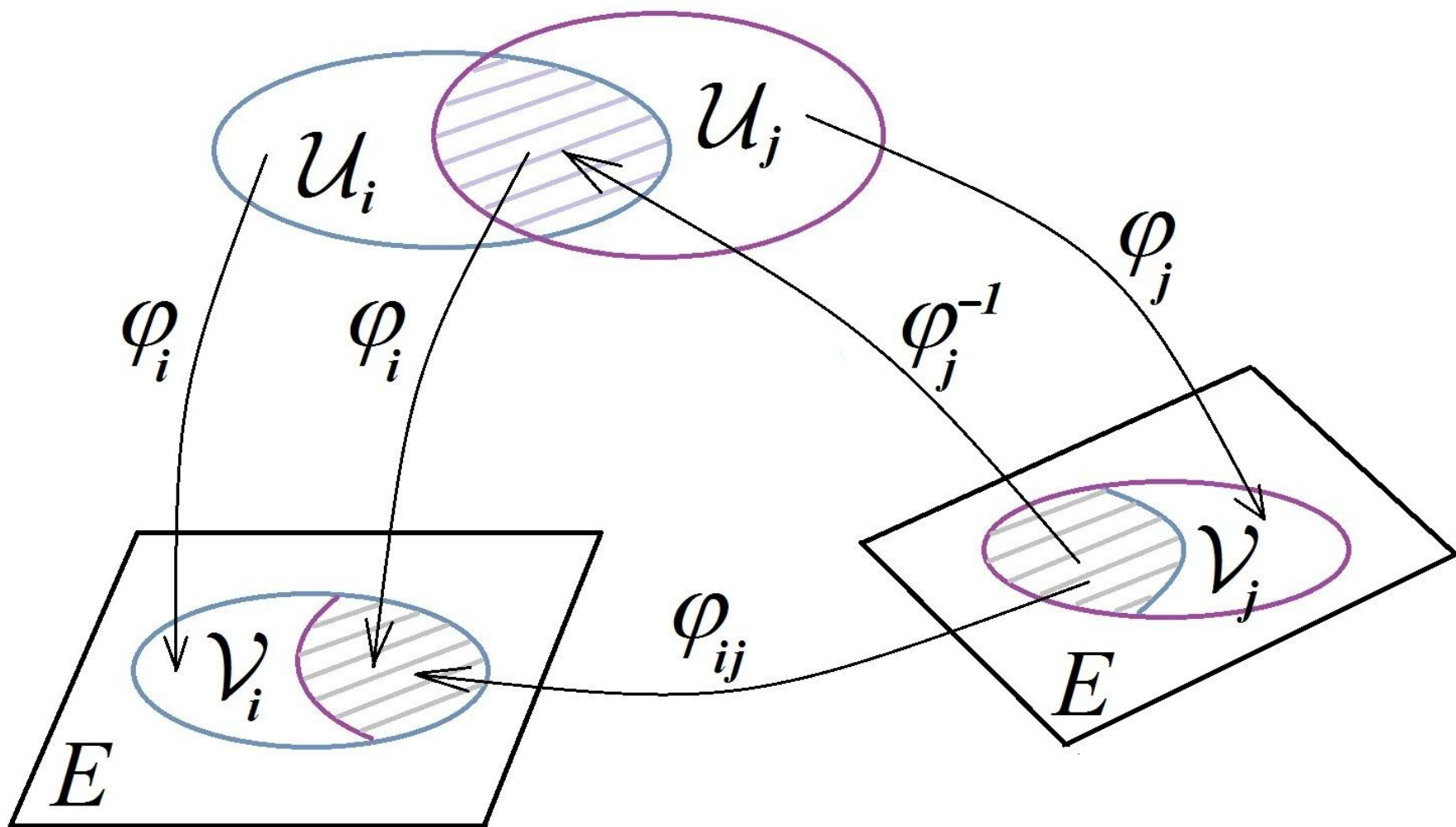
C^r – *согласованными* ($r \geq 1$), если выполняется одно из следующих двух условий:

1) $U_i \cap U_j = \emptyset$;

2) $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ и отображение

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

является C^r – диффеоморфизмом.



Отображение $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ называется *функцией перехода* (или *отображением перехода*) от карты (U_j, φ_j) к карте (U_i, φ_i) .

Атлас, каждые две карты которого являются C^r – согласованными ($r \geq 1$), называется C^r – *атласом*.

Топологическое многообразие, атлас которого является C^r – атласом, называется C^r – *многообразием* или *гладким многообразием класса C^r* .

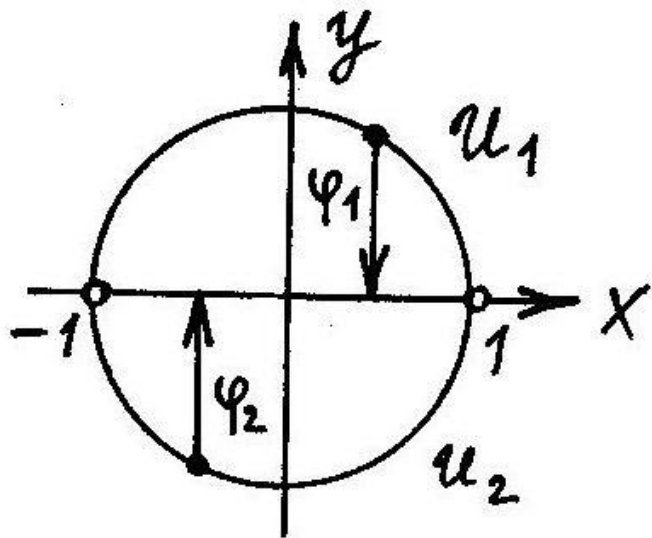
§ 3. Два способа задания атласа на окружности

1-й способ. Рассмотрим окружность

S^1 единичного радиуса с центром

в т. $O(0,0)$; $x^2 + y^2 = 1$ — уравнение

окружности.



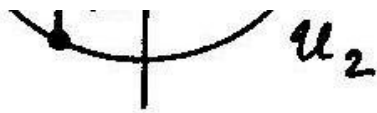
$1 \uparrow y$

$$U_1 = \{(x, y) \in S^1 : y > 0\},$$

$$U_2 = \{(x, y) \in S^1 : y < 0\},$$

$$U_3 = \{(x, y) \in S^1 : x > 0\},$$

$$U_4 = \{(x, y) \in S^1 : x < 0\}.$$

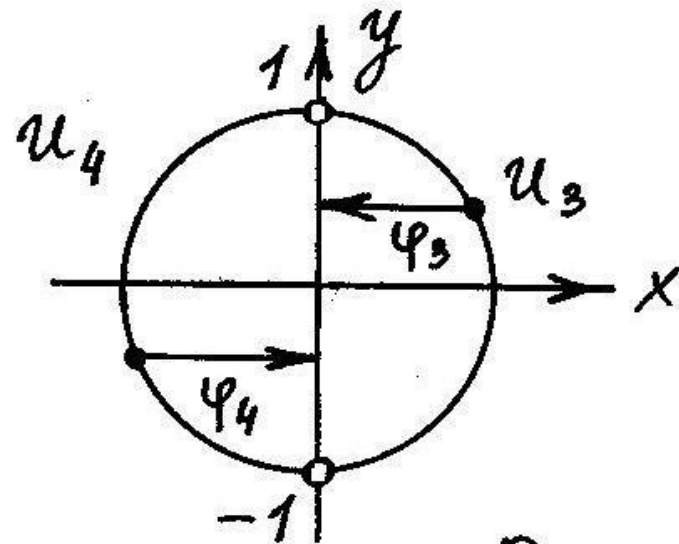


$$U_3 = \{(x, y) \in S^1 : x > 0, y > 0\},$$

$$U_4 = \{(x, y) \in S^1 : x < 0, y < 0\}.$$

Му-ва U_i — открытые
в топологии индуцированной топологии S^1 .

Рассм-и карту (U_1, φ_1) .



Рассм-м карту (U_1, φ_1) .

Отобр-е $\varphi_1: U_1 \rightarrow V_1 = (-1, 1) \subset \mathbb{R}^1$;

$\varphi_1: (x, y) \mapsto x$:

а) φ_1 — биективное от-е;

б) φ_1 — невр. от-е, т.к. $\varphi_1 = \mathcal{P}_1|_{U_1}$,

где π_1 — проекция \mathbb{R}^2 на \mathbb{R}^1 ,

$$\pi_1: (x, y) \mapsto x;$$

б) обратное от-е $\varphi_1^{-1}: V_1 \rightarrow U_1$,

$\varphi_1^{-1}(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$ — непр-но, т.к.

$\psi_1^1(x) = x$ и $\psi_1^2(x) = \sqrt{1-x^2}$ — непр. ср-ущи
на $(-1, 1)$.

След-но, $\varphi_1: U_1 \rightarrow V_1$ — гомеоморфизм.

Карта (U_2, φ_2) : $\varphi_2: U_2 \rightarrow V_2 = V_1,$

$$\varphi_2(x, y) = x, \quad \varphi_2^{-1}(x) = (x, -\sqrt{1-x^2}).$$

Карта (U_3, φ_3) : $\varphi_3: U_3 \rightarrow V_3 = V_1,$

$$\varphi_3(x, y) = y, \quad \varphi_3^{-1}(y) = (\sqrt{1-y^2}, y).$$

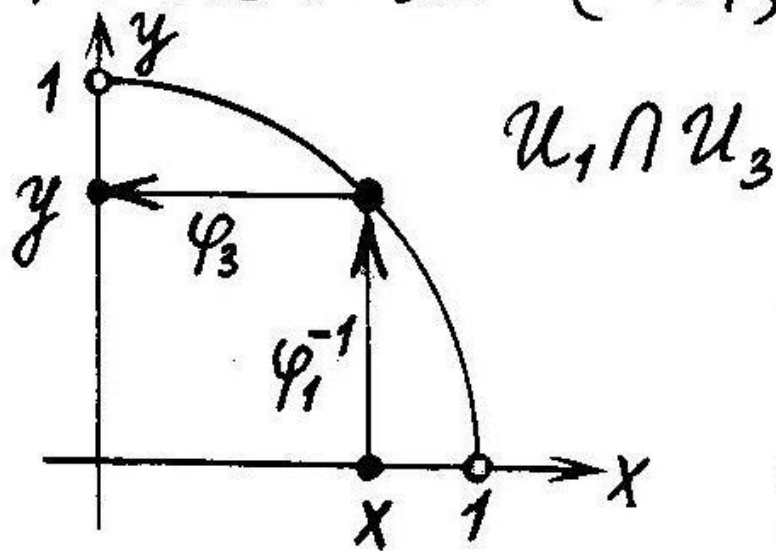
Карта (U_4, φ_4) : $\varphi_4: U_4 \rightarrow V_4 = V_1,$

$$\varphi_4(x, y) = y, \quad \varphi_4^{-1}(y) = (-\sqrt{1-y^2}, y).$$

$\bigcup_{i=1}^4 U_i = S^1 \Rightarrow \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^4$ — атлас на S^1 .

C^2 -согласованность карт.

Рассм-м (U_1, φ_1) и (U_3, φ_3) .



$$\varphi_1(U_1 \cap U_3) = (0, 1)$$

$$\varphi_3(U_1 \cap U_3) = (0, 1)$$

$$\varphi_{31} = \varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} : (0, 1) \rightarrow (0, 1);$$

$$\varphi_{31} : x \mapsto y = \sqrt{1-x^2};$$

φ_{31} — класса C^∞ ;

$(\varphi_{31})^{-1}: y \mapsto \sqrt{1-y^2}$ — от-е кл. C^∞ .

Итак, $\varphi_{31}: \varphi_1(U_1 \cap U_3) \rightarrow \varphi_3(U_1 \cap U_3)$

— диффеоморфизм кл. C^∞ .

Для ост-х пар карт C^∞ -согласованность также выполняется (проверьте самое-то!).

След-но, атлас $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=4}^\infty$ —

C^∞ -атлас.

Литература

Борисович Ю.Г. и др.
«Введение в топологию»