МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ і НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ІНЖЕНЕРІЇ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

Навчальна дисципліна:

«МЕТОДОЛОГІЯ ПРИКЛАДНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ»

Викладач навчальної дисципліни
професор ДРУЖИНИН ВЛАДИМИР АНАТОЛЬЕВИЧ

Контакти:
+38 093 307 0047
(044) 245 5767
Ел. пошта: v_druzhinin@ukrЕл. пошта: v_druzhinin@ukr.Ел. пошта: v_druzhinin@ukr.net

Практична робота № 1: «**ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ ПРИ ОБРОБЦІ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ.** ЗАВДАННЯ КЛАСИЧНОГО ВИЯВЛЕННЯ ОБ'ЄКТІВ РОЗПІЗНАВАННЯ. СТАТИСТИЧНІ КРИТЕРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕННЯ»

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Исходные данные: число классов объектов – 2, закон распределения признаков объектов – нормальный. Параметры распределения (математическое ожидание m и среднеквадратическое отклонение σ): $m_1 = 5$, $\sigma_1 = 1$ (класс 1) и $m_2 = 3$, $\sigma_2 = 0{,}6$ (класс 2).

2. Для построения в системе MathCAD графиков условных по классу a_k $(k = 1, 2)$ плотностей вероятности признаков x

$$f(x|a_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_k} \exp\left(\frac{-(x - m_k)^2}{2\sigma_k^2} \right)$$

определим пользовательскую функцию трех аргументов:

$$f(z, m, \sigma) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \exp\left(\frac{-(z - m)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right).$$

Сформируем массив N точек ($N = 200$) по оси $0x$, располагающихся с равным шагом в диапазоне $[x_{min}, x_{max}]$. Верхнюю x_{max} и нижнюю x_{min} границы диапазона определим по правилу «трех сигм», согласно которому случайная величина x, распределенная по нормальному закону, находится в интервале значений $m \pm 3\sigma$ с вероятностью более $0{,}997$. Считаем, что случайные значения параметра x будут лежать в диапазоне $[x1min, x1max]$, если наблюдается класс 1 ($x \in a_1$), и в диапазоне $[x2min, x2max]$, если наблюдается класс 2 ($x \in a_2$), где

$$x1min = m_1 - 3\cdot\sigma_1,\ x1max = m_1 + 3\cdot\sigma_1,$$

$$x2min = m_2 - 3\cdot\sigma_2,\ x2max = m_2 + 3\cdot\sigma_2.$$

Определим нижнюю и верхнюю границы значений параметра x:

$$xmin := min\,(x1min,\, x2min);$$

$$xmax := max\,(x1max,\, x2max).$$

Для заданных данных $xmin = 0$, $xmax = 8$.

Разделим интервал $[xmin,\, xmax]$ на $(N - 1)$ часть и определим координаты точек разделения:

$$i := 0..N-1,\ x_i := xmin + \frac{xmax - xmin}{N-1} \cdot i\,.$$

Сформируем массивы значений условных по классу плотностей вероятности $f(x_i|a_1)$ и $f(x_i|a_2)$, соответствующие точкам x_i:

$$\mathrm{fx1}_i := f(x_i, m1, \sigma 1),\ \mathrm{fx2}_i := f(x_i, m2, \sigma 2).$$

Построим графики условных плотностей вероятности (рис. 1).

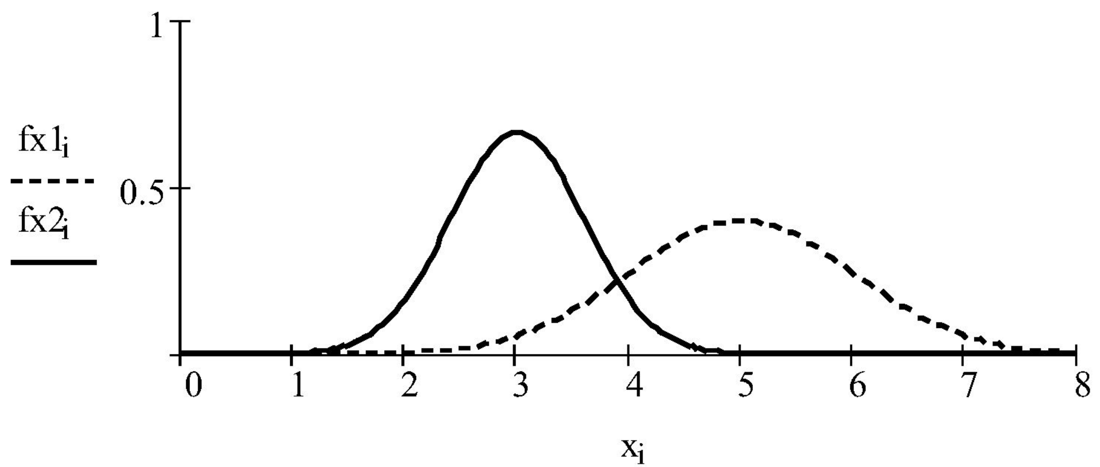

Рис. 1 Условные по классу плотности вероятности признака x

3. Для определения порогов принятия решения по критерию максимального правдоподобия (5) нужно решить уравнение

$$\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{(x-m_2)^2}{\sigma_2^2}=2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_1}\right)-2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_2}\right).$$

Отсюда

$$x^2\left(\sigma_2^2-\sigma_1^2\right)+x\left(2m_2\sigma_1^2-2m_1\sigma_2^2\right)+m_1^2\sigma_2^2-m_2^2\sigma_1^2-2\sigma_1^2\sigma_2^2\ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)=0.$$

Обозначим:

$$d1:=\sigma1^2,\ d2:=\sigma2^2,\ a:=d2-d1,\ b:=2\cdot m2\cdot d1-2\cdot m1\cdot d2,$$

$$c:=m1^2\cdot d2-m2^2\cdot d1-2\cdot d1\cdot d2\cdot\ln\left(\frac{\sigma2}{\sigma1}\right).$$

Вычислим пороги принятия решения xg1 и xg2, xg1 < xg2:

$$xg1 := \frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a},\ xg2 := \frac{-b-\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a};$$

получим xg1 = –0.147 и xg2 = 3.897.

4. Изобразим на графике полученные границы раздела между классами xg1 и xg2. Если какой-либо из порогов лежит в областях маловероятных значений параметра x для всего множества классов A = $\{a_1,\ a_2\}$ (в данном случае $\mathrm{xg1} \notin [0,\ 8]$), то следует переопределить нижнюю и (или) верхнюю границы x:

$$xmin := if\,(\,xmin > \mathrm{xg1}\ ,\ \mathrm{xg1}\ ,\ xmin);$$

$$xmax := if\,(xmax < \mathrm{xg2}\ ,\ \mathrm{xg2}\ ,\ xmax).$$

Соответственно пересчитываются значения массивов $\mathrm{x_i}$, $\mathrm{fx1_i}$, $\mathrm{fx2_i}$.

Для визуализации порогов принятия решения можно определить прямоугольную функцию (рис. 1.3) вида

$$\mathrm{fg}_i := if\,(\,\mathrm{xg1} < x_i < \mathrm{xg2}\ ,\ 0.5\ ,\ 0\ )$$

либо включить опцию Show Markers в диалоговом окне форматирования графика Format (закладка X–Y Axes) и ввести в поля маркеров, появившиеся на графике, имена переменных xg1 и xg2.

5. Для оценки эффективности решающего правила (5) рассчитаем теоретические величины вероятностей ошибок распознавания.

Вероятность отнести наблюдаемый признак к классу a_1, когда он в действительности принадлежит классу a_2:

$$\mathrm{P21} := \int_{x\min}^{xg1} f(z, m2, \sigma 2)\,\mathrm{d}z + \int_{xg1}^{x\max} f(z, m2, \sigma 2)\,\mathrm{d}z .$$

Вероятность принятия решения в пользу класса a_2, когда в действительности наблюдается класс a_1:

$$\mathrm{P12} := \int_{xg1}^{xg2} f(z, m1, \sigma 1)\,\mathrm{d}z .$$

Получим $\mathrm{P21} = 0.067$ и $\mathrm{P12} = 0.135$.

Вероятность правильного распознавания определим как

$$\mathrm{P} := 1 - 0.5 \cdot (\mathrm{P21} + \mathrm{P12}).$$

Получим $\mathrm{P} = 0.899$.

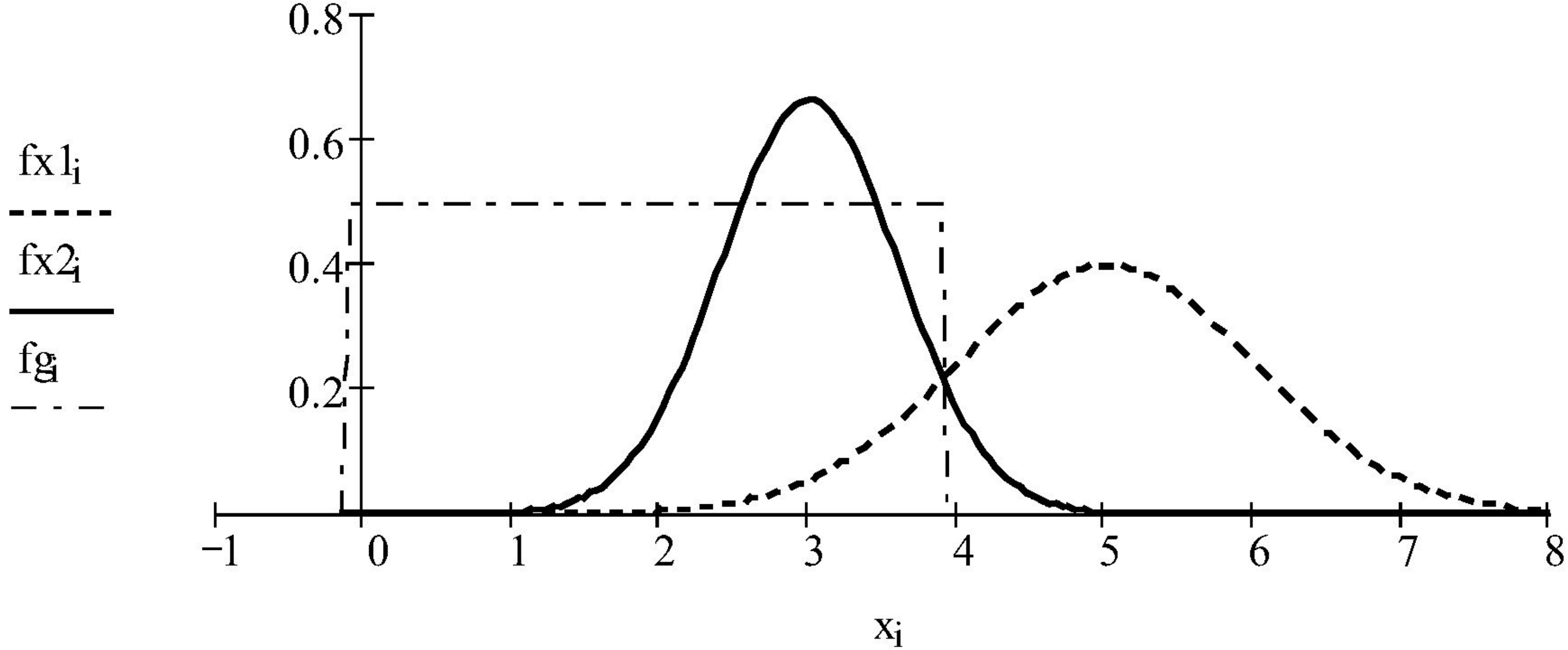

Рис. **2** Условные плотности вероятности fx1, fx2
и пороги принятия решения fg

6. Для построения решающего правила по критерию максимальной апостериорной вероятности (3) зададим априорные вероятности p1 и p2 появления классов a_1 и a_2, $p1 + p2 = 1$:

$$p1 := \frac{1}{3},\ p2 := \frac{2}{3}.$$

7. По алгоритму, описанному в п. 2, построим в интервале $[xmin, xmax]$ график плотностей полных вероятностей появления классов a_1 и a_2 (рис. **3**)

$$\mathrm{fx1}_i := \mathrm{p1} \cdot f(x_i, m1, \sigma 1), \ \mathrm{fx2}_i := \mathrm{p2} \cdot f(x_i, m2, \sigma 2)$$

и график апостериорных вероятностей классов a_1 и a_2 (рис. **4**.)

$$\mathrm{Q1}_i := \frac{\mathrm{fx1}_i}{\mathrm{fx1}_i + \mathrm{fx2}_i}, \ \mathrm{Q2}_i := \frac{\mathrm{fx2}_i}{\mathrm{fx1}_i + \mathrm{fx2}_i}.$$

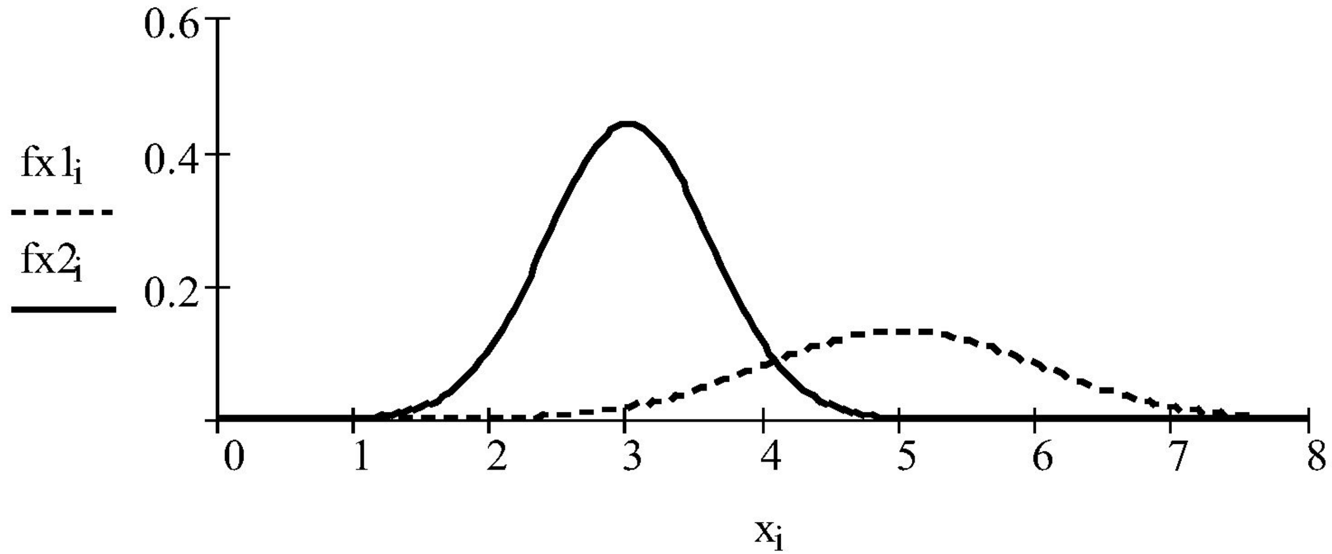

Рис. **3** Условные плотности полной вероятности fx1, fx2 с учетом априорных вероятностей классов

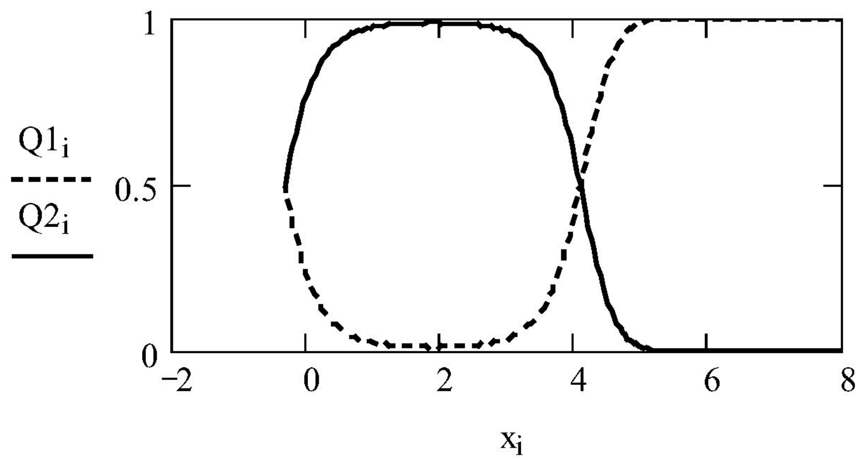

Рис.4 Апостериорные вероятности Q1, Q2

8. Для определения порогов принятия решения о классе объекта по критерию максимальной апостериорной вероятности (3) решим квадратное уравнение

$$\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{(x-m_2)^2}{\sigma_2^2}=2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_1}\right)-2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_2}\right)-2\ln\left(\frac{\mathrm{p2}}{\mathrm{p1}}\right).$$

Приведем его к виду

$$x^2\left(\sigma_2^2-\sigma_1^2\right)+x\left(2m_2\sigma_1^2-2m_1\sigma_2^2\right)+m_1^2\sigma_2^2-m_2^2\sigma_1^2-2\sigma_1^2\sigma_2^2\ln\left(\frac{\sigma_2\mathrm{p1}}{\sigma_1\mathrm{p2}}\right)=0.$$

Обозначим:

$$d1 := \sigma 1^2,\ d2 := \sigma 2^2,\ a := d2 - d1,\ b := 2\cdot m2\cdot d1 - 2\cdot m1\cdot d2,$$

$$c := m1^2\cdot d2 - m2^2\cdot d1 - 2\cdot d1\cdot d2\cdot \ln\left(\frac{\sigma 2\cdot \mathrm{p1}}{\sigma 1\cdot \mathrm{p2}}\right).$$

Вычислим пороги принятия решения $\mathrm{xg1}$ и $\mathrm{xg2}$, $\mathrm{xg1} < \mathrm{xg2}$:

$$xg1 := \frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a},\ xg2 := \frac{-b-\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}.$$

Получим $\mathrm{xg1} = -0.332$ и $\mathrm{xg2} = 4.082$.

9. Для визуализации границ раздела между классами (рис. **5**) повторим процедуру, описанную в п. 4: переопределим границы области определения признака x: $xmin$, $xmax$, пересчитаем массивы x_i, $\mathrm{fx1}_i$, $\mathrm{fx2}_i$, определим функцию порогов принятия решения:

$$\mathrm{fg}_i := if(\ \mathrm{xg1} < x_i < \mathrm{xg2}\ ,\ 0.5\ ,\ 0\ ).$$

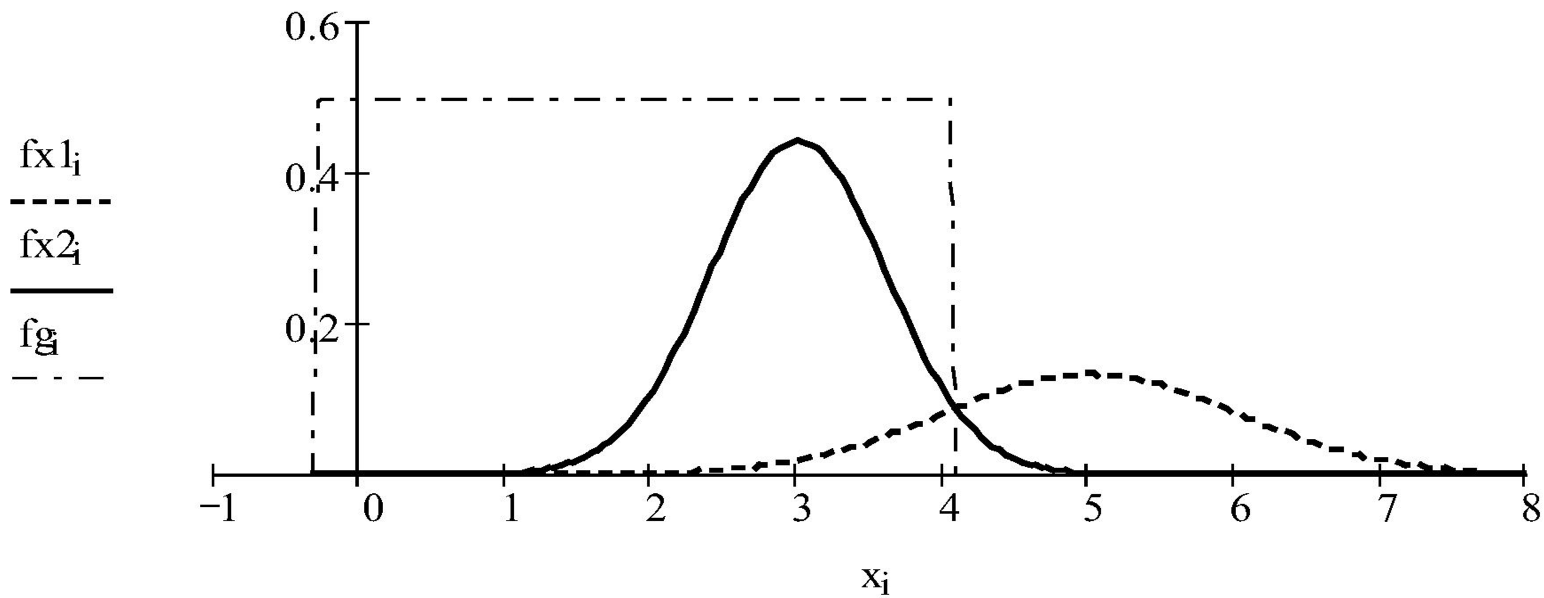

Рис. **5** Условные плотности полной вероятности fx1, fx2 и пороги принятия решения fg

10. Рассчитаем теоретические вероятности ошибок распознавания первого и второго рода:

$$P21 := \int_{x\min}^{xg1} f(z, m2, \sigma 2)\,\mathrm{d}z + \int_{xg1}^{x\max} f(z, m2, \sigma 2)\,\mathrm{d}z\,;$$

$$P12 := \int_{xg1}^{xg2} f(z, m1, \sigma 1)\,\mathrm{d}z\,.$$

Получим $P21 = 0.036$ и $P12 = 0.179$.

Вероятность правильного распознавания для случая, когда априорные вероятности классов известны и $p1 \neq p2 \neq 0.5$:

$$P := 1 - (p1 \cdot P12 + p2 \cdot P21),\ P = 0.916.$$

11. На основании полученных теоретических оценок вероятностей правильного распознавания можно сделать следующие выводы:

– если сведения об априорных вероятностях классов отсутствуют, то это равносильно предположению о равных вероятностях появления классов:

$$\sum_{i=1}^{K} p(a_i) = 1,\ p(a_i) = \frac{1}{K},$$

где $p(a_i)$ – априорная вероятность класса a_i; K – количество классов;

– случай, когда априорные вероятности классов одинаковы, является наихудшим для статистического распознавания (при прочих равных условиях).