

Объем шара

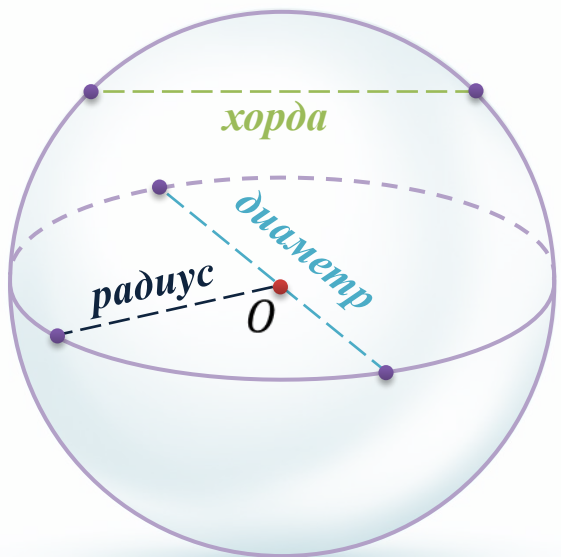


Сегодня на уроке:



- ✓ определение шара
- ✓ формула для вычисления объема шара
- ✓ формулу для вычисления площади сферы

Определение. *Шар* – это совокупность всех точек пространства, находящихся от данной точки на расстоянии, не больше данного.



Радиусом шара называют всякий отрезок, соединяющий центр шара с любой точкой шаровой поверхности.

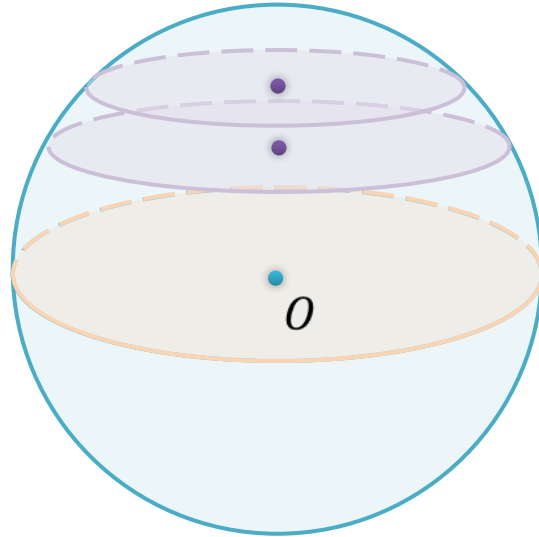
Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется *диаметром* шара.

$$D = 2R$$

Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и не являющийся диаметром шара, т.е. не проходящий через центр шара, называется *хордой* шара.

Сечение шара плоскостью есть *круг*.

Большой круг шара – сечение шара плоскостью, проходящей через его центр.



Теорема. Объем шара радиуса R равен $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Доказательство.

Пусть дан шар радиуса R с центром в точке O .

$$OC = R$$

Докажем, что $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

$$OM = x$$

Обозначим радиус круга через r ,
а его площадь через $S(x)$, где x – абсцисса точки M .

Выразим площадь $S(x)$ через x и радиус шара R .

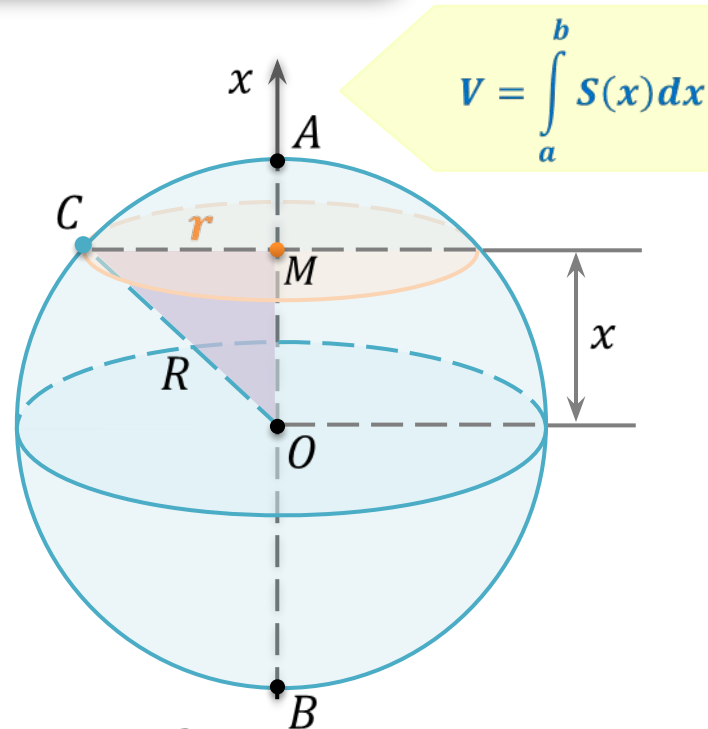
$$\text{Из } \triangle OMC \text{ имеем: } r = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$S(x) = \pi r^2 = \pi (\sqrt{R^2 - x^2})^2 = \pi(R^2 - x^2)$$

Эта формула верна для всех x , удовлетворяющих условию:

$$-R \leq x \leq R.$$

$$V_{\text{шара}} = \int_{-R}^R \pi(R^2 - x^2)dx = \pi R^2 \int_{-R}^R dx - \pi \int_{-R}^R x^2 dx = \pi R^2 x \Big|_{-R}^R - \frac{\pi x^3}{3} \Big|_{-R}^R = \frac{4}{3}\pi R^3$$



$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$$

Обозначим через S_i – площадь i -й грани.

$$V_i = \frac{1}{3} S_i R$$

$$V_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} S_i R = \frac{1}{3} R \sum_{i=1}^n S_i = \frac{1}{3} R P_n, \text{ где } P_n = \sum_{i=1}^n S_i$$

Многогранник называется **описанным** около сферы (шара), если сфера касается всех его граней.

При этом сфера называется **вписанной** в многогранник.

$$P_n = \frac{3V_n}{R}$$

$$V_n \rightarrow V_{\text{шара}}$$

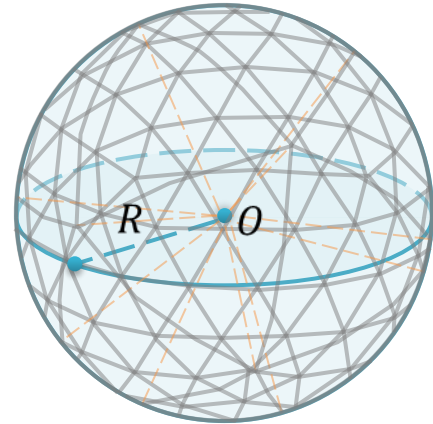
Если наибольший размер каждой грани описанного многогранника не превосходит δ , то описанный многогранник содержится в шаре радиуса $R + \delta$ с центром в точке O .

$$\frac{4}{3}\pi R^3 < V_n < \frac{4}{3}\pi(R + \delta)^3$$

Т.к. $\frac{4}{3}\pi(R + \delta)^3 \rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3$ при $\delta \rightarrow 0$, то и объем $V_n \rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3$ при $\delta \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3V_n}{R} = \frac{3}{R} \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \frac{3}{R} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2$$

$$S_{\text{сферы}} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n \Rightarrow S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$$



Задача. Объем шара равен 36π см³. Найдите диаметр шара.

Решение.

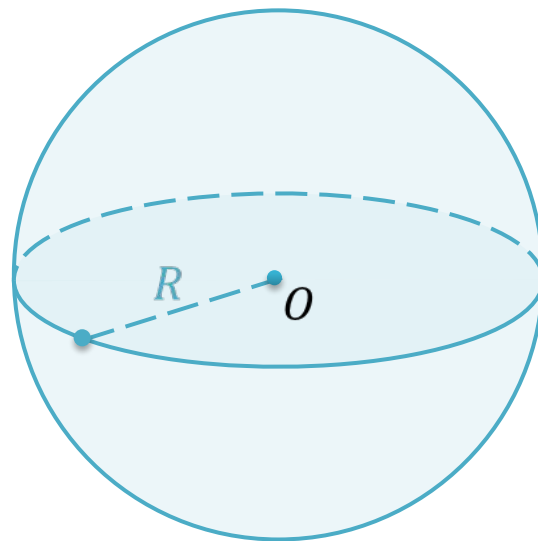
$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V_{\text{шара}} = 36\pi \text{ см}^3$$

$$R^3 = \frac{3V_{\text{шара}}}{4\pi} = \frac{3 \cdot 36\pi}{4\pi} = 27 \Rightarrow R = 3 \text{ (см)}$$

$$D = 2R = 2 \cdot 3 = 6 \text{ (см)}$$

Ответ: 6 см.



Задача. Радиус шара увеличили в 2 раза. Во сколько раз увеличился объем шара?

Решение.

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$R = 2R_{\text{исх}}$$

$$V_{\text{исх. шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi (2R)^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 8R^3 = 8 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$$

Ответ: объем шара увеличился в 8 раз.

«Задача

Архимеда»

Задача. В цилиндр вписан шар. Найдите отношение объема шара к объему цилиндра.

Решение.

$$R_{\text{ш}} = R_{\text{очн}}$$

$$h_{\text{ц}} = D = 2R$$

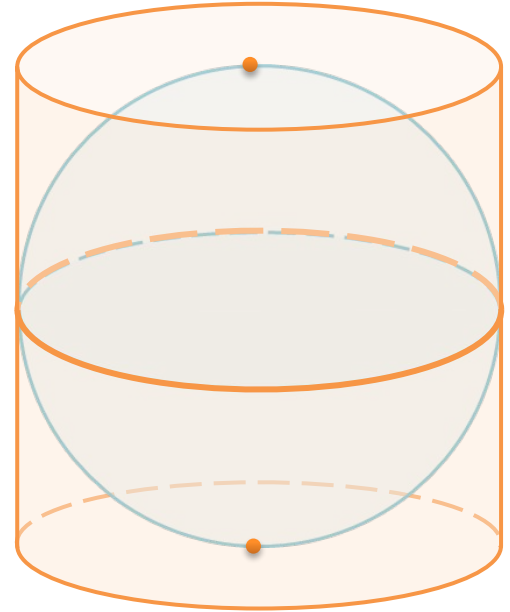
$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V_{\text{ц}} = S_{\text{очн}} \cdot h$$

$$V_{\text{ц}} = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$$

$$\frac{V_{\text{ш}}}{V_{\text{ц}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi R^3} = \frac{2}{3}$$

Ответ: $\frac{V_{\text{ш}}}{V_{\text{ц}}} = \frac{2}{3}$.



Объем шара

Шар – это совокупность всех точек пространства, находящихся от центра на расстоянии, не больше данного.



$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$$