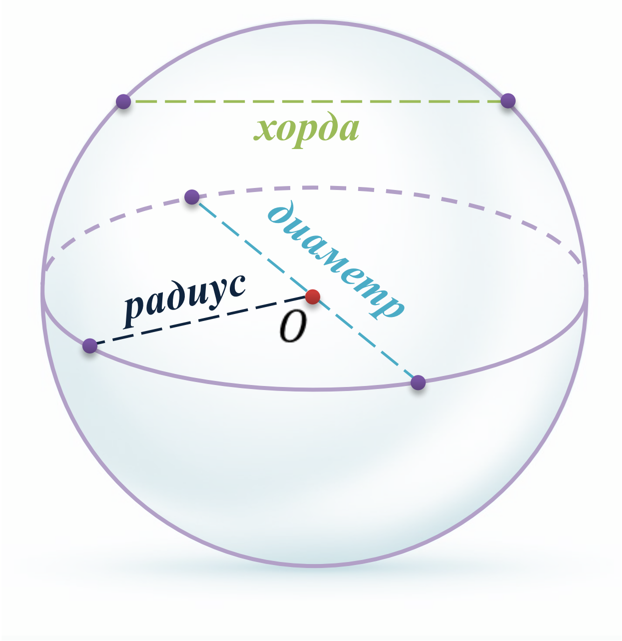
Объем шара

Сегодня на уроке:

- ✔ определение шара
- ✔ формула для вычисления объема шара
- ✔ формулу для вычисления площади сферы

Определение. ***Шар*** – это совокупность всех точек пространства, находящихся от данной точки на расстоянии, не больше данного.



Радиусом шара называют всякий отрезок, соединяющий центр шара с любой точкой шаровой поверхности.

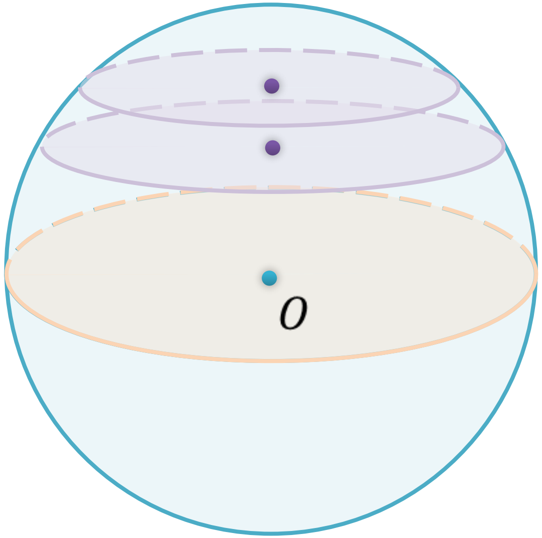
Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется ***диаметром*** шара.

$$D = 2R$$

Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и не являющийся диаметром шара, т.е. не проходящий через центр шара, называется ***хордой*** шара.

Сечение шара плоскостью есть *круг*.

Большой круг шара – сечение шара плоскостью, проходящей через его центр.



Теорема. Объем шара радиуса R равен $\boldsymbol{V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3}$.

Доказательство.

Пусть дан шар радиуса R с центром в точке O.

$OC = R$

Докажем, что $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

$OM = x$

Обозначим радиус круга через r,

а его площадь через $S(x)$, где x – абсцисса точки M.

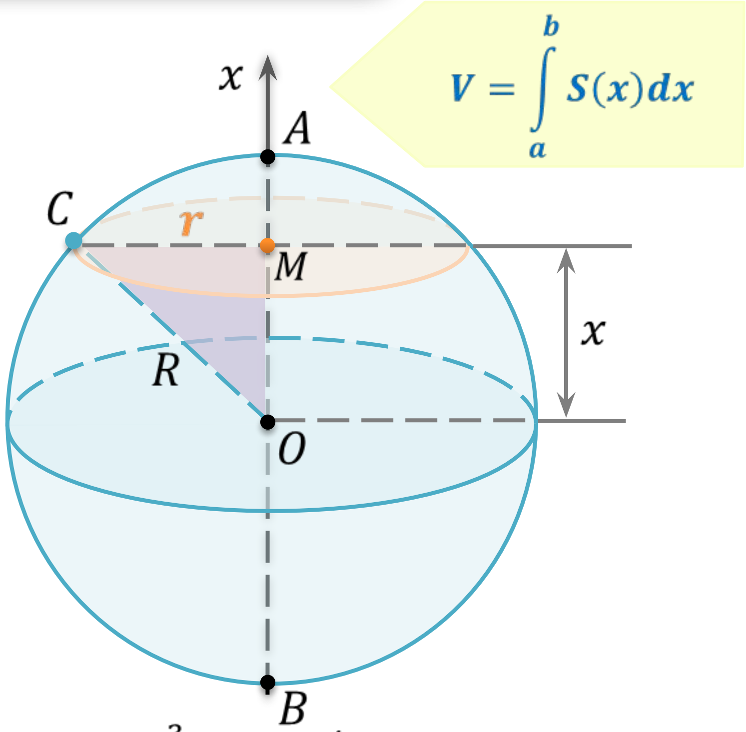
Выразим площадь $S(x)$ через x и радиус шара R.

Из ΔOMC имеем: $r = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$S(x) = \pi r^2 = \pi\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 = \pi(R^2 - x^2)$$

Эта формула верна для всех x, удовлетворяющих условию:

$-R \leq x \leq R$.



$$V_{\text{шара}} = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi R^2 \int_{-R}^{R} dx - \pi \int_{-R}^{R} x^2 dx = \pi R^2 x \Big|_{-R}^{R} - \frac{\pi x^3}{3}\Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

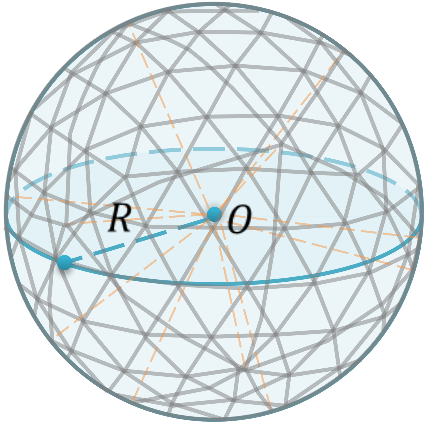
$$\boxed{S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2}$$

Обозначим через S_i – площадь i-й грани.

$V_i = \frac{1}{3} S_i R$

$V_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} S_i R = \frac{1}{3} R \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} S_i = \frac{1}{3} R P_n$, где $P_n = \sum_{i=1}^{n} S_i$.

Многогранник называется ***описанным около сферы*** *(шара), если сфера касается всех его граней.*
При этом сфера называется ***вписанной*** *в многогранник.*



$P_n = \frac{3V_n}{R}$

$V_n \to V_{\text{шара}}$

Если наибольший размер каждой грани описанного многогранника не превосходит δ, то описанный многогранник содержится в шаре радиуса $R + \delta$ с центром в точке O.

$\frac{4}{3}\pi R^3 < V_n < \frac{4}{3}\pi (R+\delta)^3$

Т.к. $\frac{4}{3}\pi (R+\delta)^3 \to \frac{4}{3}\pi R^3$ при $\delta \to 0$, то и объем $V_n \to \frac{4}{3}\pi R^3$ при $\delta \to 0$ $(n \to \infty)$.

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3V_n}{R} = \frac{3}{R} \lim_{n\to\infty} V_n = \frac{3}{R} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2$$

$$S_{\text{сферы}} = \lim_{n\to\infty} P_n \implies S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$$

Задача. Объем шара равен 36π см^3. Найдите диаметр шара.

Решение.

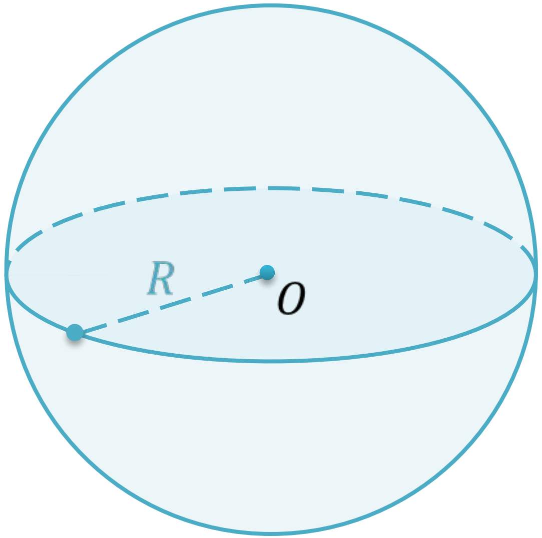
$$\boldsymbol{V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$V_{\text{шара}} = 36\pi \text{ см}^3$$

$$R^3 = \frac{3V_{\text{шара}}}{4\pi} = \frac{3\cdot 36\pi}{4\pi} = 27 \quad \Longrightarrow \quad R = 3 \text{ (см)}$$

$$D = 2R = 2\cdot 3 = 6 \text{ (см)}$$

Ответ: 6 см.



Задача. Радиус шара увеличили в 2 раза. Во сколько раз увеличился объем шара?

Решение.

$$\boldsymbol{V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$R = 2R_{\text{исх}}$$

$$V_{\text{исх. шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(2R)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8R^3 = 8 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

Ответ: объем шара увеличился в 8 раз.

«Задача Архимеда»

Задача. В цилиндр вписан шар. Найдите отношение объема шара к объему цилиндра.

Решение.

$$R_ш = R_{осн}$$

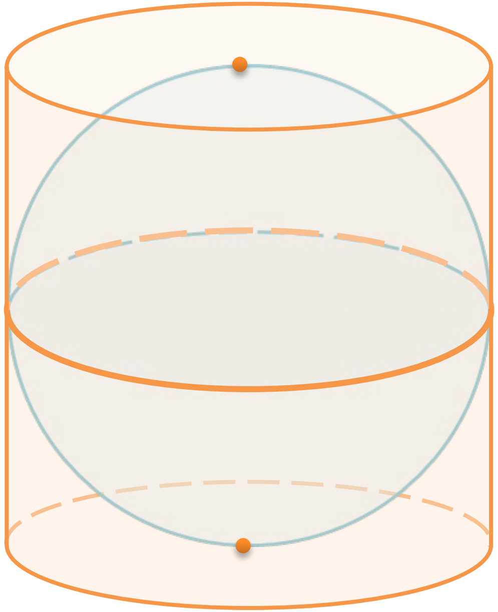
$$h_ц = D = 2R$$

$$\boldsymbol{V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\boldsymbol{V_ц = S_{осн} \cdot h}$$

$$V_ц = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$$

$$\frac{V_ш}{V_ц} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi R^3} = \frac{2}{3}$$



Ответ: $\frac{V_ш}{V_ц} = \frac{2}{3}$.

Объем шара

Шар – это совокупность всех точек пространства, находящихся от центра на расстоянии, не больше данного.

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$$