Элементы комбинаторики и теории вероятностей

Преподаватель: Кадирова А.М.

Группа: 412

Примеры комбинаторных задач

В науке и на практике часто встречаются задачи, приходится составлять различные комбинации. Такие задачи получили название *комбинаторных задач*, а раздел математики, в котором рассматриваются подобные задачи, называют *комбинаторикой*. Слово «комбинаторика» происходит от латинского слова *combinare*, которое означает «соединять, сочетать».

Рассмотрим некоторые примеры комбинаторных задач.

Пример 1. Из группы теннисистов, в которую входят четыре человека – Антонов, Григорьев, Сергеев и Фёдоров, тренер выделяет двоих для участия в соревнованиях пар. Сколько существует вариантов выбора такой пары?

Решение. Составим сначала все пары, в которые входит Антонов. Получим три пары: АГ, АС, АФ. Затем пары, в которые входит Григорьев, но не входит Антонов. Таких пар две: ГС, ГФ. Далее составим пары, в которые входит Сергеев, но не входят Антонов и Григорьев. Такая пара одна: СА. Других вариантов составления пар нет, так как все пары, в которые входит Фёдоров уже составлены.

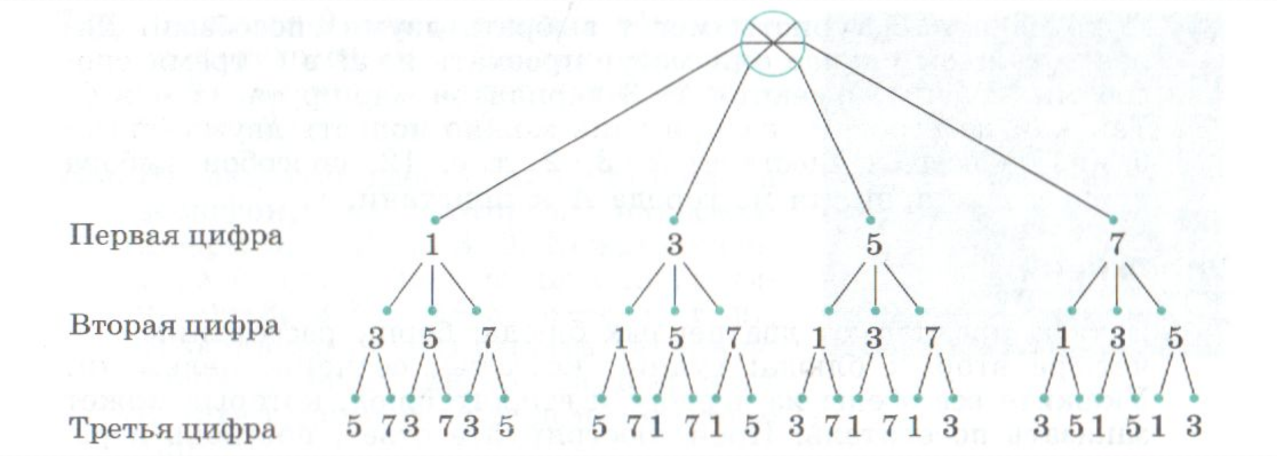
Итак, мы получили шесть пар.

Ответ: 6 пар.

Такой способ решения называют *перебором возможных вариантов.*

Пример 2. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

Решение. Для решения этой задачи составим схему.



Такую схему называют *деревом возможных событий*.

Итак, мы получили 24 числа.

Ответ: 24 числа.

Заметим, что решить вторую задачу можно другим способом. Будем рассуждать так. Первую цифру можно выбрать четырьмя способами. Так после выбора первой цифры останутся три, то вторую цифру можно выбрать уже тремя способами. Наконец, третью цифру можно выбрать двумя способами. Следовательно, общее число искомых трёхзначных чисел равно произведению $4 \times 3 \times 2$, т.е. 24.

На основе этого можно сформулировать *комбинаторное правило умножения:*

Пусть имеется n элементов и требуется выбрать из них один за другим k элементов. Если первый элемент можно выбрать n_1 способами, после чего второй элемент можно выбрать n_2 способами из оставшихся, затем третий элемент можно выбрать n_3 способами из оставшихся и т.д., то число способов, которыми могут быть выбраны все k элементы,

равно произведению

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \cdots \times n_k$$

Перестановки

Перестановкой из n элементов называется каждое расположение этих элементов в определённом порядке.

Число перестановок из n элементов обозначают символом P_n (читают «P из n») и вычисляют по формуле $P_n = n!$

Пример. Сколькими способами можно расставить 8 участниц финального забега на восьми беговых дорожках?

Решение. Число способов равно числу перестановок из 8 элементов. По формуле находим, что

$$P_8=1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8=40320$$

Значит, существует 40320 способов расстановки участниц забега на восьми беговых дорожках.

Ответ: 40320 способов.

Размещения

- **Размещением из n элементов по k (k≤n) называется любое множество, состоящее из k элементов, взятых в определённом порядке из данных n элементов.**

Число размещений из n элементов по k обозначают

A^k_n (читают «А из n по k») и вычисляют по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Пример. Учащиеся 2 класса изучают 9 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нём было 4 различных предмета?

- **Решение.** Любое расписание на один день, составленное из 4 различных предметов, отличается от другого либо набором предметов, либо порядком их следования. Значит, в этом примере речь идёт о размещениях из 9 элементов по 4. Имеем

$$A_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 3024$$

Итак, мы нашли, что расписание можно составить 3024 способами.

Ответ: 3024 способа.

Сочетания

- **Сочетанием из n элементов по k называется любое множество, составленное из k элементов, выбранных из данных n элементов.**

В отличие от размещений в сочетаниях не имеет значения, в каком порядке указаны элементы. Два сочетания из n элементов по k отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по k обозначают $C^k{}_n$ (читают «А из n по k») и вычисляют по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Пример. Из набора, состоящего из 15 красок, надо выбрать 3 краски для окрашивания шкатулки. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

- **Решение.** Каждый выбор трёх красок отличается от другого хотя бы одной краской. Значит, здесь речь идёт о сочетаниях из 15 элементов по 3. Имеем

$$C_{15}^{3} = \frac{15!}{3!\,(15-3)!} = \frac{15!}{3! \times 12!} = \frac{13 \times 14 \times 15}{1 \times 2\ 3} = 455$$

Следовательно, 3 краски можно выбрать 455 способами.

Ответ: 455 способов.