17.11.2021 г.

Представление чисел в компьютере. Двоичная система счисления. Двоичная арифметика.

Вспомним известное из курса 8 класса…

Система счисления – это правила записи чисел с помощью специальных знаков – ***цифр***, а также соответствующие правила выполнения операций с этими числами.

Позиционная система: значение цифры определяется ее позицией в записи числа.

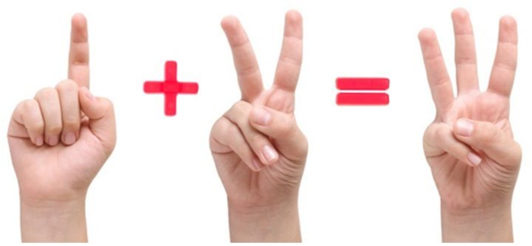
Алфавит системы счисления – это используемый в ней набор цифр.

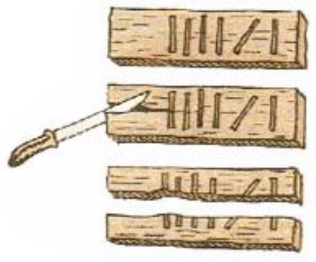
Основание системы счисления – это количество цифр в алфавите (мощность алфавита).

Разряд — это позиция цифры в записи числа. Разряды в записи целых чисел нумеруются с нуля справа налево.

Непозиционные системы счисления

Непозиционная система счисления — это такая система, в которой значение цифры не зависит от её места (позиции) в записи числа.





Примеры:

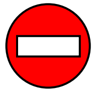
•унарная

•римская

•славянская

•и другие…

Унарная (лат. *unus* – один) – одна цифра обозначает единицу (1 день, 1 камень, 1 баран, …)



- только натуральные числа
- запись больших чисел – длинная (1 000 000?)

Римская система счисления

Правила:

- (обычно) не ставят больше **трех** одинаковых цифр подряд
- если **младшая** цифра (только **одна**!) стоит **слева** от старшей, она вычитается из суммы (*частично* непозиционная!)

Примеры:

MCXLIV = 1000 + 100 **– 10** + 50 **– 1** + 5 = 1144

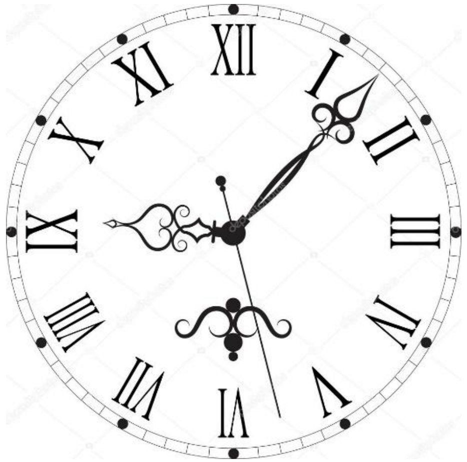
I – 1
V – 5
X – 10
L – 50
C – 100
D – 500
M – 1000

MCXLIV =

2279 = 2000 + 300 + 80 + 9

M M **CC** **LXX** **IX**

2389 = M M C C L X X I X



Римская система счисления

MCDLXVII =	**3768 =**
MMDCXLIV =	**2983 =**
MMMMCCLXXII =	**1452 =**
CMXXVIII =	**1999 =**

Двоичная система счисления

Основание (количество цифр): 2
Алфавит: 0, 1

Вся информация в компьютере представлена в виде *двоичного кода*.

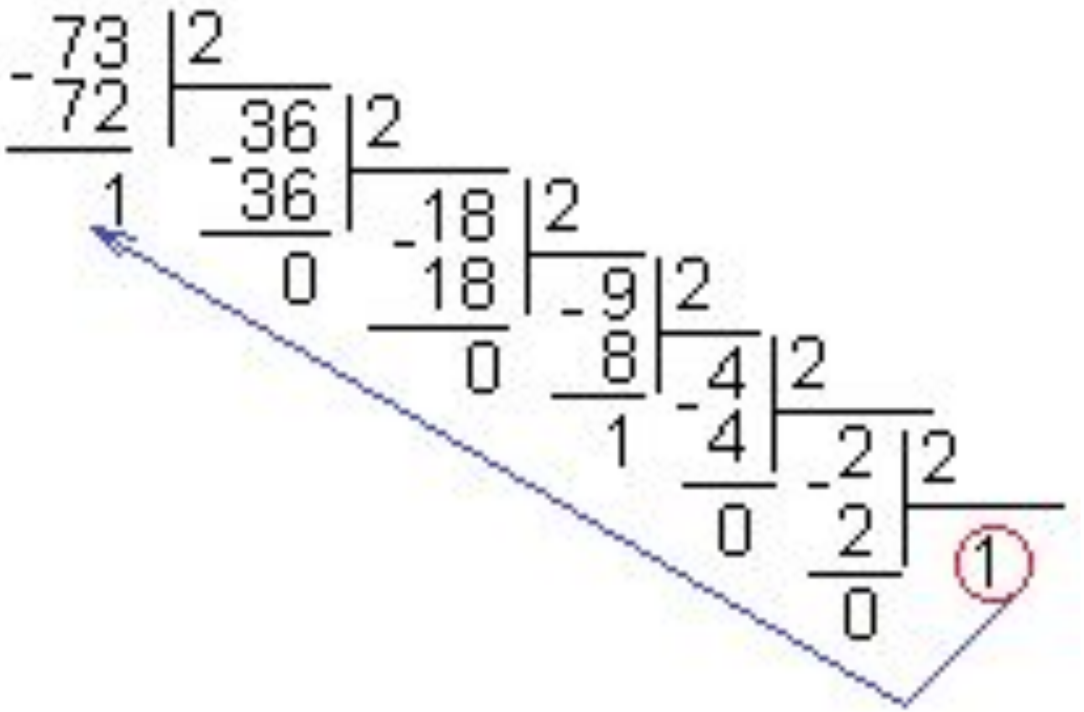
Компьютер переводит информацию (числовую, текстовую, графическую, звуковую, видео) в последовательность нулей и единиц.

То есть в компьютерах используется двоичная система счисления (СС).

Перевод из десятичной в двоичную

1-ый способ (путём деления десятичного числа на 2)

- Последовательно выполнять деление исходного целого десятичного числа и получаемых целых частных на основание системы (на 2) до тех пор, пока не получится частное, меньшее делителя, то есть меньшее 2.
- Записать полученные остатки в обратной последовательности.



Перевод из десятичной в двоичную

2-ой способ (с использованием степенного ряда числа 2)

1. Число разбивается на составные числа, взятые из степенного ряда двойки.

55

1024	**512**	**256**	**128**	**64**	**32**	**16**	**8**	**4**	**2**	**1**
2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

2. Присутствие числа записывается 1, отсутствие – 0

$$73_{10} = 64 + 8 + 1 = 1001001_2$$

Определения

Позиционная система: значение цифры определяется ее позицией в записи числа.

тысячи сотни десятки единицы

разряды: 3 2 1 0

развёрнутая форма записи числа

$$6375 = 6\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 7\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0$$

основание

6000 300 70 5

Схема Горнера: $6375 = ((6\cdot 10 + 3)\cdot 10 + 7)\cdot 10 + 5$

Плюсы схемы:

✔для вычислений не нужно использовать возведение в степень;

✔удобна при вводе чисел с клавиатуры, начиная с первой.

Перевод в десятичную систему

Через развёрнутую запись:

=1

разряды: 3 2 1 0

$$1234_{\mathbf{5}} = 1\cdot \mathbf{5}^3 + 2\cdot \mathbf{5}^2 + 3\cdot \mathbf{5}^1 + 4\boxed{\cdot \mathbf{5}^0} = 194$$

основание системы счисления

разряды: 3 2 1 0

$$a_3a_2a_1a_0 = a_3\cdot p^3 + a_2\cdot p^2 + a_1\cdot p^1 + a_0\cdot p^0$$

Через схему Горнера:

$$1234_{\mathbf{5}} = ((1\cdot \mathbf{5} + 2)\cdot \mathbf{5} + 3)\cdot \mathbf{5} + 4 = 194$$

$$a_3a_2a_1a_0 = ((a_3\cdot p + a_2)\cdot p + a_1)\cdot p + a_0$$

Перевод в десятичную систему

В двоичной СС основание равно 2, а алфавит состоит из двух цифр (0 и 1). Следовательно, числа в двоичной системе в развернутой форме записываются в виде суммы степеней основания 2 с коэффициентами, в качестве которых выступают цифры 0 или 1.

$$1011_2 = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * \underbrace{\boxed{2^0}}_{=1}$$

Вернемся к нашему примеру и запишем число **110111** ***через развернутую форму***:

разряды 6 5 4 3 2 1 0

$$1001001_2 = 1 * 2^6 + 0 * 2^5 + 0 * 2^4 + 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 +$$
$$+ 1 * 2^0 = 2^6 + 2^3 + 2^0 = 64 + 8 + 1 = 73_{10}$$

Дробные числа

$$0{,}6375 = 6\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}01 + 7\cdot 0{,}001 + 5\cdot 0{,}0001$$

Развёрнутая форма записи:

разряды: -1 -2 -3 -4

$$0{,}\,6\;3\;7\;5 = 6\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2} + 7\cdot 10^{-3} + 5\cdot 10^{-4}$$

$$0{,}\,1\;2\;3\;4_5 = 1\cdot \mathbf{5}^{-1} + 2\cdot \mathbf{5}^{-2} + 3\cdot \mathbf{5}^{-3} + 4\cdot \mathbf{5}^{-4}$$

перевод в десятичную систему

Схема Горнера:

$$0{,}\,6375 = 10^{-1}\cdot(6 + 10^{-1}\cdot(3 + 10^{-1}\cdot(7 + 10^{-1}\cdot 5)))$$

$$0{,}1234_5 = \mathbf{5}^{-1}\cdot(1 + \mathbf{5}^{-1}\cdot(2 + \mathbf{5}^{-1}\cdot(3 + \mathbf{5}^{-1}\cdot 4)))$$

перевод в десятичную систему

Арифметические операции

сложение

$0+0=0 \quad 0+1=1$

$1+0=1 \quad 1+1=10_2$

$1+1+1=11_2$

перенос

$$
\begin{array}{r}
1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1 \\
1\,0\,1\,1\,0_2 \\
+\ 1\,1\,1\,0\,1\,1_2 \\
\hline
1\,0\,1\,0\,0\,0\,1_2
\end{array}
$$

вычитание

$0-0=0 \quad 1-1=0$

$1-0=1 \quad 10_2-1=1$

заём

$$
\begin{array}{r}
0\ \ 1\ \ 1\ \ 10_2\ \ 0\ \ 10_2 \\
\cancel{1}\,0\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{1}\,0\,1_2 \\
-\ 1\,1\,0\,1\,1_2 \\
\hline
0\,1\,0\,1\,0\,1\,0_2
\end{array}
$$

Арифметические операции

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ +\ 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10111_2 \\ +101110_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ -\ 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 110101_2 \\ -\ 11011_2 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

умножение

$$
\begin{array}{r}
10101_2 \\
\times \quad 101_2 \\
\hline
10101_2 \\
+\,10101_2 \\
\hline
\boxed{1101001_2}
\end{array}
$$

деление

$$
\begin{array}{r|l}
10101_2 & 111_2 \\
\cline{2-2}
-\;111_2 & \boxed{11_2} \\
\cline{1-1}
111_2 & \\
-\,111_2 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Домашнее задание:

Переведите число из двоичной СС в десятичную

$$101110_2 \rightarrow ?_{10}$$