Действительный анализ

Основной источник : *Смагин В.В. Действительный анализ. Учебное пособие. 2014 год.*

(см. https://vk.com/fd_an)

Дополнительная литература

1. *Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная, 1967 г.*
2. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу, 1979 г.*
3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 1976 г.*

(см. https://vk.com/fd_an и https://vk.com/func_an)

Глава 1.
Интеграл Лебега

(продолжение)

7. Интеграл Римана и критерий Лебега

Теорема (Лебега) 5. *Ограниченная на отрезке* $[a, b]$ *функция* $x(t)$ *интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда множество ее точек разрыва есть ММН.*

(Без доказательства).

Примеры

1. Всякая ограниченная кусочно–непрерывная на отрезке функция интегрируема по Риману на этом отрезке.

2. Всякая ограниченная и монотонная на отрезке функция интегрируема по Риману на этом отрезке, так как множество ее точек разрыва не более чем счетно.

3. Функция Дирихле на отрезке $[0,1]$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1] \cap \mathrm{Q}, \\ 0, & t \in [0,1] \setminus \mathrm{Q}. \end{cases}$$

Функция Дирихле не интегрируема по Риману на отрезке $[0,1]$, так как разрывна в каждой точке этого отрезка.

8. Суммируемые функции

Функция $x(t)$, определенная п.в. на $[a, b]$ называется *суммируемой*, если п.в. на $[a, b]$ функция

$$x(t) = f(t) - g(t),$$

где $f, g \in C^+$. Заметим, что указанное представление суммируемой функции в виде разности двух функций из C^+ не однозначно. Множество всех функций, суммируемых на $[a, b]$, будем обозначать $L[a, b]$ или просто L.

Очевидно, что всякая суммируемая функция измерима.

Если $x \in C^+$, то $x \in L$, то есть $C^+[a,b] \subset L[a,b]$.

Заметим также, что если на $[a,b]$ выполняется $x(t) \overset{\text{п.в.}}{=} y(t)$ и функция $x \in L$, то и функция $y \in L$.

Лемма 14. *Пусть функции* $x, y \in L$. *Тогда множеству* L *принадлежат и следующие функции:*

$x(t)+y(t)$, $\alpha x(t)$ *при* $\alpha \in \mathbb{R}$, $|x(t)|$, $\min\{x(t), y(t)\}$, $\max\{x(t), y(t)\}$.

Доказательство. Пусть $x(t) = f_1(t) - g_1(t)$ и $y(t) = f_2(t) - g_2(t)$, где $f_1, g_1, f_2, g_2 \in C^+$.
Тогда $x + y = (f_1 + f_2) - (g_1 + g_2) \in L$, так как по лемме 9 $f_1 + f_2$, $g_1 + g_2 \in C^+$.

Для функции $\alpha x(t)$ в случае $\alpha \geq 0$ получим $\alpha x = (\alpha f_1) - (\alpha g_1) \in L$, так как опять по лемме 9 $\alpha f_1, \alpha g_1 \in C^+$.

В случае $\alpha < 0$ получим $\alpha x = (-\alpha g_1) - (-\alpha f_1) \in L$, ибо здесь $-\alpha > 0$ и $-\alpha g_1, -\alpha f_1 \in C^+$.

Для функции $|x(t)|$ отметим представление

$$|x(t)| = \max\{f_1(t), g_1(t)\} - \min\{f_1(t), g_1(t)\}.$$

Так как (лемма 9)

$$\max\{f_1(t), g_1(t)\}, \min\{f_1(t), g_1(t)\} \in C^+,$$

то и $|x(t)| \in L$.

Наконец, из равенств

$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|), \quad \max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$$

следует, что $\min\{x(t), y(t)\} \in L$ и $\max\{x(t), y(t)\} \in L$.

Лемма доказана.

Из леммы 14, в частности, следует, что $L[a, b]$ является линейным пространством.

Определим для функции $x \in L$ *интеграл*. Пусть $x(t) = f(t) - g(t)$, где $f, g \in C^+$. Положим по определению

$(L)Ix = (C^+)If - (C^+)Ig.$

Покажем, что это определение корректно, то есть не зависит от представления $x = f - g$. Пусть есть еще представление $x(t) = f_1(t) - g_1(t)$. Тогда $f - g = f_1 - g_1$ и, следовательно,

$f + g_1 = f_1 + g.$

Отсюда получим

$(C^+)I(f + g_1) = (C^+)I(f_1 + g).$

Учитывая свойства интеграла в C^+, приходим к равенству $(C^+)If - (C^+)Ig = (C^+)If_1 - (C^+)Ig_1$, которое означает, что определение $(L)Ix$ корректно.

Обратим внимание, что если $x \in C^+$, то
$(C^+)Ix = (L)Ix.$

Далее, если $x \in L$ и $x(t) \overset{\text{п.в.}}{=} y(t)$, то $(L)Ix = (L)Iy.$

Лемма 15. (Свойства интеграла) *Пусть функции* $x, y \in L$. *Тогда:*

1) $(L)I(x+y) = (L)Ix + (L)Iy$;

2) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,[\,(L)I(\alpha\, x) = \alpha (L)Ix]$.

Доказательство. Пусть $x(t) = f_1(t) - g_1(t)$ и $y(t) = f_2(t) - g_2(t)$, где $f_1, g_1, f_2, g_2 \in C^+$.

Тогда $x + y = (f_1 + f_2) - (g_1 + g_2)$ и 1) следует из равенства

$$(L)I(x+y) = (C^+)I(f_1+f_2) - (C^+)I(g_1+g_2) =$$

$$= ((C^+)If_1 - (C^+)Ig_1) + ((C^+)If_2 - (C^+)Ig_2) =$$

$$= (L)Ix + (L)Iy.$$

Докажем 2). Если $\alpha \geq 0$, то

$$(L)I(\alpha\, x) = (C^+)I(\alpha\, f_1) - (C^+)I(\alpha\, g_1) =$$

$$= \alpha(C^+)I\, f_1 - \alpha(C^+)I\, g_1 = \alpha((C^+)I\, f_1 - (C^+)I\, g_1) = \alpha(L)I\, x.$$

Если же $\alpha < 0$, то $-\alpha > 0$ и

$$(L)I(\alpha\, x) = (L)I((-\alpha)g_1 - (-\alpha)f_1) =$$

$$= (C^+)I((-\alpha)g_1) - (C^+)I((-\alpha)f_1) =$$

$$= (-\alpha)(C^+)I\, g_1 - (-\alpha)(C^+)I\, f_1 =$$

$$= \alpha((C^+)I\, f_1 - (C^+)I\, g_1) = \alpha(L)I\, x.$$

Лемма доказана.

Лемма 16. (Свойства интеграла) *Пусть* $x, y \in L[a, b]$.

1. Если $x(t) \geq 0$ *п.в. на* $[a, b]$, *то* $(L)Ix \geq 0$.

2. Если $x(t) \leq y(t)$ *п.в. на* $[a, b]$, *то* $(L)Ix \leq (L)Iy$.

3. $|\,(L)I\,x\,| \leq (L)I\,|\,x\,|$.

Доказательство. Пусть $x(t) = f(t) - g(t)$, где $f, g \in C^+$, и $x(t) \geq 0$. Тогда $f(t) \geq g(t)$ и, в силу следствия из леммы 10, $(C^+)If \geq (C^+)Ig$. Следовательно, $(L)Ix = (C^+)If - (C^+)Ig \geq 0$. Таким образом, доказали пункт 1.

Пункт 2 следует из пункта 1, если рассмотреть функцию $y(t) - x(t) \geq 0$.

Пункт 3 следует из неравенств $-|x(t)| \leq x(t) \leq |x(t)|$ и пункта 2.

Лемма доказана.

Далее, если не будет возникать особой необходимости, $(L)Ix$ будем обозначать просто Ix.