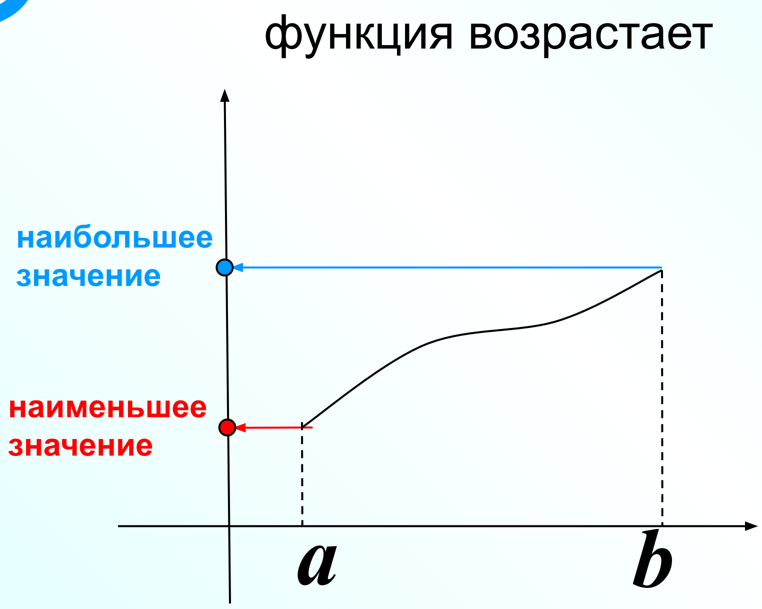
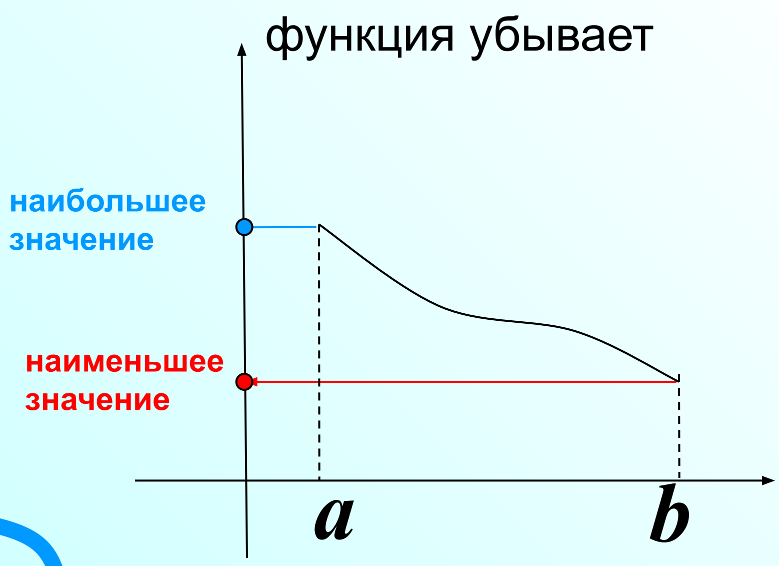
ЕГЭ-20

задачи №12

12. Наибольшее и наименьшее значение функций
Исследование степенных и иррациональных функций просмотреть (55 шт.)
Исследование частных просмотреть (11 шт.)
Исследование произведений просмотреть (29 шт.)
Исследование показательных и логарифмических функций просмотреть (23 шт.)
Исследование тригонометрических функций просмотреть (28 шт.)
Исследование функций без помощи производной просмотреть (16 шт.)





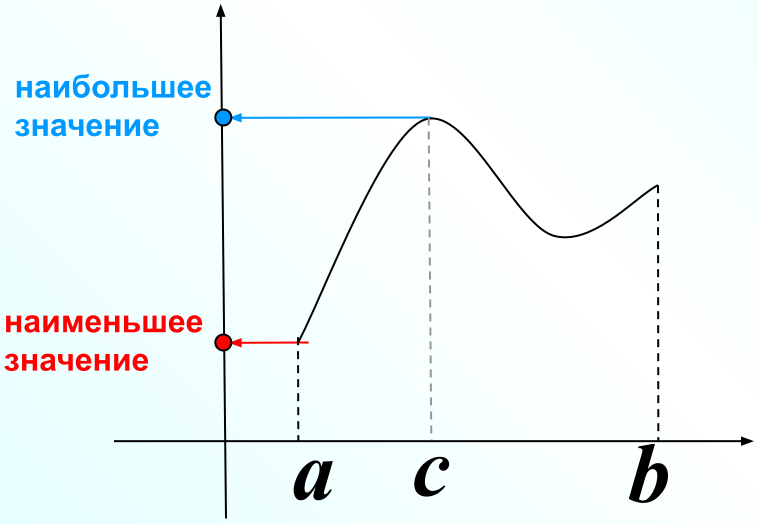
Предположим, что функция f не имеет на отрезке [a; b] критических точек.

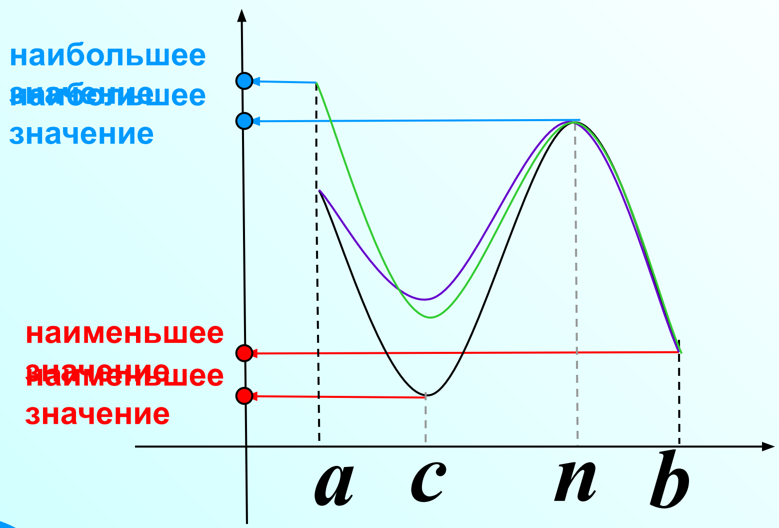
Тогда она возрастает (рис. 1) или убывает (рис. 2) на этом отрезке.

Значит,

наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке [a; b] — это значения в концах a и b.

Примеры





Пусть теперь функция f имеет на отрезке [a; b] конечное число критических точек.

Наибольшее и наименьшее значения функция f может принимать в критических точках функции или в точках a и b.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Вывод :

Если поведение функции постоянно внутри отрезка, то своего наибольшего и наименьшего значения она достигает в концах отрезка

Если поведение функции внутри отрезка не постоянно, то функция может достигать своего наибольшего и наименьшего значения либо в концах отрезка, либо в точках экстремума

1.

Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке [0; 4]

Значения функции в концах отрезка.

1) $y(0) = 0$

$y(4) = 4^3 - 27 \cdot 4 = -44$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$2)\ y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(\underbrace{x - 3}_{3})(\underbrace{x + 3}_{-3})$$

$x = 3 \in [0; 4]$

$x = -3 \notin [0; 4]$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$

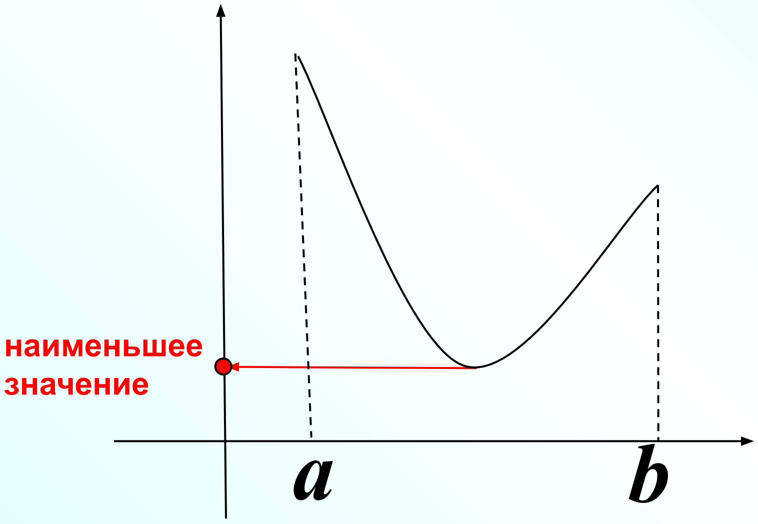
Выбрать наименьшее из полученных значений.

№12	-	5	4			

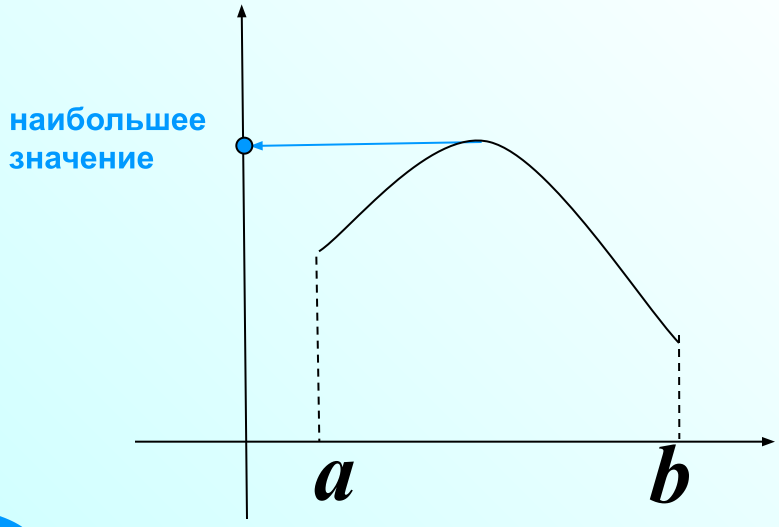
Выполнение этапов решения можно изменить, как вам удобно.

Этапы	Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0; 4]$
1. Найти $f'(x)$	1) $y' = 3x^2 - 27$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	2) $y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(\overset{3}{x - 3})(\overset{-3}{x + 3})$ $x = 3 \in [0; 4]$ $x = -3 \notin [0; 4]$
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	3) $y(0) = 0$ $y(4) = 4^3 - 27 \cdot 4 = -44$ $y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее или наибольшее	№12 - 5 4

Предположим, что функция f имеет на отрезке [a; b] **одну** точку экстремума.

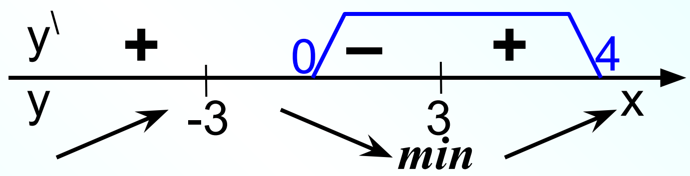


Если это точка минимума, то в этой точке функция будет принимать наименьшее значение.



Если это точка максимума, то в этой точке функция будет принимать наибольшее значение.

Другой способ решения

Этапы	Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке [0; 4]
1. Найти $f'(x)$	1) $y' = 3x^2 - 27$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	2) $y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(\underset{3}{x - 3})(\underset{-3}{x + 3})$ 
3. Вычислить значения функции в критических точках ~~и на концах отрезка.~~	3) $y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$
~~4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее~~	**№ 12** - 5 4 **Этот способ будет удобно вспомнить, когда вычисления значений функции в концах отрезка будет сложным.**

Наименьшее значение функция будет принимать в точке минимума. Можно сэкономить на вычислениях значений функции в концах отрезка.

2. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке $[-2; 0]$

Значения функции в концах отрезка.

1) $y(0) = 4$

$y(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 4 = 2$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

2) $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(\underbrace{x - 1}_{1})(\underbrace{x + 1}_{-1})$

$x = 1 \notin [-2; 0]$

$x = -1 \in [-2; 0]$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$y(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 4 = 6$

Выбрать наибольшее из полученных значений.

№ 12	6					

3. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ на отрезке $[\,1;\,4\,]$

Значения функции в концах отрезка.

1) $y(1) = 1 - 2 + 1 + 3 = 3$

$y(4) = 4^3 - 2 \cdot 4^2 + 4 + 3 = 39$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

2) $y' = 3x^2 - 4x + 1 = 3(x-1)(x-\frac{1}{3})$

$3x^2 - 4x + 1 = 0$

$D = 16 - 4*3*1 = 4$

$x_1 = \frac{4+2}{6} = 1 \in [1;4]$

$x_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3} \notin [1;4]$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$y(1) = 3$

Выбрать наименьшее из полученных значений.

№ 12	3					

4. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7$ на отрезке [-3; 3]

Значения функции в концах отрезка.

$$y(-3) = \frac{(-3)^3}{3} - 9(-3) - 7 = -9 + 27 - 7 = 11$$

$$y(3) = \frac{3^3}{3} - 9 \cdot 3 - 7 = 9 - 27 - 7 = -25$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = \frac{3x^2}{3} - 9 = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

x = 3 $\in$ [-3; 3]

x = –3 $\in$ [-3; 3]

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

y(-3) = 11

y(-3) = -25

Выбрать наибольшее из полученных значений.

В 11	1	1				

5. Найдите наибольшее значение функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$ на отрезке [1; 9]

Значения функции в концах отрезка.

$$y(1) = 1^{\frac{3}{2}} - 3\cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$$

$$y(9) = 9^{\frac{3}{2}} - 3\cdot 9 + 1 = (3^2)^{\frac{3}{2}} - 27 + 1 =$$

$$= 27 - 27 + 1 = 1$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3 = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 = 0 \quad / \cdot 2$$

$$3\sqrt{x} - 6 = 0$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4 \in [1;\ 9]$$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y(4) = 4^{\frac{3}{2}} - 3\cdot 4 + 1 = (2^2)^{\frac{3}{2}} - 12 + 1 =$$

$$= 8 - 12 + 1 = -3$$

Выбрать наибольшее из полученных значений.

№ 12	1					

6. Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 3x + 1$ на отрезке [1; 9]

$$y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$$

$$y = x \cdot x^{\frac{1}{2}} - 3x + 1$$

$$y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$$

Запишем функцию в удобном для дифференцирования виде

Значения функции в концах отрезка.

$$y(1) = 1^{\frac{3}{2}} - 3\cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$$

$$y(9) = 9^{\frac{3}{2}} - 3\cdot 9 + 1 = (3^2)^{\frac{3}{2}} - 27 + 1 =$$

$$= 27 - 27 + 1 = 1$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3 = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 = 0 \quad \cdot 2$$

$$3\sqrt{x} - 6 = 0$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4 \in [1; 9]$$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y(4) = 4^{\frac{3}{2}} - 3\cdot 4 + 1 = (2^2)^{\frac{3}{2}} - 12 + 1 =$$

$$= 8 - 12 + 1 = -3$$

Выбрать наименьшее из полученных значений.

№ 12	-	3				

7. Найдите наименьшее значение функции $y=\frac{x^2+25}{x}$ на отрезке [-10; 1]

$$y = x + 25\cdot\frac{1}{x}$$

D(y): $x \neq 0$

Значения функции в концах отрезка.

$$y(-10) = -10 + 25\cdot\frac{1}{-10} = -10 - 2{,}5 = -12{,}5$$

$$y(1) = 1 + 25 = 26$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = 1 + 25\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2-25}{x^2} = \frac{(x-5)(x+5)}{x^2}$$

$x = 5 \notin$ [-10; 1]

$x = -5 \in$ [-10; 1]

$x = 0 \notin$ D(y)

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y(-5) = -5 + 25\cdot\frac{1}{-5} = -5 - 5 = -10$$

Выбрать наименьшее из полученных значений.

№ 12	-	1	2	,	5	

Запишем функцию в удобном для дифференцирования виде

$$y = \frac{x^2}{x} + \frac{25}{x}$$

$$y = x + 25\cdot\frac{1}{x}$$

7. Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{x^2+25}{x}$ на отрезке [-10; 1]

D(y): $x \neq 0$

Значения функции в концах отрезка.

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

Выбрать наименьшее из полученных значений.

Можно решить задание, применив формулу:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

№ 12 | - | 1 | 2 | , | 5 |

8. Найдите наибольшее значение функции $y = x + \dfrac{36}{x}$ на отрезке [1; 9]

D(y): x ≠ 0

$$y = x + 36 \cdot \frac{1}{x}$$

Запишем функцию в удобном для дифференцирования виде

Значения функции в концах отрезка.

$$y(1) = 1 + 36 \cdot \frac{1}{1} = 37$$

$$y(9) = 9 + 36 \cdot \frac{1}{9} = 9 + 4 = 13$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = 1 + 36 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{36}{x^2} = \frac{x^2 - 36}{x^2} =$$

$$= \frac{(x-6)(x+6)}{x^2}$$

x = 6 ∈ [1; 9]

x = –6 ∉ [1; 9]

x = 0 ∉ D(y)

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y(6) = 6 + 36 \cdot \frac{1}{6} = 6 + 6 = 12$$

Выбрать наибольшее из полученных значений.

№ 12 | 3 | 7

9. Найдите наибольшее значение функции $y=(8-x)e^{x-7}$ на отрезке [3; 10]

1). Первое число меньше 1, т.к. знаменатель $e^4 > 5$.
2). Второе число – отрицательное.
3). Значит, наибольшее число 1.

$$3-3)e^{-4}=\frac{5}{e^{4}}$$

$$y(10) = (8-10)e^{3}=-2e^{3}$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = (8-x)'e^{x-7} + (8-x)(e^{x-7})' =$$

$$= -e^{x-7} + (8-x)e^{x-7} = e^{x-7}(-1+8-x) =$$

$$= e^{x-7}(7-x)$$

7

x = 7 ∈ [3; 10]

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

Выбрать наибольшее из полученных значений.

1

$$y(7) = (8-7)e^{7-7} = 1e^{0} = 1$$

№ 12	1					

10. Найдите наименьшее значение функции $y=\left(x^2-8x+8\right)e^{2-x}$ на отрезке [1; 7]

Значения функции в концах отрезка.

$$y(1)=(1-8+8)e^1=e$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$y(7)=(49-56+8)e^{-5}=\frac{1}{e^5}$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = (x^2-8x+8)'e^{2-x} + (x^2-8x+8)(e^{2-x})' =$$

$$=(2x-8)e^{2-x} + (x^2-8x+8)e^{2-x}(-1) =$$

$$=e^{2-x}(2x-8-x^2+8x-8) = e^{2-x}(-x^2+10x-16) =$$

$$=-e^{2-x}(x^2-10x+16) = -e^{2-x}(x-8)(x-2)$$

8 2

x = 2 ∈ [1; 7]

x = 8 ∉ [1; 7]

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

Наименьшее число – 4, т.к. первые два положительные.

1

$$y(2)=(4-16+8)e^0=-4$$

Выбрать наименьшее из полученных значений.

№12	-	4				

$(lnx)' = \frac{1}{x}$

11. Найдите наибольшее значение функции
y = ln(x+5)^5 – 5x на отрезке [-4,5; 0]

1. Найти f $'$(x)

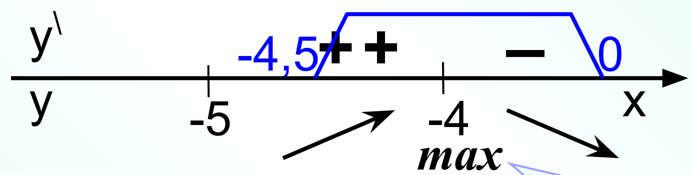
y = 5ln(x+5) – 5x

$$y' = 5 \cdot \frac{1}{x+5} - 5 = \frac{5}{x+5} - 5 = \frac{-5x-20}{x+5} =$$

Запишем функцию в удобном для дифференцирования виде

$$= \frac{-5(x+4)}{x+5} \qquad x = -4 \in [-4,5;\ 0]$$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.



Можно рассуждать иначе

Наибольшее значение функция будет принимать в точке максимума. Можно сэкономить на вычислениях значений функции в концах отрезка.

3. Вычислить значения функции в критических точках ~~и на концах отрезка.~~

0

$$y(-4) = \ln 1^5 - 5 \cdot (-4) =$$
$$= 0 + 20 = 20$$

4. ~~Из вычисленных значений выбрать наименьшее или наибольшее.~~

№12 | 2 | 0

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

12. Найдите наибольшее значение функции

$y = \ln(11x) - 11x + 9$ на отрезке $\left[\frac{1}{22}; \frac{5}{22}\right]$

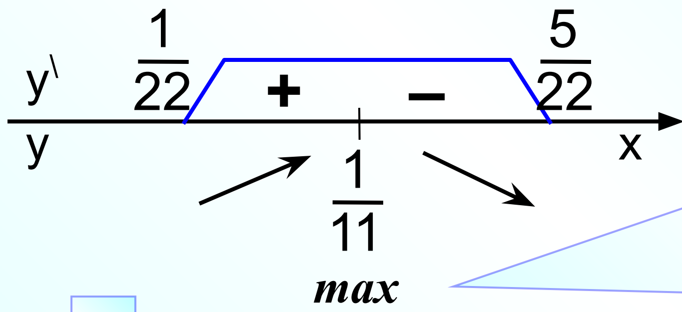
1. Найти $f'(x)$

$$y' = \frac{1}{11x}\cdot(11x)' - 11 = \frac{1}{11x}\cdot 11 - 11 = \frac{}{x} - 11 =$$

$$= \frac{1-11x}{x}$$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$x = \frac{1}{11} \in \left[\frac{1}{22}; \frac{5}{22}\right]$$



Наибольшее значение функция будет принимать в точке максимума. Можно сэкономить на вычислениях значений функции в концах отрезка.

0

$$y\left(\frac{1}{11}\right) = \ln 1 - 1 + 9 = 0 - 1 + 9 = 8$$

№ 12	8					

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

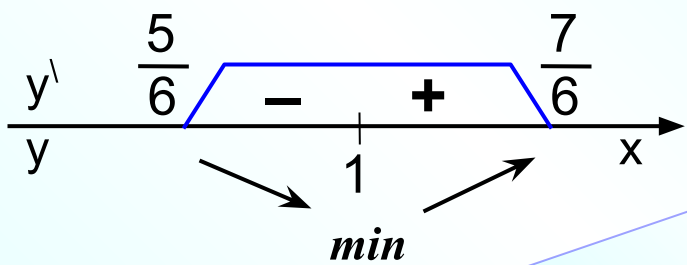
13. Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 5x + \ln x - 3$ на отрезке $\left[\frac{5}{6}; \frac{7}{6}\right]$

1. Найти $f'(x)$

$$y' = 4x - 5 + \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 5x + 1}{x} = \frac{4(x-1)(x-\frac{1}{4})}{x}$$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$x = 1 \in \left[\frac{5}{6}; \frac{7}{6}\right]$



Наименьшее значение функция будет принимать в точке минимума. Можно сэкономить на вычислениях значений функции в концах отрезка.

0

$$y(1) = 2 - 5 + \ln 1 - 3 = 2 - 8 = -6$$

№12	-	6				

$(\cos x)' = -\sin x$

14. Найдите наибольшее значение функции

$y = 7\cos x + 16x - 2$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$

1. Найти $f'(x)$

$$y' = -7\sin x + 16$$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$-7\sin x + 16 = 0$$

$$\sin x = \frac{16}{7}$$

$$\varnothing \quad т.к. \quad \sin x \in [-1;1]$$

Функция на всей области определения возрастает. Нетрудно догадаться, что $y' > 0$.
Тогда наибольшее значение функция будет иметь в правом конце отрезка, т.е. в точке x=0.

0

$$y\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 7\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 16\cdot\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - 2 = -24\pi - 2$$

$$y(0) = 7\cos 0 + 16\cdot 0 - 2 = 7 - 2 = 5$$

Если вы не догадались, то вычислите значения функции в каждом конце отрезка и выберите наибольшее.

№ 12	5					

$(\sin x)' = \cos x$

15. Найдите наибольшее значение функции

$y = 10\sin x - \frac{36}{\pi}x + 7$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6};\ 0\right]$

1. Найти $f'(x)$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$y' = 10\cos x - \frac{36}{\pi}$$

$$10\cos x = \frac{36}{\pi}$$

$$\cos x = \frac{36}{10\pi}$$

$$\varnothing \quad т.к. \quad \cos x \in [-1;1]$$

Критических точек нет. Тогда наибольшее значение функция будет принимать в одном из концов отрезка.

Можно было и раньше догадаться, что наибольшее значение будет именно в левом конце отрезка! Как?

$$y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 10\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{36}{\pi}\cdot\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + 7 = -10\cdot\frac{1}{2} + 30 + 7 = 32$$

Синус – нечетная функция

Формула приведения

$$y(0) = 10\sin 0 - 0 + 7 = 7$$

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

№ 12 | 3 | 2

$(\cos x)' = -\sin x$

16. Найдите наименьшее значение функции

y = 5cosx – 6x + 4 на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};\ 0\right]$

1. Найти $f'(x)$

$$y' = -5\sin x - 6$$

Функция на всей области определения убывает. Нетрудно догадаться, что $y' < 0$.
Тогда наименьшее значение функция будет иметь в правом конце отрезка, т.е. в точке x=0.

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$-5\sin x - 6 = 0$$

$$\sin x = -\frac{6}{5}$$

$$\varnothing \quad т.к. \quad \sin x \in [-1;1]$$

0

$$y\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 5\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - 6\cdot\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 4 = 9\pi + 4$$

1

$$y(0) = 5\cos 0 - 0 + 4 = 9$$

Если вы не догадались, то вычислите значения функции в каждом конце отрезка и выберите наименьшее.

№ 12	9					

17. Найдите наибольшее значение функции

$y = 12\cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

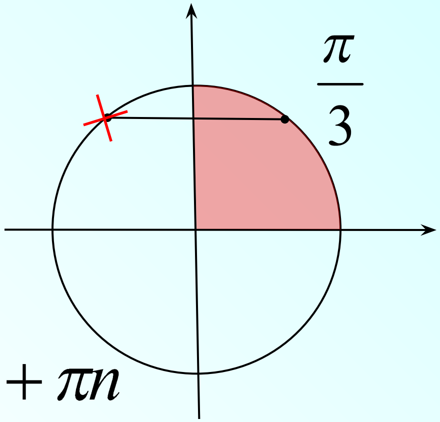
1. Найти $f'(x)$

$$y' = -12\sin x + 6\sqrt{3}$$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$-12\sin x + 6\sqrt{3} = 0$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x = (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n$$



$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12\cos\frac{\pi}{3} + 6\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 12$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12\cos\frac{\pi}{2} + 6\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 6 + \sqrt{3}\pi$$

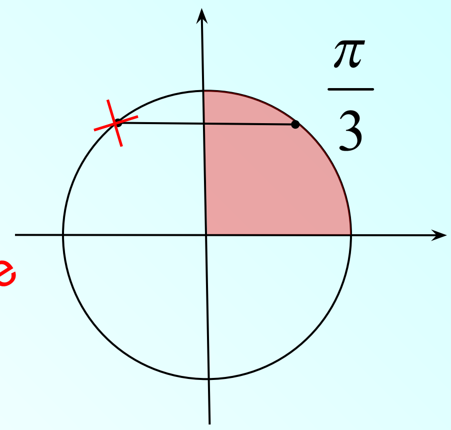
Но нам не нужны ВСЕ стационарные точки. Необходимо сделать выбор тех значений, которые попадут в заданный отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$y(0) = 12\cos 0 + 6\sqrt{3}\cdot 0 - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 18 - 2\sqrt{3}\pi$$

№ 12 | 1 | 2

17. Найдите наибольшее значение функции

$y = 12\cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$



1. Найти $f'(x)$

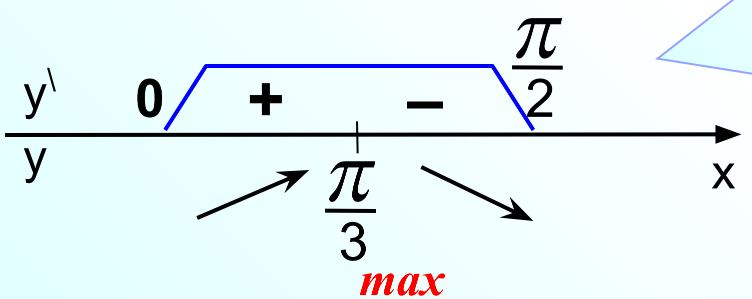
$$y' = -12\sin x + 6\sqrt{3}$$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$-12\sin x + 6\sqrt{3} = 0$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Можно рассуждать иначе



Убедимся, что данная точка является точкой максимума на заданном промежутке.
Значит, наибольшее значение функция достигает именно в этой точке.
Тогда значения функции в концах отрезка можно не считать.

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12\cos\frac{\pi}{3} + 6\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 12$$

№ 12	1	2				

18. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 11 + \frac{7\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{7\sqrt{3}}{3}x - \frac{14\sqrt{3}}{3}\cos x \quad \text{на отрезке} \quad \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$$

1. Найти $f^{/}(x)$

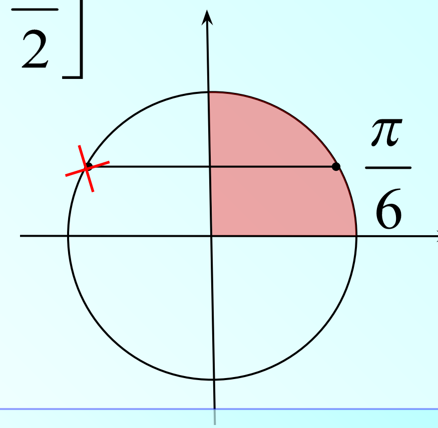
$$y^{/} = -\frac{7\sqrt{3}}{3} + \frac{14\sqrt{3}}{3}\sin x$$

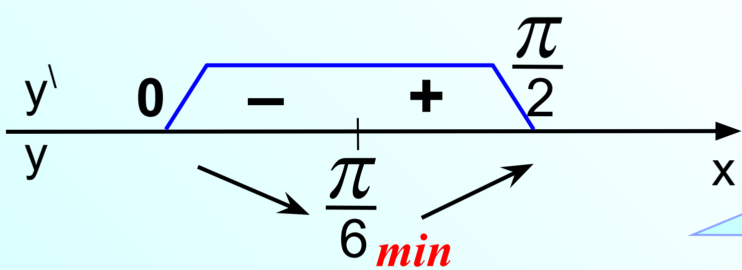
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$-\frac{7\sqrt{3}}{3} + \frac{14\sqrt{3}}{3}\sin x = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$$





Можно убедиться, что данная точка является точкой минимума на заданном промежутке. Значит, наименьшее значение функция достигает именно в этой точке.
Тогда значения функции в концах отрезка можно не считать.

Но нам не нужны ВСЕ стационарные точки. Необходимо сделать выбор тех значений, которые попадут в заданный отрезок $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$

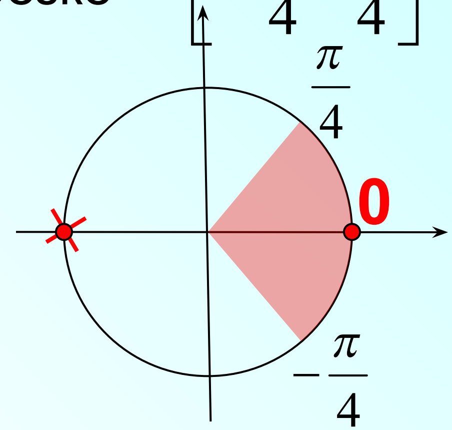
$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 11 + \frac{7\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{7\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{14\sqrt{3}}{3}\cos\frac{\pi}{6} = 11 - 7 = 4$$

№ 12	4

$$(tg\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

19. Найдите наименьшее значение функции

y = 4tgx – 4x –π + 5 на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$



1. Найти $f'(x)$

$$y' = 4\cdot\frac{1}{\cos^2 x} - 4$$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$\frac{4}{\cos^2 x} - 4 = 0$$

$$\cos^2 x = 1$$

Нам не нужны ВСЕ стационарные точки. Необходимо сделать выбор тех значений, которые попадут в заданный отрезок

3. Вычислим значения функции в критических точках и на концах отрезка. $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -4 + \pi - \pi + 5 = 1$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 - \pi - \pi + 5 = 9 - 2\pi$$

$$y(0) = -0 - 0 - \pi + 5 = 5 - \pi$$

4. Из вычисленных значений сделаем выбор наименьшего.

№ 12	1

$$(tg\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

20. Найдите наибольшее значение функции

$y = 3tgx - 3x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\ 0\right]$

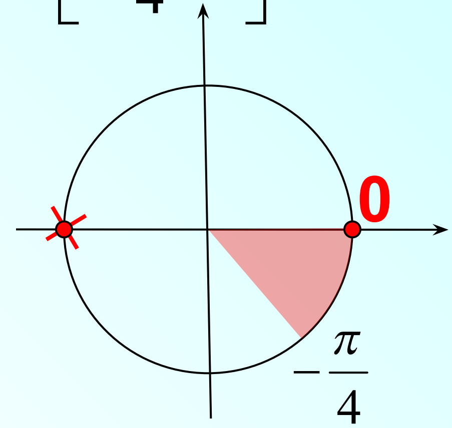
1. Найти $f'(x)$

$$y' = 3\cdot\frac{1}{\cos^2 x} - 3$$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$\frac{3}{\cos^2 x} - 3 = 0$$

$$\cos^2 x = 1$$



Нам не нужны ВСЕ стационарные точки. Необходимо сделать выбор тех значений, которые попадут в заданный отрезок $\left[-\frac{\pi}{4};\ 0\right]$

3. Вычислим значения функции в критических точках и на концах отрезка.

4. Из вычисленных значений сделаем выбор наибольшего.

-1

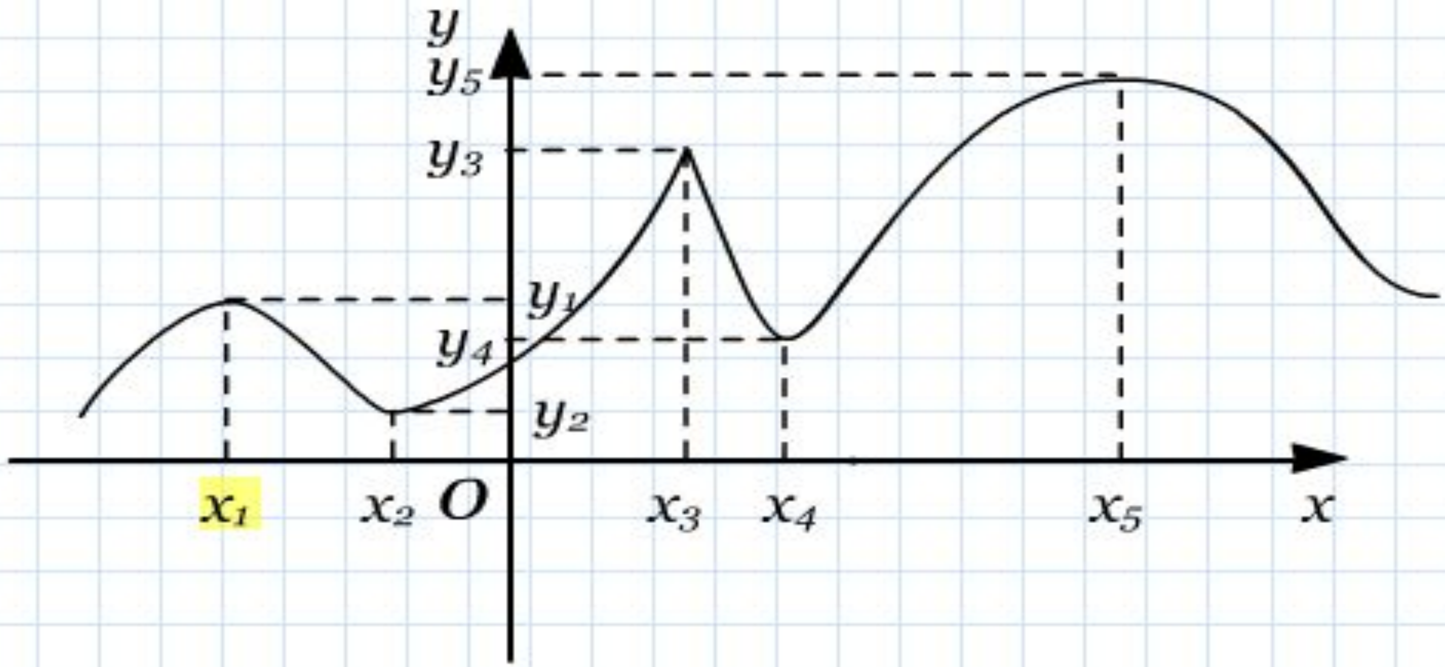
$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 3tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 3\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 5 = -3 + \frac{3\pi}{4} + 5 = 2 + \frac{3\pi}{4}$$

0

$$y(0) = 3tg\,0 - 0 + 5 = 5$$

№12 | 5

Нахождение точек *минимума (min)* и *максимума (max)* функции

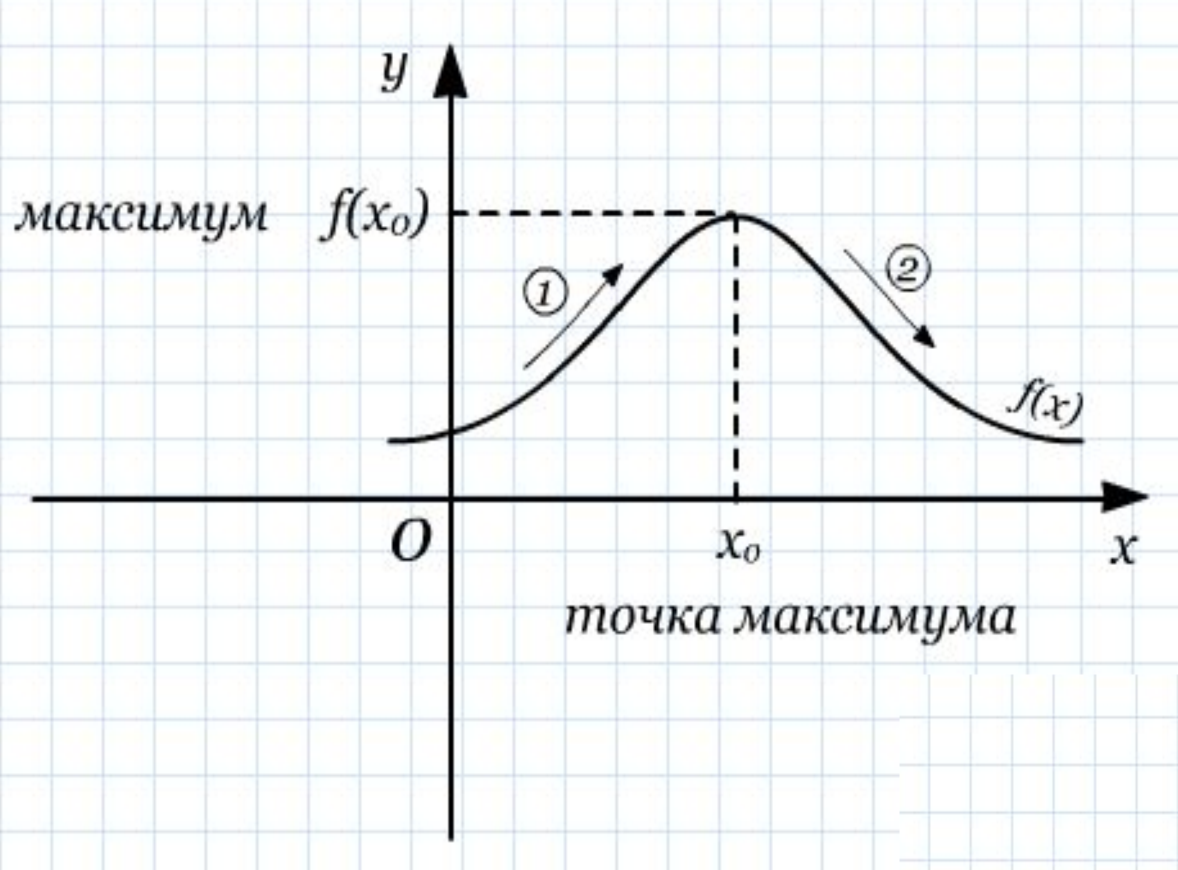


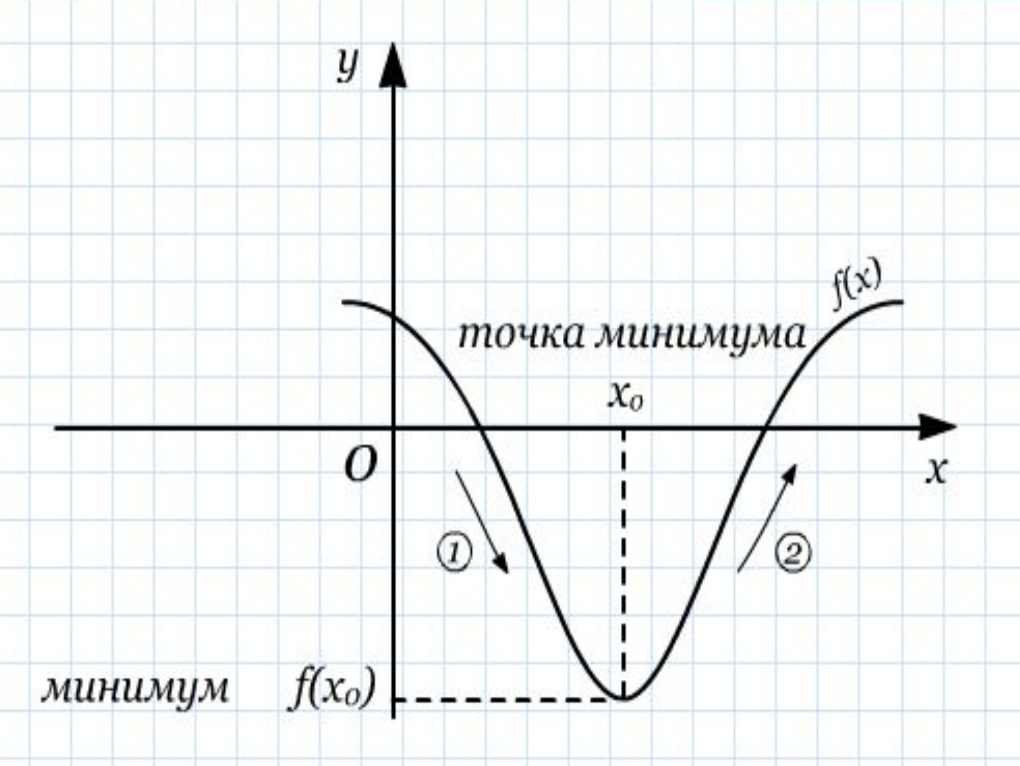
x_1, x_3 , x_5–точки максимума

y_1, y_3, y_5 –максимумы

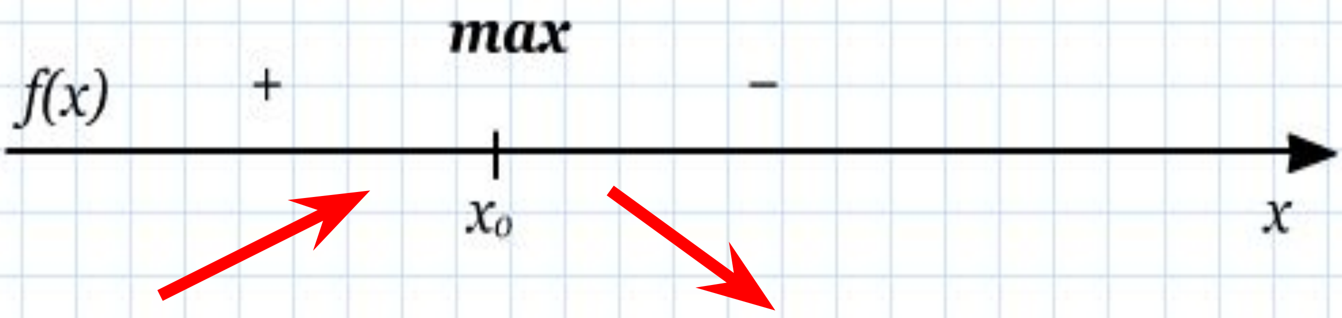
x_2, x_4–точки минимума

y_2, y_4–минимум

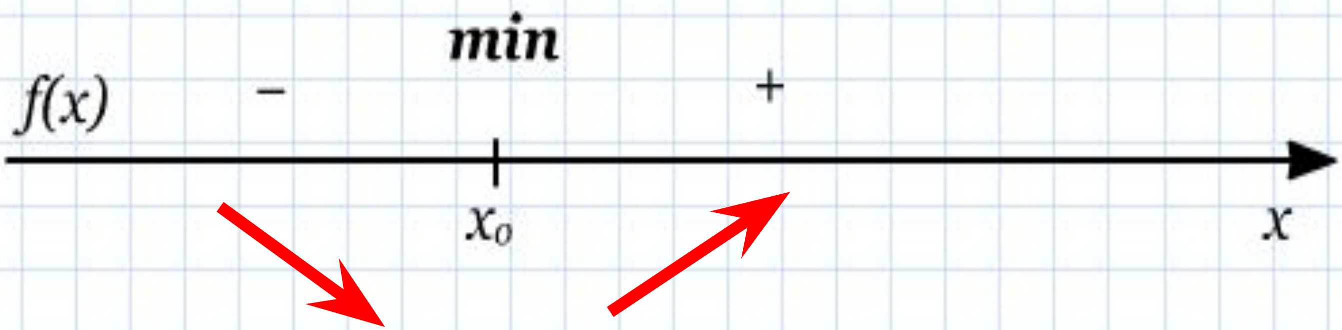

y
максимум
f(x₀)
①
②
f(x)
O
x₀
x
точка максимума

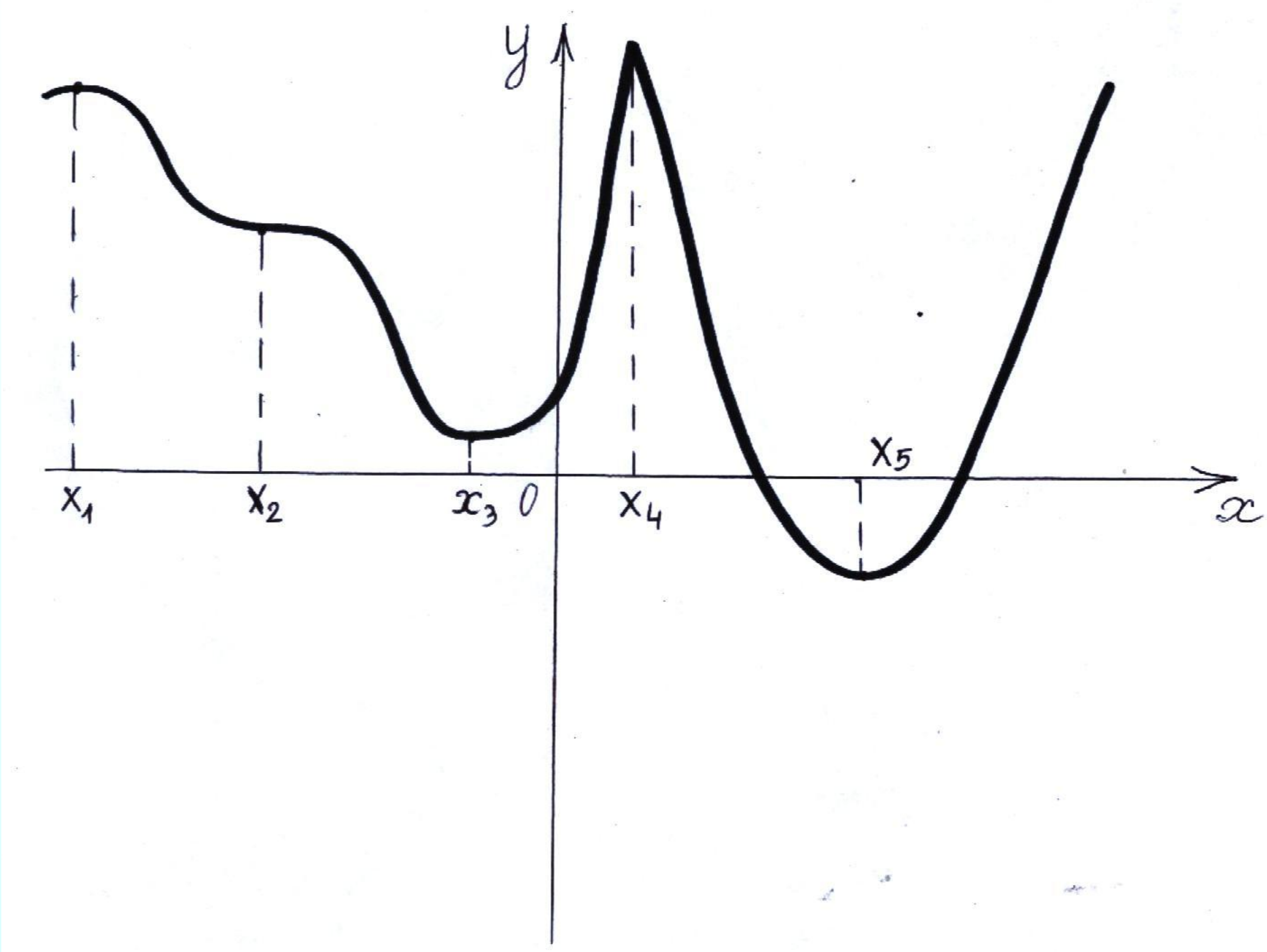

y
f(x)
точка минимума
x₀
O
x
①
②
минимум
f(x₀)

Признак максимума функции:



Признак минимума функции:




y
x
x_1
x_2
x_3
0
x_4
x_5

Алгоритм нахождения точек экстремума:

1. Найти производную функции.
2. Решить уравнение f ´(x)=0, и найти тем самым стационарные точки.
3. Методом интервалов установить промежутки знакопостоянства производной.
4. Если при переходе через точку x_0:

- - производная не меняет знак, то x_0 – точка перегиба;
- - производная меняет знак с «+» на «-», то x_0 точка максимума;
- - производная меняет знак с «-» на «+», то x_0 точка минимума.

№1 Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 48x + 17$

Решение.

1. $y = 3x^2 - 48$

2. $y'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 48 = 0 \qquad 3(x^2 - 16) = 0 \;\big|:3 \qquad (x^2 - 16) = 0$

$(x-4)(x+4) = 0 \Rightarrow (x-4) = 0 \;\; \textit{или} \;\; (x+4) = 0 \Rightarrow \;\; x = 4 \;\; \textit{или} \;\; x = -4$

3.

$y'(x)$	$+$	max	$-$	min	$+$	
$y(x)$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	4	$\nearrow$	x

4. $x_{\max} = -4$

№12	-	4				