

ЕГЭ-2

задачи №12

12. Наибольшее и наименьшее значение функций

Исследование степенных и иррациональных функций
посмотреть (55 шт.)

Исследование частных посмотреть (11 шт.)

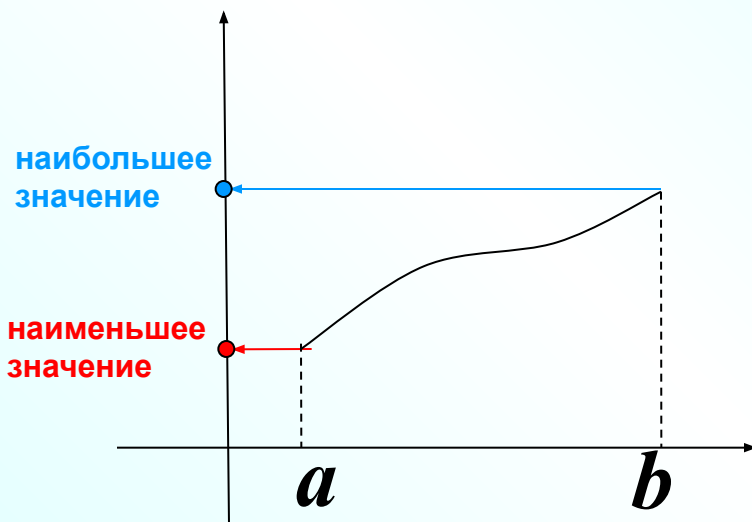
Исследование произведений посмотреть (29 шт.)

Исследование показательных и логарифмических функций посмотреть (23 шт.)

Исследование тригонометрических функций
посмотреть (28 шт.)

Исследование функций без помощи производной
посмотреть (16 шт.)

функция возрастает



Предположим, что функция f не имеет на отрезке $[a; b]$ критических точек.

Тогда она возрастает (рис. 1) или убывает (рис. 2) на этом отрезке.

Значит,

наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке $[a; b]$ — это значения в концах a и b .

функция убывает

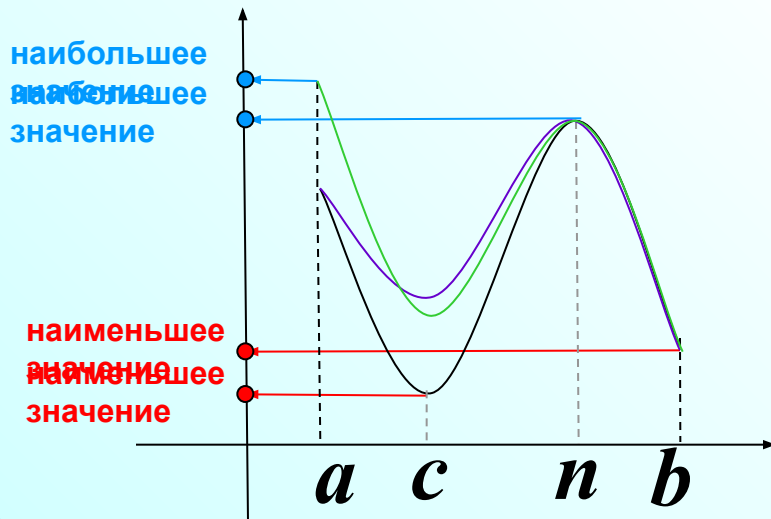
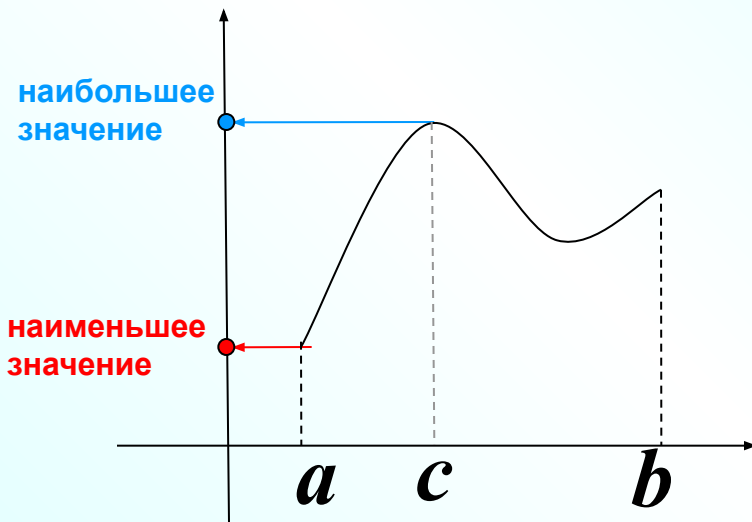


Примеры

Пусть теперь функция f имеет на отрезке $[a; b]$ конечное число критических точек.

Наибольшее и наименьшее значения функция f может принимать в критических точках функции или в точках a и b .

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.



Вывод :



Если поведение функции постоянно внутри отрезка, то своего наибольшего и наименьшего значения она достигает в концах отрезка

Если поведение функции внутри отрезка не постоянно, то функция может достигать своего наибольшего и наименьшего значения либо в концах отрезка, либо в точках экстремума

1.

Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0; 4]$

Значения функции в концах отрезка.

$$1) y(0) = 0$$

$$y(4) = 4^3 - 27 \cdot 4 = -44$$

$$2) y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x - 3)(x + 3)$$

$$x = 3 \in [0; 4]$$

$$x = -3 \notin [0; 4]$$

$$y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

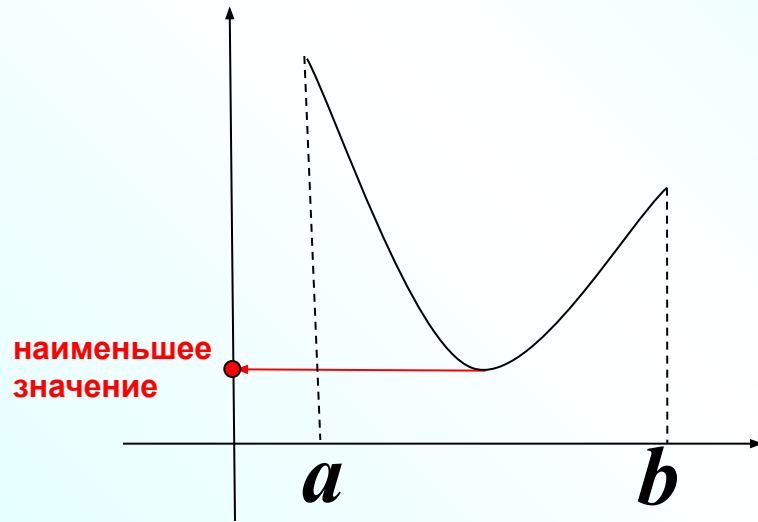
Выбрать наименьшее из полученных значений.

№12	-	5	4			
-----	---	---	---	--	--	--

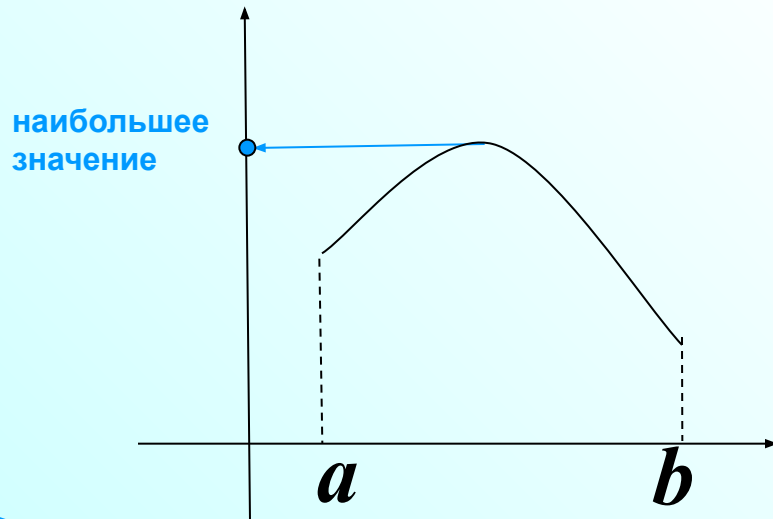
Выполнение этапов решения можно изменить, как вам удобно.

Этапы	Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0; 4]$
1. Найти $f'(x)$	1) $y' = 3x^2 - 27$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	2) $y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x - 3)(x + 3)$ $x = 3 \in [0; 4]$ $x = -3 \notin [0; 4]$
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	3) $y(0) = 0$ $y(4) = 4^3 - 27 \cdot 4 = -44$ $y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее или наибольшее	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">№12 - 5 4 </div>

Предположим, что функция f имеет на отрезке $[a; b]$ **одну** точку экстремума.



Если это точка минимума, то в этой точке функция будет принимать наименьшее значение.



Если это точка максимума, то в этой точке функция будет принимать наибольшее значение.

Другой способ решения

Этапы	Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0; 4]$
1. Найти $f'(x)$	1) $y' = 3x^2 - 27$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	2) $y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x - 3)(x + 3)$ 
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	3) $y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$ <div data-bbox="1335 739 1850 1229" style="border: 1px solid blue; padding: 5px; color: red; font-weight: bold;">Наименьшее значение функция будет принимать в точке минимума. Можно сэкономить на вычислениях значений функции в концах отрезка.</div>
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее	<div data-bbox="687 1043 1277 1158" style="border: 2px solid red; padding: 5px; display: inline-block;">№ 12 - 5 4</div> <p>Этот способ будет удобно вспомнить, когда вычисления значений функции в концах отрезка будет сложным.</p>

2. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке $[-2; 0]$

Значения функции в концах отрезка.

$$1) y(0) = 4$$

$$y(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 4 = 2$$

$$2) y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$$

$$x = 1 \notin [-2; 0]$$

$$x = -1 \in [-2; 0]$$

$$y(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 4 = 6$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

Выбрать наибольшее из полученных значений.

№ 12

6

3. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ на отрезке $[1; 4]$

Значения функции в концах отрезка.

$$1) y(1) = 1 - 2 + 1 + 3 = 3$$

$$y(4) = 4^3 - 2 \cdot 4^2 + 4 + 3 = 39$$

$$2) y' = 3x^2 - 4x + 1 = 3(x - 1)(x - \frac{1}{3})$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4$$

$$x_1 = \frac{4+2}{6} = 1 \in [1; 4]$$

$$x_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3} \notin [1; 4]$$

$$y(1) = 3$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку. Выбрать наименьшее из полученных значений.

№ 12

3

4. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7$ на отрезке $[-3; 3]$

Значения функции в концах отрезка.

$$y(-3) = \frac{(-3)^3}{3} - 9(-3) - 7 = -9 + 27 - 7 = 11$$

$$y(3) = \frac{3^3}{3} - 9 \cdot 3 - 7 = 9 - 27 - 7 = -25$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = \frac{3x^2}{3} - 9 = x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

$$x = 3 \in [-3; 3]$$

$$x = -3 \in [-3; 3]$$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y(-3) = 11$$

$$y(-3) = -25$$

Выбрать наибольшее из полученных значений.

В 11	1	1				
------	---	---	--	--	--	--

5. Найдите наибольшее значение функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$ на отрезке $[1; 9]$

Значения функции в концах отрезка.

$$y(1) = 1^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$$

$$y(9) = 9^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 9 + 1 = (3^2)^{\frac{3}{2}} - 27 + 1 = 27 - 27 + 1 = 1$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - 3 = \frac{3}{2} \sqrt{x} - 3$$

$$\frac{3}{2} \sqrt{x} - 3 = 0 \quad / \cdot 2$$

$$3\sqrt{x} - 6 = 0$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4 \in [1; 9]$$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y(4) = 4^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 4 + 1 = (2^2)^{\frac{3}{2}} - 12 + 1 = 8 - 12 + 1 = -3$$

Выбрать наибольшее из полученных значений.

№ 12

1

6. Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 3x + 1$ на отрезке $[1; 9]$

Значения функции в концах отрезка.

$$y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$$

$$y(1) = 1^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$$

$$y(9) = 9^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 9 + 1 = (3^2)^{\frac{3}{2}} - 27 + 1 = 27 - 27 + 1 = 1$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3$$

Запишем функцию в удобном для дифференцирования виде

$$y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$$

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3$$

$$3\sqrt{x} - 6 = 0$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4 \in [1; 9]$$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y(4) = 4^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 4 + 1 = (2^2)^{\frac{3}{2}} - 12 + 1 = 8 - 12 + 1 = -3$$

Выбрать наименьшее из полученных значений.

№ 12

-


3

7. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^2 + 25}{x}$ на отрезке $[-10; 1]$

$$y = x + 25 \cdot \frac{1}{x}$$

$D(y): x \neq 0$

Значения функции в концах отрезка.



$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

Выбрать наименьшее из полученных значений.

$$y(-10) = -10 + 25 \cdot \frac{1}{-10} = -10 - 2,5 = -12,5$$

$$y(1) = 1 + 25 = 26$$

$$y = x + 25 \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = 1 + 25 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2}$$

Запишем функцию в удобном для дифференцирования виде

$$= \frac{(x-5)(x+5)}{x^2}$$

$x = 5 \notin [-10; 1]$

$x = -5 \in [-10; 1]$

$x = 0 \notin D(y)$

$$y(-5) = -5 + 25 \cdot \frac{1}{-5} = -5 - 5 = -10$$

№ 12

-

1

2

,

5

7. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^2 + 25}{x}$ на отрезке $[-10; 1]$

$D(y): x \neq 0$


Значения функции в концах отрезка.

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

Выбрать наименьшее из полученных значений.

Можно решить задание, применив формулу:


$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

№ 12

-

1

2

,

5


8. Найдите наибольшее значение функции на отрезке [1; 9]

$$y = x + \frac{36}{x}$$

$$y = x + 36 \cdot \frac{1}{x}$$

$$D(y): x \neq 0$$

Значения функции в концах отрезка.



$$\left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

Выбрать наибольшее из полученных значений.

Запишем функцию в удобном для дифференцирования виде

$$y(1) = 1 + 36 \cdot \frac{1}{1} = 37$$

$$y(9) = 9 + 36 \cdot \frac{1}{9} = 9 + 4 = 13$$

$$y' = 1 + 36 \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 1 - \frac{36}{x^2} = \frac{x^2 - 36}{x^2} =$$

$$= \frac{(x - 6)(x + 6)}{x^2}$$

$$x = 6 \in [1; 9]$$

$$x = -6 \notin [1; 9]$$

$$x = 0 \notin D(y)$$

$$y(6) = 6 + 36 \cdot \frac{1}{6} = 6 + 6 = 12$$

№ 12


3 7

9. Найдите наибольшее значение функции $y = (8 - x)e^{x-7}$ на отрезке $[3; 10]$

- 1). Первое число меньше 1, т.к. знаменатель $e^4 > 5$.
- 2). Второе число – отрицательное.
- 3). Значит, наибольшее число 1.

$$(8-3)e^{-4} = \frac{5}{e^4}$$

$$(8-10)e^3 = -2e^3$$


$$(uv)' = u'v + uv'$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

Выбрать наибольшее из полученных значений.

$$\begin{aligned} y' &= (8-x)'e^{x-7} + (8-x)(e^{x-7})' = \\ &= -e^{x-7} + (8-x)e^{x-7} = e^{x-7}(-1+8-x) = \\ &= e^{x-7}(7-x) \end{aligned}$$

$$x = 7 \in [3; 10]$$

$$y(7) = (8-7)e^{7-7} = 1e^0 = 1$$

№ 12

1

10. Найдите наименьшее значение функции $y = (x^2 - 8x + 8)e^{2-x}$ на отрезке $[1; 7]$

Значения функции в концах отрезка.

$$y(1) = (1 - 8 + 8)e^1 = e$$



$$(uv)' = u'v + uv' \quad y(7) = (49 - 56 + 8)e^{-5} = \frac{1}{e^5}$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 - 8x + 8)' e^{2-x} + (x^2 - 8x + 8)(e^{2-x})' = \\ &= (2x - 8)e^{2-x} + (x^2 - 8x + 8)e^{2-x}(-1) = \\ &= e^{2-x}(2x - 8 - x^2 + 8x - 8) = e^{2-x}(-x^2 + 10x - 16) = \\ &= -e^{2-x}(x^2 - 10x + 16) = -e^{2-x}(x - 8)(x - 2) \end{aligned}$$

$$x = 2 \in [1; 7]$$

$$x = 8 \notin [1; 7]$$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

Выбрать наименьшее из полученных значений.

$$y(2) = (4 - 16 + 8)e^0 = -4$$

Наименьшее число -4 , т.к. первые два положительные.

1

№12

-

4



$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

11. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+5)^5 - 5x$ на отрезке $[-4,5; 0]$

1. Найти $f'(x)$

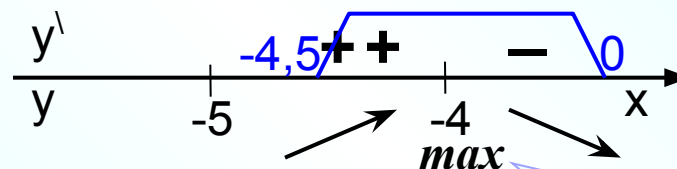
$$y = 5\ln(x+5) - 5x$$

$$y' = 5 \cdot \frac{1}{x+5} - 5 = \frac{5}{x+5} - 5 = \frac{-5x - 20}{x+5} =$$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

Запишем функцию в удобном для дифференцирования виде

$$y = \frac{5(x+5)}{x+5} - 5x = -4 \in [-4,5; 0]$$



Можно рассуждать иначе

3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.

$$y(-4) = \ln 1^5 - 5 \cdot (-4) = 0 + 20 = 20$$

Наибольшее значение функция будет принимать в точке максимума. Можно сэкономить на вычислениях значений функции в концах отрезка.

4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее или наибольшее.

№12

2 0


$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

1. Найти $f'(x)$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

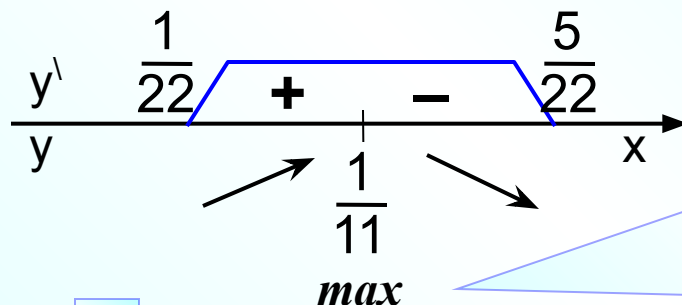
12. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \ln(11x) - 11x + 9 \text{ на отрезке } \left[\frac{1}{22}; \frac{5}{22} \right]$$

$$y' = \frac{1}{11x} \cdot (11x)' - 11 = \frac{1}{11x} \cdot 11 - 11 = \frac{1}{x} - 11 =$$

$$= \frac{1 - 11x}{x}$$

$$x = \frac{1}{11} \in \left[\frac{1}{22}; \frac{5}{22} \right]$$



$$y\left(\frac{1}{11}\right) = \ln 1 - 1 + 9 = 0 - 1 + 9 = 8$$

Наибольшее значение функция будет принимать в точке максимума. Можно сэкономить на вычислениях значений функции в концах отрезка.

№ 12

8

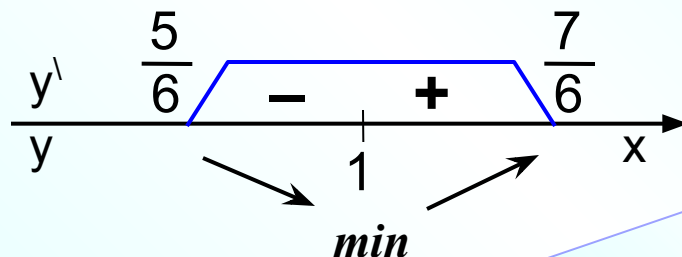

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

13. Найдите наименьшее значение функции
 $y = 2x^2 - 5x + \ln x - 3$ на отрезке $\left[\frac{5}{6}; \frac{7}{6} \right]$

1. Найти $f'(x)$

$$y' = 4x - 5 + \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 5x + 1}{x} = \frac{4(x-1)\left(x - \frac{1}{4}\right)}{x}$$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.



$$x = 1 \in \left[\frac{5}{6}; \frac{7}{6} \right]$$

Наименьшее значение функция будет принимать в точке минимума. Можно сэкономить на вычислениях значений функции в концах отрезка.


0

$$y(1) = 2 - 5 + \ln 1 - 3 = 2 - 8 = -6$$

№12

-

6


$$(\cos x)' = -\sin x$$

14. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 7\cos x + 16x - 2 \text{ на отрезке } \left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$$

1. Найти $f'(x)$

$$y' = -7\sin x + 16$$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$-7\sin x + 16 = 0$$

$$\sin x = \frac{16}{7}$$

$$\emptyset \text{ т.к. } \sin x \in [-1; 1]$$

0

$$y\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 7\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 16 \cdot \left(-\frac{3\pi}{2}\right) - 2 = -24\pi - 2$$

$$y(0) = 7\cos 0 + 16 \cdot 0 - 2 = 7 - 2 = 5$$

Функция на всей области определения возрастает. Нетрудно догадаться, что $y' > 0$. Тогда наибольшее значение функция будет иметь в правом конце отрезка, т.е. в точке $x=0$.

Если вы не догадались, то вычислите значения функции в каждом конце отрезка и выберите наибольшее.

№ 12

5





$$(\sin x)' = \cos x$$

15. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 10\sin x - \frac{36}{\pi}x + 7 \text{ на отрезке } \left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$$

1. Найти $f'(x)$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$y' = 10\cos x - \frac{36}{\pi}$$

$$10\cos x = \frac{36}{\pi}$$

$$\cos x = \frac{36}{10\pi}$$

$$\emptyset \text{ т.к. } \cos x \in [-1; 1]$$

Критических точек нет. Тогда наибольшее значение функция будет принимать в одном из концов отрезка.

Можно было и раньше догадаться, что наибольшее значение будет именно в левом конце отрезка! Как?

$$y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 10\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{36}{\pi} \cdot \left(-\frac{5\pi}{6}\right) + 7 = -10 \cdot \frac{1}{2} + 30 + 7 = 32$$

Синус – нечетная функция

Формула приведения

$$y(0) = 10 \sin\left(\sin 0 - \frac{5\pi}{6}\right) + 7 = 10 \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + 7 = 10 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 7 = 10 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 7 = 10 \cdot \frac{1}{2} + 7 = 5 + 7 = 12$$

№ 12


3 2

sin

π

1/2




$$(\cos x)' = -\sin x$$

1. Найти $f'(x)$

$$y' = -5 \sin x - 6$$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$-5 \sin x - 6 = 0$$

$$\sin x = -\frac{6}{5}$$

$$\emptyset \text{ т.к. } \sin x \in [-1; 1]$$

$$y\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 5 \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - 6 \cdot \left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 4 = 9\pi + 4$$

$$y(0) = 5 \cos 0 - 0 + 4 = 9$$

Функция на всей области определения убывает. Нетрудно догадаться, что $y' < 0$. Тогда наименьшее значение функция будет иметь в правом конце отрезка, т.е. в точке $x=0$.

Если вы не догадались, то вычислите значения функции в каждом конце отрезка и выберите наименьшее.

№ 12

9



17. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 12 \cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6 \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

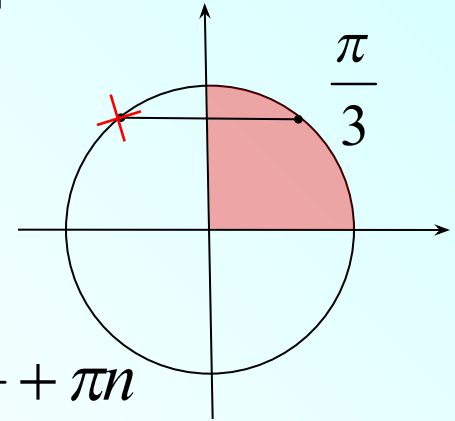
1. Найти $f'(x)$ $y' = -12 \sin x + 6\sqrt{3}$

2. Найти критические точки, $-12 \sin x + 6\sqrt{3} = 0$

взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$$



$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12 \cos \frac{\pi}{3} + 6\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\pi + 6$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12 \cos \frac{\pi}{2} + 6\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{3}\pi + 6$$

$$y(0) = 12 \cos 0 + 6\sqrt{3} \cdot 0 - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 18 - 2\sqrt{3}\pi$$

Но нам не нужны ВСЕ стационарные точки. Необходимо сделать выбор тех значений, которые попадут в заданный отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$



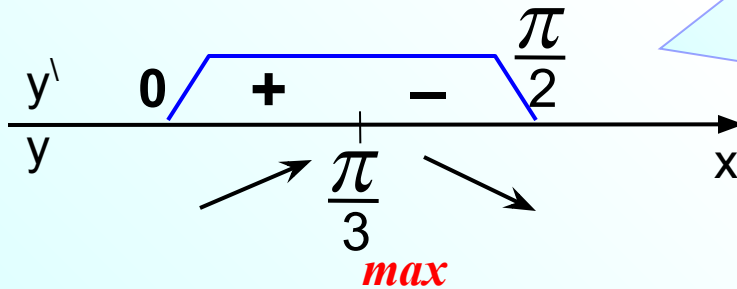
17. Найдите наибольшее значение функции $y = 12\cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

1. Найти $f'(x)$ $y' = -12\sin x + 6\sqrt{3}$

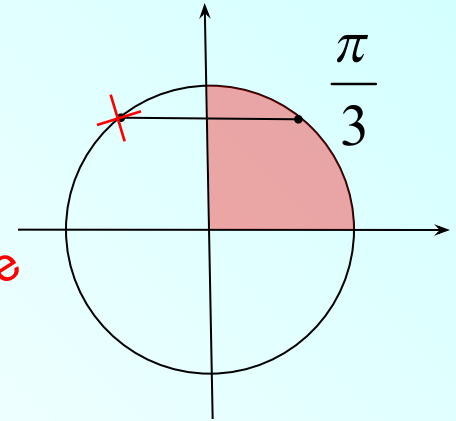
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$-12\sin x + 6\sqrt{3} = 0$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Можно рассуждать иначе



Убедимся, что данная точка является точкой максимума на заданном промежутке. Значит, наибольшее значение функция достигает именно в этой точке. Тогда значения функции в концах отрезка можно не считать.

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12\cos\frac{\pi}{3} + 6\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 12$$



18. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 11 + \frac{7\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{7\sqrt{3}}{3}x - \frac{14\sqrt{3}}{3} \cos x \quad \text{на отрезке} \quad \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

1. Найти $f'(x)$

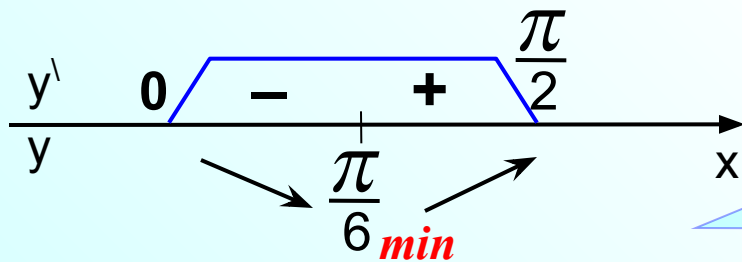
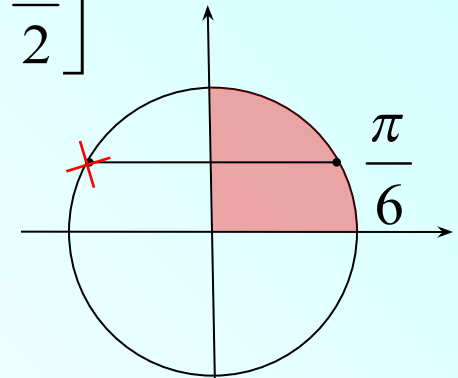
$$y' = -\frac{7\sqrt{3}}{3} + \frac{14\sqrt{3}}{3} \sin x$$

2. Найти

критические точки,
взять те, которые
принадлежат
данному отрезку.

$$-\frac{7\sqrt{3}}{3} + \frac{14\sqrt{3}}{3} \sin x = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$




Можно убедиться, что данная точка является точкой минимума на заданном промежутке.

Значит, наименьшее значение функции достигается именно в этой точке.

Тогда значения функции в концах отрезка можно не считать.

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 11 + \frac{7\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{7\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{14\sqrt{3}}{3} \cos \frac{\pi}{6} = 11 - 7 = 4 \quad \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$





$$(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

1. Найти $f'(x)$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -4 + \pi - \pi + 5 = 1$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 - \pi - \pi + 5 = 9 - 2\pi$$

$$y(0) = -0 - 0 - \pi + 5 = 5 - \pi$$

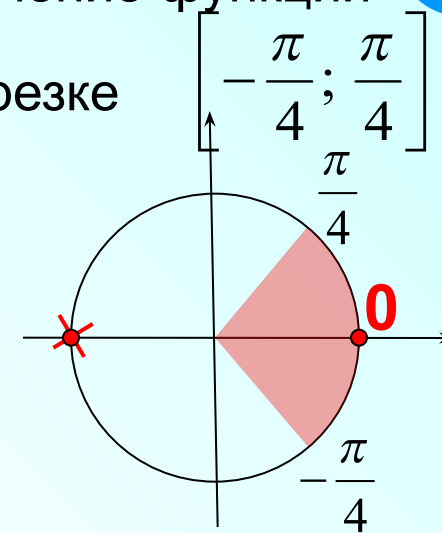
19. Найдите наименьшее значение функции

$y = 4tgx - 4x - \pi + 5$ на отрезке

$$y' = 4 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 4$$

$$\frac{4}{\cos^2 x} - 4 = 0$$

$$\cos^2 x = 1$$



Нам не нужны ВСЕ стационарные точки. Необходимо сделать выбор тех значений, которые попадут в заданный отрезок $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ и на концах отрезка.

3. Вычислим значения функции в критических точках

4. Из вычисленных значений сделаем выбор наименьшего.



$$(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

1. Найти $f'(x)$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

3. Вычислим значения функции в критических точках и в точках отрезка.

4. Из вычисленных значений сделаем выбор наибольшего.

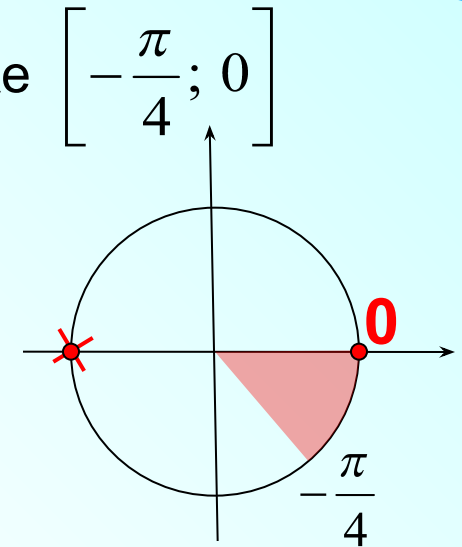
20. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 3tgx - 3x + 5 \text{ на отрезке } \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$$

$$y' = 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 3$$

$$\frac{3}{\cos^2 x} - 3 = 0$$

$$\cos^2 x = 1$$



Нам не нужны ВСЕ значения на отрезке. Необходимо сделать выбор тех значений, которые попадут в заданный отрезок $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 3tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 3\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 5 = -3 + \frac{3\pi}{4} + 5 = 2 + \frac{3\pi}{4}$$

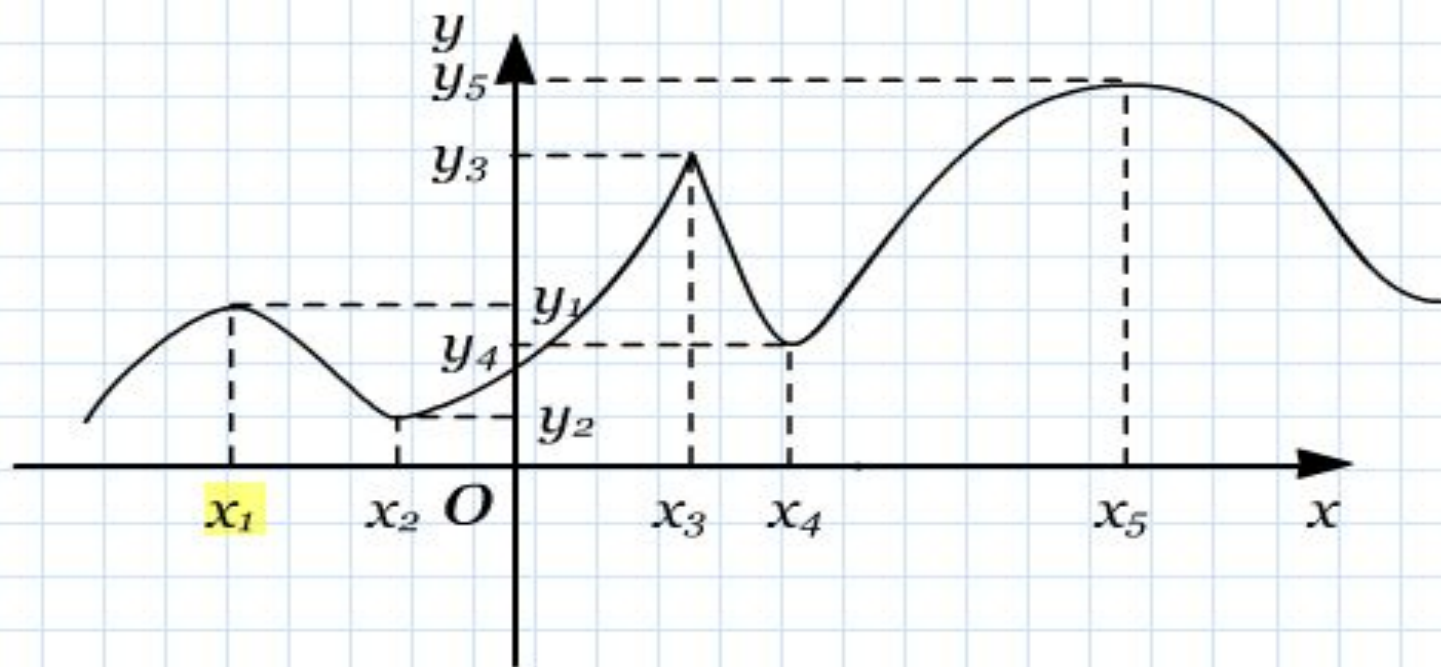
$$y(0) = 3tg0 - 0 + 5 = 5$$

№12

5



**Нахождение точек
минимума (min)
и *максимума (max)*
функции**

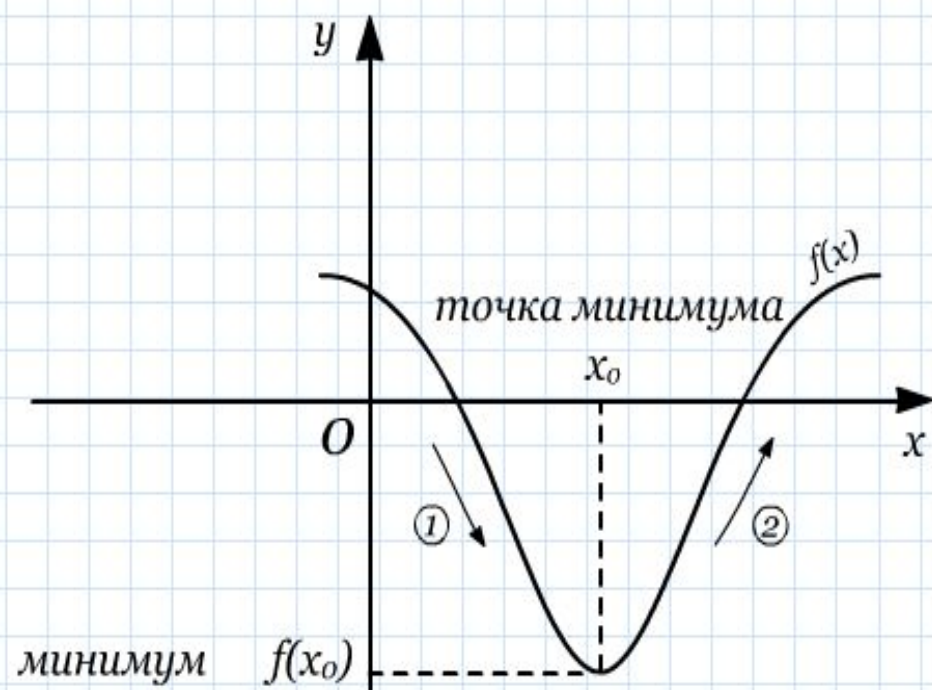
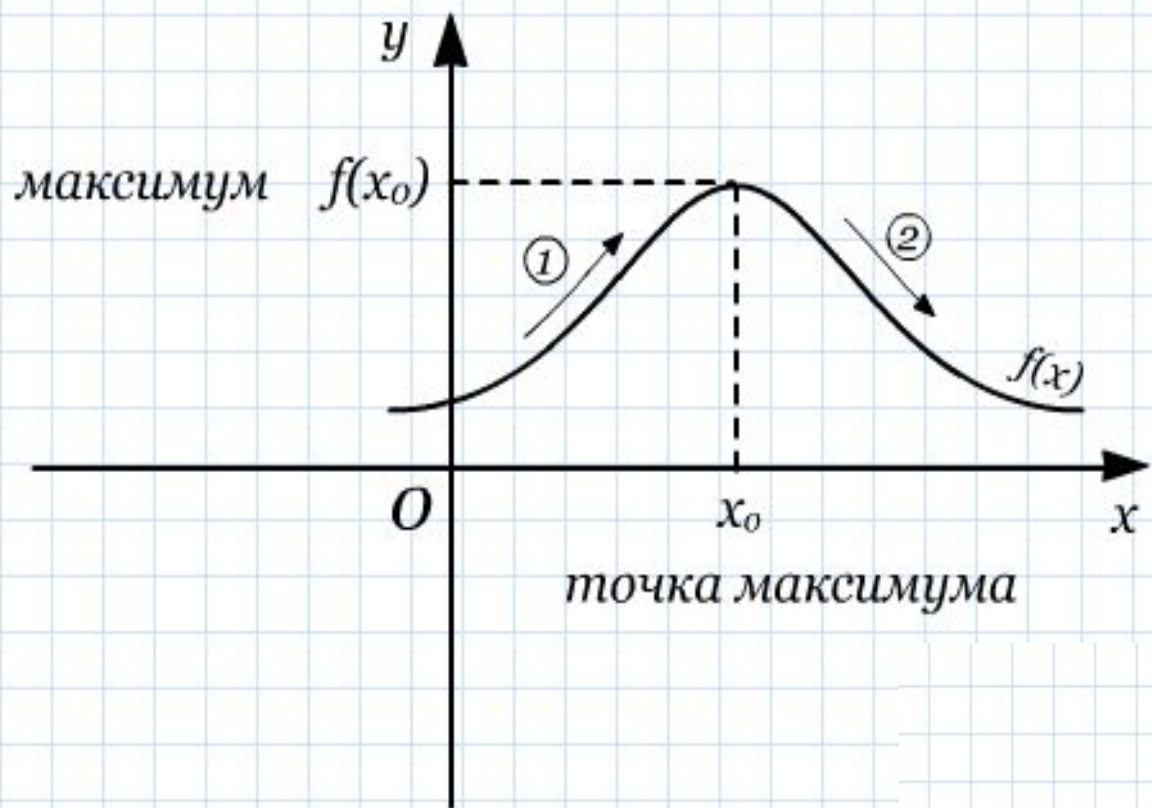


x_1, x_3, x_5 — точки максимума

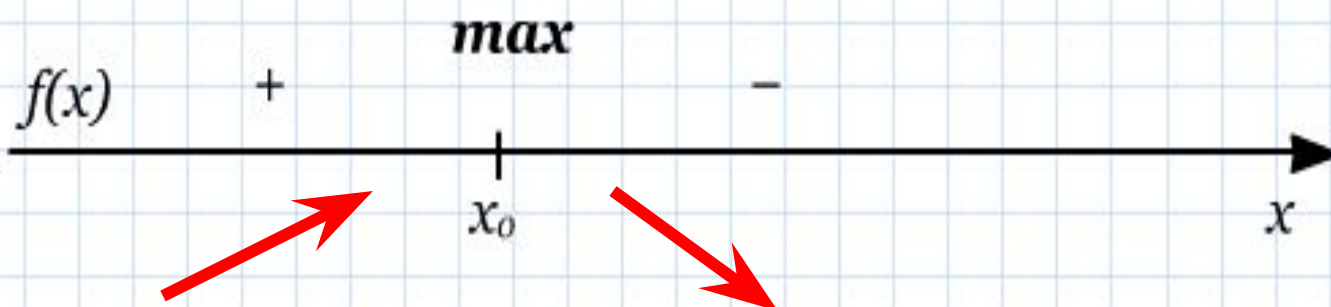
y_1, y_3, y_5 — максимумы

x_2, x_4 — точки минимума

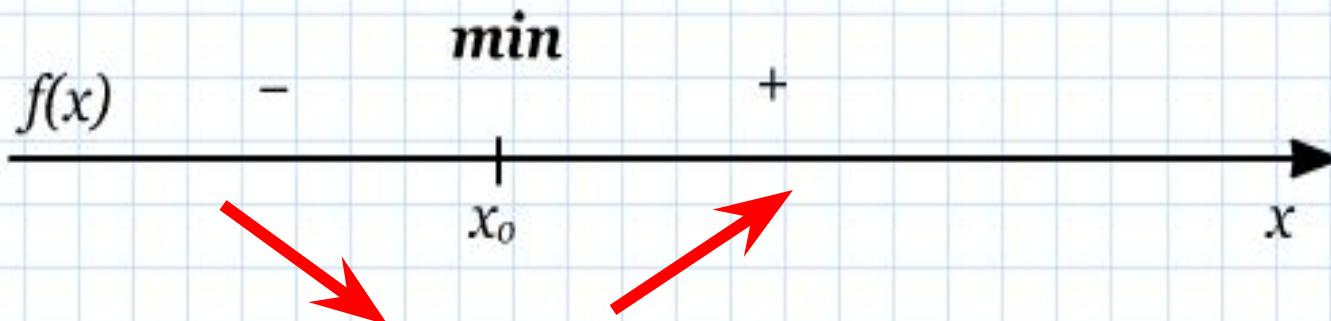
y_2, y_4 — минимумы

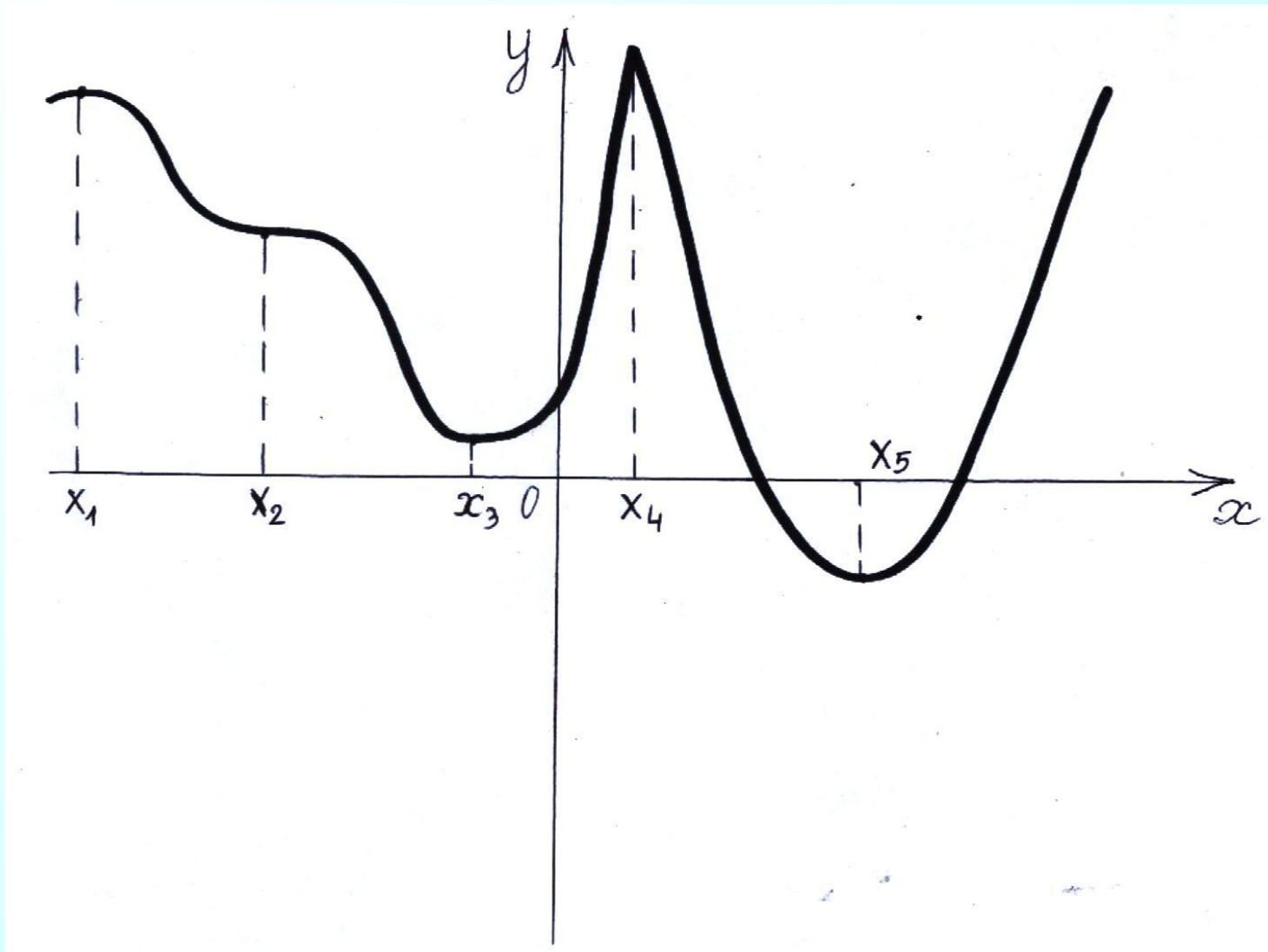


Признак максимума функции:



Признак минимума функции:





Алгоритм нахождения точек экстремума:

1. Найти производную функции.
2. Решить уравнение $f'(x)=0$, и найти тем самым стационарные точки.
3. Методом интервалов установить промежутки знакопостоянства производной.
4. Если при переходе через точку x_0 :
 - - производная не меняет знак, то x_0 – точка перегиба;
 - - производная меняет знак с «+» на «-», то x_0 точка максимума;
 - - производная меняет знак с «-» на «+», то x_0 точка минимума.

№1 Найдите точку максимума

функции $y = x^3 - 48x + 17$

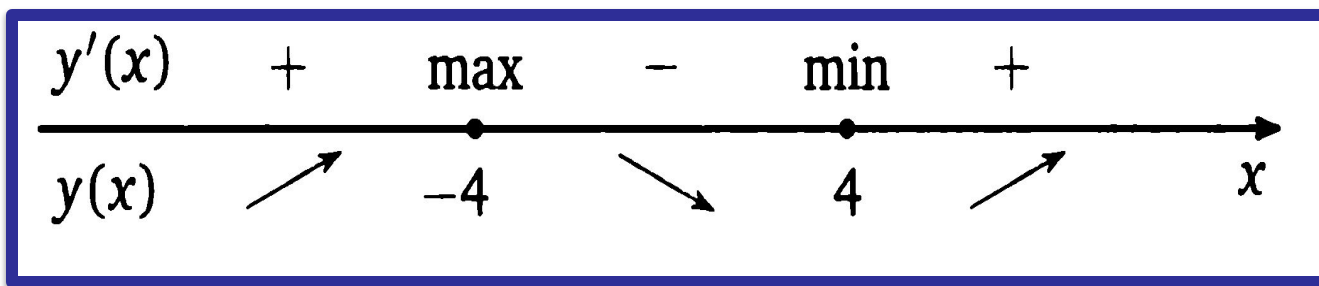
Решение.

1. $y = 3x^2 - 48$

2. $y'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 48 = 0 \quad 3(x^2 - 16) = 0 \quad | :3 \quad (x^2 - 16) = 0$

$(x - 4)(x + 4) = 0 \Rightarrow (x - 4) = 0$ или $(x + 4) = 0 \Rightarrow x = 4$ или $x = -4$

3.



4.

$x_{\max} = -4$

№12

-

4