Лекция
Функции одной и нескольких переменных

Литература.

В.Г. Зубков, В.А.Ляховский, А.И.Мартыненко, В.Б.Миносцев. Курс математики для технических высших учебных заведений Учебное пособие часть I Под редакцией В.Б.Миносцева и Е.А. Пушкаря. 2012г. Лекция 3, 4.
Часть II лекция 35.

Понятие числовой функции. Способы задания. Чётные, нечётные, периодические функции. Обратные функции.

Элементарные функции. Свойства основных элементарных функций. Преобразования графиков.

Функции нескольких переменных.

.

.

Понятие числовой функции одной переменной

Определение 3.1. *Пусть даны два множества действительных чисел* X *и* Y*. Числовой функцией* $y = f(x)$ *называется правило, по которому каждому числу* $x \in X$ *ставится в соответствие единственное число* $y \in Y$*. Переменную* x *называют независимой переменной или аргументом, переменную* y *– зависимой переменной или функцией.*

Определение 3.2. *Областью определения функции* $D(f)$ *называется множество* $x \in X$*, для каждого элемента которого задано* $y = f(x)$*. Множество значений* $y \in Y$*, для каждого из которых существует такое* $x \in D(f)$*, что* $y = f(x)$ *называется областью изменения или множеством значений функции* $E(f)$*.*

Наряду с обозначениями функции $y = f(x)$ используются и другие, в частности $y = y(x)$. Значение функции для фиксированного значения аргумента x_0 будем обозначать $y_0 = f(x_0)$ или $y_0 = y(x_0)$. Сама функция, её аргумент и значение могут быть обозначены и другими буквами, например: $V = F(u)$.

Если переменные x и y рассматривать как декартовы координаты точек на плоскости, то графиком числовой функции $y = f(x)$ называется множество точек координатной плоскости Oxy с координатами $(x; f(x))$.

3.1. Способы задания функций

Основными способами задания функции являются *аналитический*, *графический* и *табличный*.

При аналитическом способе функция задаётся посредством формул. При этом она может быть задана в декартовых и полярных координатах в явном и неявном виде, в параметрическом виде.

Явный способ задания функции

Если в уравнении, определяющем функцию, значение функции y выражено в явном виде (изолировано в левой части уравнения), то говорят, что функция задана в явном виде:

$$y = f(x). \tag{3.1}$$

Пример 3.1. $y = 2x + 1$.

Неявный способ задания функции

Если в уравнении, определяющем функцию, значение функции y не выражено в явном виде (не изолировано в левой части уравнения), то говорят, что функция задана в неявном виде уравнением вида:

$$F(x, y) = 0. \qquad (3.2)$$

Так заданную функцию для краткости называют *неявной функцией*.

При этом, согласно определению 3.1, правило, которое задаёт y как функцию аргумента x подразумевает, что при заданном значении x из области определения функции уравнение (3.2) может быть решено относительно y и выделено единственное решение. Заметим, что при этом остается требование, чтобы каждому числу $x \in D(f)$ соответствовало единственное значение $y \in E(f)$. Например, уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ определяет две функции: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$.

Параметрический способ задания функции

При параметрическом задании функции в декартовых координатах значение функции y и её аргумента x задаются как функции от третьей переменной величины, так называемого параметра t из множества T:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \tag{3.3}$$

Если эти функции вычислить при одном и том же значении параметра t, мы получим координаты точки на плоскости $M(x;y)$; когда переменная t пробегает все значения из множества T, точка $M(x,y)$ описывает некоторую линию в плоскости Oxy.

Уравнения (3.3) называются параметрическими уравнениями этой линии. Иногда, исключив параметр t из системы (3.3), можно получить явное или неявное уравнение функции.

Пример 3.3. *Функция $y = y(x)$ задана параметрически уравнениями*

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases} \tag{3.4}$$

Если эти уравнения почленно возвести в квадрат и сложить, то в силу тождества $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ получится уравнение $x^2 + y^2 = R^2$. Этому уравнению удовлетворяют координаты точек окружности радиуса R с центром в начале координат, так как в силу формулы (2.6) для точек $M(x; y)$, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, расстояние до начала координат $O(0; 0)$ постоянно и равно R.

Если из уравнения $x^2 + y^2 = R^2$ выразить y в явном виде, получим две элементарные функции: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$. Каждая из этих функций задаётся параметрически одними и теми же уравнениями, но области изменения параметра для этих функций различны: для первой из них $0 \leqslant t \leqslant \pi$ (графиком служит верхняя полуокружность), для второй $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$ графиком является нижняя полуокружность).

Пример 3.4. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ (3.5)

Эти уравнения называются параметрическими уравнениями циклоиды. Можно показать, что линия, описываемая этими уравнениями (циклоида), получается как траектория фиксированной точки M окружности радиуса a, касавшейся в начальный момент оси абсцисс в начале координат, которая катится без скольжения по оси абсцисс (рис. 27). При этом в начальный момент точка M совпадает с началом координат.

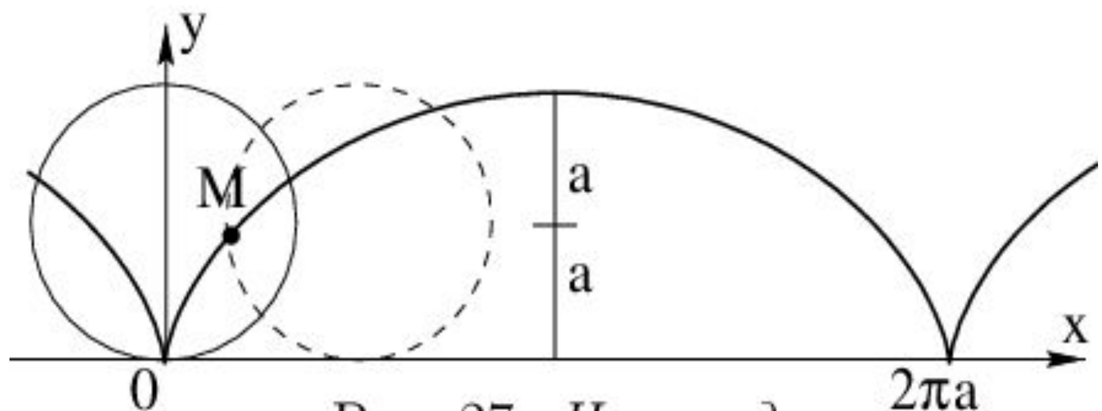

Рис. 27. *Циклоида*

При изменении параметра t от 0 до 2π окружность совершит один полный оборот. Точка M при этом опишет одну арку циклоиды.

Задание функции в полярных координатах

При задании функции в явном виде в полярных координатах полярный радиус r выражается через полярный угол φ:

$$r = r(\varphi). \tag{3.6}$$

При этом каждому значению φ из области определения соответствует единственное значение r. Это, однако, не гарантирует, что при переходе к декартовым координатам каждому значению x будет соответствовать единственное значение y.

Пример 3.5. $r = a(1 + \cos\varphi)$.

Кривая, описываемая этим уравнением в полярных координатах, называется кардиоидой (рис. 28).

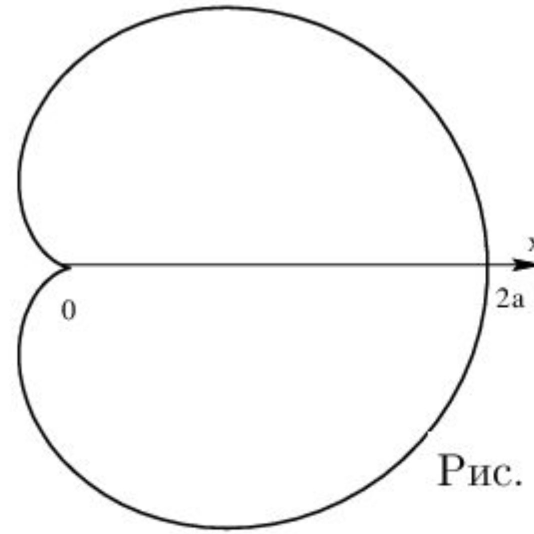

Рис. 28. *Кардиоида*

Составив таблицу для некоторых значений полярного угла φ и соответствующих им значений r, построим получившуюся кривую

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
r	$2a$	$a\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$	a	$a\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$	0	$a\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$	a	$a\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$	$2a$

Табличный способ задания функции

При табличном способе функция задаётся посредством таблицы. Например, следующая таблица устанавливает закон, который каждому из перечисленных в этой таблице значений аргумента x ставит в соответствие единственное значение y.

x	-2	-1	-0,5	0	1
y	-3	-1	0	1	3

Пример 3.7. *Найти область определения и область изменения функции* $y = \log_2(x^2 - 3x + 2)$.

Р е ш е н и е: Поскольку областью определения логарифмической функции является бесконечный интервал $(0; +\infty)$, заключаем, что область определения $D(f) = \{x | x^2 - 3x + 2 > 0\}$. Решим это неравенство, для чего определим корни уравнения:

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Longrightarrow x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Следовательно, решением неравенства $x^2 - 3x + 2 > 0$ является $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Областью значений логарифмической функции является множество R, поэтому $E(f) = \{y | y \in R\}$.

Ответ: $D(f) = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

3.2. Операции над функциями

Пусть даны две функции: $y = f(x)$ и $y = g(x)$ с областью определения $D(f)$ и $D(g)$ соответственно. Тогда можно определить новую функцию $y = f(x) + g(x)$, значения которой при каждом x из области определения вычисляются как сумма значений $f(x)$ и $g(x)$. Область определения функции $y = f(x) + g(x)$ есть $D(f) \cap D(g)$.

Аналогично определяются функции $y = f(x)g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ и $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причём область определения функции $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ есть множество $D(f) \cap D(g) \cap \{x | g(x) \neq 0\}$.

Пример 3.10. *Найти область определения функции* $y = \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{x-1}$.

Р е ш е н и е: Представим нашу функцию в виде $y = f(x) + g(x)$, где $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Найдем область определения каждой функции.

$D(f) : x - 1 \geqslant 0 \Longleftrightarrow D(f) = [1; +\infty)$,
$D(g) : x - 1 \neq 0 \Longleftrightarrow D(g) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
Область определения исходной функции есть пересечение этих множеств.

Ответ: $(1; +\infty)$

3.3. Сложная функция

Пусть $u = f(x)$ – числовая функция с областью определения $D(f)$ и областью изменения $E(f)$, а $y = g(u)$ – числовая функция с областью определения $D(g)$, $E(f) \subset D(g)$ и областью изменения $E(g)$.

Тогда каждому $x \in D(f)$ соответствует единственное значение $y \in E(g)$: каждому $x \in D(f)$ функция $u = f(x)$ ставит в соответствие единственное значение $u \in E(f)$, которому функция $y = g(u)$ ставит в соответствие единственное значение $y \in E(g)$. Полученная функция называется сложной функцией (или суперпозицией двух функций) и обозначается $y = g(f(x))$. Функция $u = f(x)$ называется внутренней функцией, функция $y = g(u)$ – внешней.

Например, если $u = x^2 - 3x + 2$, и $y = \log_2 u$, то можно определить сложную функцию $y = \log_2(x^2 - 3x + 2)$.

3.4. Чётные и нечётные функции

Определение 3.3. *Множество $X \subset R$ называется симметричным относительно начала координат, если $-x \in X$ для любого $x \in X$. На числовой оси симметричное множество X расположено симметрично относительно точки O.*

Определение 3.4. *Числовая функция $y = f(x)$ называется чётной, если область её определения симметрична относительно начала координат и $f(-x) = f(x)$ для всех $x \in D(f)$.*

График чётной функции симметричен относительно оси ординат, так как точки $(x; f(x))$ и $(-x; f(-x))$ для чётной функции симметричны относительно оси Oy, поскольку $f(-x) = f(x)$. Например, функция $y = x^2 + 1$ является чётной, поскольку $D(f) = (-\infty; +\infty)$ симметрична относительно начала координат и $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$

График функции $y = x^2 + 1$ симметричен относительно оси Oy (рис. 29).

Сумма, разность, произведение и частное двух чётных функций есть чётная функция.

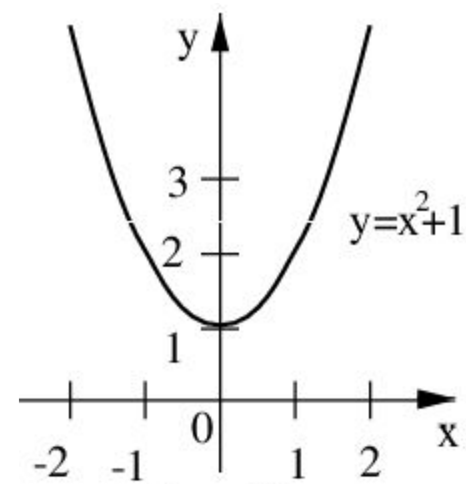

Рис. 29.

Определение 3.5. *Числовая функция $y = f(x)$ называется нечётной, если область её определения симметрична относительно начала координат и $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in D(f)$.*

График нечётной функции симметричен относительно начала координат (точки O), так как точки $(x; f(x))$ и $(-x; f(-x))$ для нечётной функции симметричны относительно точки O, поскольку $f(-x) = -f(x)$

Например, функция $y = x^3$ является нечётной, поскольку её область определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$ симметрична относительно начала координат и $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

График функции $y = x^3$ симметричен относительно точки O (рис. 30).

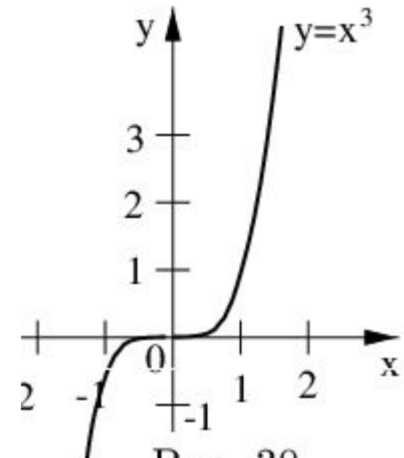

Рис. 30.

Нечётные функции имеют следующие свойства:

- сумма и разность нечётных функций есть нечётная функция;
- произведение и частное нечётных функций есть чётная функция.

Наряду с чётными и нечётными существуют функции, не являющиеся ни теми, ни другими, т.е. не обладающие свойством чётности-нечётности. Например, функции $y = x^3 + 1$, $y = \sqrt{x}$, $y = 2^x$, $y = \lg x$ не являются ни четными, ни нечётными.

3.5. Периодичность функции

Функция $y = f(x)$ называется периодической с периодом $T \neq 0$, если $x - T$ и $x + T$ принадлежат области определения, $f(x) = f(x \pm T)$ для любого $x \in D(f)$. Обычно под основным периодом функции понимают наименьший из всех положительных периодов, если такой период существует. В этом случае все периоды T кратны основному периоду $T_0 : T = n \cdot T_0$, где $n \in Z$, $n \neq 0$. Из определения следует, что $T_0 > 0$.

Пример 3.15. *Функция $y = \sin x$ имеет период $T_0 = 2\pi$, так как $x + 2\pi \in D(f)$, $x - 2\pi \in D(f)$ и $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$.*

Сумма, разность, произведение и частное периодических функций с периодом T является периодической функцией с периодом T.

Теорема 3.1. *Если функция $y = f(x)$ периодическая с периодом T, то функция $y = Kf(kx + b) + a$ будет также периодической с периодом $T_1 = T/|k|$, $k \in R$.*

Пример 3.17. *Найти период функции $y = 2\sin(3x+2)$.*

Р е ш е н и е: $y = \sin x$ имеет период $T = 2\pi$, $k = 3$. Поэтому период T_1 функции $y = 2\sin(3x+2)$ будет равен $T_1 = \dfrac{2\cdot\pi}{3}$.

Ответ: $T_1 = \frac{2\cdot\pi}{3}$.

Пример 3.18. *Является ли функция $y = \sqrt{x}$ периодической?*

Р е ш е н и е: Эта функция не является периодической, так как, например, для $x = 0$ и $T > 0$ $x - T$ не принадлежит области определения. При $T < 0$ $x + T$ при $x = 0$ не принадлежит области определения. Таким образом, не выполняется первое требование определения периодической функции.

Пример 3.19. *Является ли функция $y = x$ периодической?*

Р е ш е н и е: $D(f) = (-\infty; +\infty)$, поэтому $x + T \in D(f)$ и $x - T \in D(f)$, если $x \in D(f)$. Найдем период T_0 из условия: $f(x+T_0) = f(x)$, т.е. $x + T_0 = x$. Отсюда $T_0 = 0$.

Ответ: $y = x$ не является периодической функцией.

3.6. Ограниченные функции

Определение 3.6. *Функция* $y = f(x)$ *называется ограниченной сверху, если существует такое число* M, *что для всех* $x \in D(f)$ *выполняется неравенство:* $f(x) \leqslant M$. *Функция* $y = f(x)$ *называется ограниченной снизу, если существует такое число* m, *что для всех* $x \in D(f)$ *выполняется неравенство:* $f(x) \geqslant m$. *Функция, ограниченная сверху и снизу, называется просто ограниченной.*

Например, $y = x^2$ ограничена снизу, например, числом $m = -2$ и неограничена сверху. Функция $y = -x^4$ ограничена сверху, например, числом $M = 1$ и неограничена снизу. Функция $y = \sin x$ ограничена: $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. Функции $y = x$, $y = \lg(x)$, $y = \operatorname{tg}(x)$, $y = \dfrac{1}{x}$ неограничены.

3.7. Возрастание и убывание функций

Определение 3.7. *Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на множестве $X \subset D(f)$, если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ из неравенства $x_1 > x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$ (т.е. «чем больше x, тем больше y»). Функция $y = f(x)$ называется убывающей на множестве $X \subset D(f)$, если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ из неравенства $x_1 > x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$ (т.е. «чем больше x, тем меньше y»). Функция $y = f(x)$ называется неубывающей на множестве $X \subset D(f)$, если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ из неравенства $x_1 > x_2$ следует $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Функция $y = f(x)$ называется невозрастающей на множестве $X \subset D(f)$, если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ из неравенства $x_1 > x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Функции, только возрастающие или только убывающие, называются монотонными, а соответствующие множества X — областями монотонности.*

Пример 3.21. *Функция, изображённая на рис. 31, возрастает на интервалах $(a; x_1)$, $(x_2; x_3)$, $(x_4; b)$ и убывает на интервалах $(x_1; x_2), (x_3; x_4)$.*

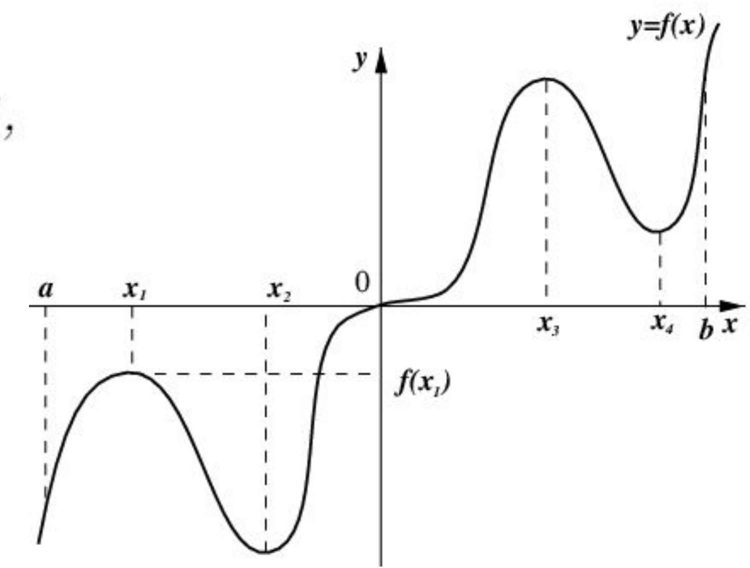

Рис. 31.
Интервалы монотонности

3.8. Обратные функции

Пусть $y = f(x)$ – числовая функция с областью определения $D(f)$ и областью изменения $E(f)$. Согласно определению функции, каждому значению $x \in D(f)$ соответствует единственное значение $y \in E(f)$. Однако разным значениям $x_1 \in D(f)$ и $x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$, может соответствовать одно значение $y \in E(f)$. Например, функция $y = x^2$ ставит в соответствие двум разным значениям аргумента $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ одно значение $y = 1$.

Определение 3.8. *Функция $y = f(x)$ называется обратимой, если разным значениям аргумента $x_1 \neq x_2$ соответствуют разные значения функции $y_1 \neq y_2$.*

Если функция $y = f(x)$ обратима, то можно каждому значению $y \in E(f)$ поставить в соответствие единственное число $x \in D(f)$. Такое обратное соответствие называют функцией, обратной к $y = f(x)$, и обозначают $x = f^{-1}(y)$. Аргумент обратной функции обычно обозначают через x, а значения функции через y. Тогда обратная функция запишется в виде: $y = f^{-1}(x)$.

Если функция f^{-1} является обратной по отношению к f, то f^{-1} является обратимой, и f является обратной по отношению к f^{-1}. Функции f и f^{-1} называют взаимно обратными.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 32), что является следствием замены x на y и y на x.

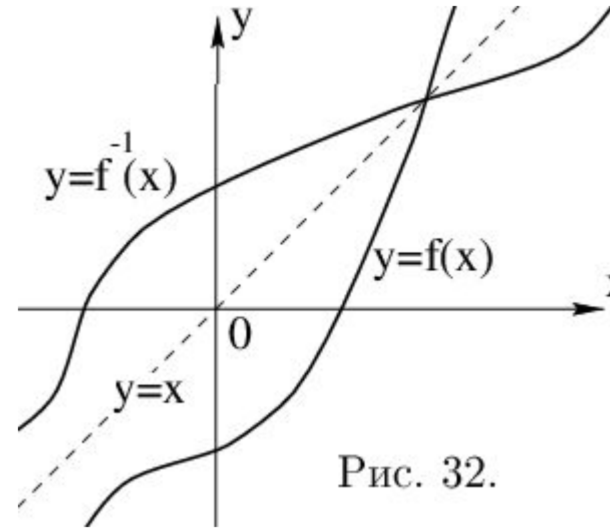

Рис. 32.

Теорема 3.2. *Если $y = f(x)$ возрастающая (убывающая) непрерывная функция, то она имеет обратную, которая тоже является возрастающей (убывающей).*

Функция, обратная нечётной, также нечётная.

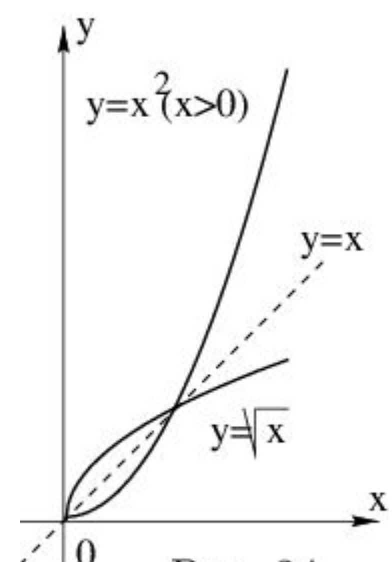

Рис. 34.

Функция $y = x^2$, как отмечалось, необратима, однако если её рассматривать только при $x \in [0; +\infty)$, то она будет монотонной и, следовательно, обратимой. График обратной функции $y = \sqrt{x}$ изображен на рисунке 34.

4. Основные элементарные функции

Определение 4.1. *Основными элементарными функциями являются: постоянная функция* ($y = C$), *степенная* ($y = x^n, n \in R$), *показательная* ($y = a^x$), *логарифмическая* ($y = \log_a x$), *тригонометрические* ($y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$) *и обратные к ним* ($y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$).

Определение 4.2. *Элементарными функциями называются те функции, которые можно задать в явном виде одним аналитическим выражением из основных элементарных функций с помощью арифметических операций и нахождения функции от функций, применённых конечное число раз.*

Примерами элементарных функций являются многочлены, дробно-рациональная функция (отношение двух многочленов), иррациональные (корень из элементарной функции) и т.д.

Не являются элементарными, например, функции:

$$y = \begin{cases} 1, \text{ при } x > 0, \\ 0, \text{ при } x = 0, \\ -1, \text{ при } x < 0, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} 1, \text{ при } x \in Q, \\ -1, \text{ при } x \in I, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} x^2 + 2x + 3, \text{ при } x < 0, \\ 3, \text{ при } 0 \leqslant x < 5, \\ \sqrt{x}, \text{ при } x \geqslant 5. \end{cases}$$

4.2. Линейная функция. Прямая на плоскости

Определение 4.3. *Линейной функцией называется функция вида:*

$$y = kx + b. \tag{4.1}$$

$D(f) = (-\infty; +\infty)$; *при* $k \neq 0$ $E(f) = (-\infty; +\infty)$, *функция неограниченная, непериодическая. При* $b = 0$ *функция нечётная; при* $k > 0$ *функция возрастает, при* $k < 0$ – *убывает, при* $k = 0$ – *постоянна.*

Точки пересечения с осями координат $(0; b)$ и $\left(-\dfrac{b}{k}; 0\right)$; графиком функции $y = kx + b$ является прямая с угловым коэффициентом (тангенс угла с осью Ox) $k = \operatorname{tg}\varphi$ (рис. 35, 36) при $k \neq 0$. Обратная функция $y = \dfrac{x-b}{k}$ также является линейной.

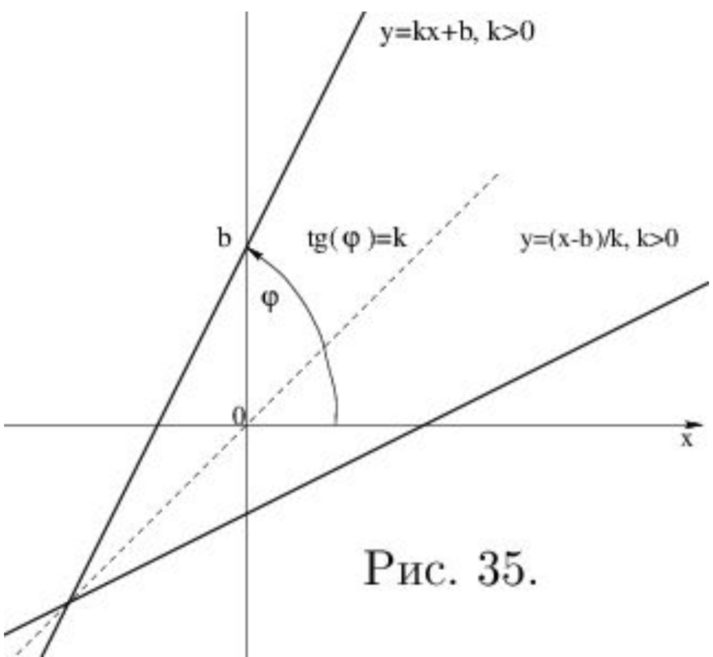

Рис. 35.

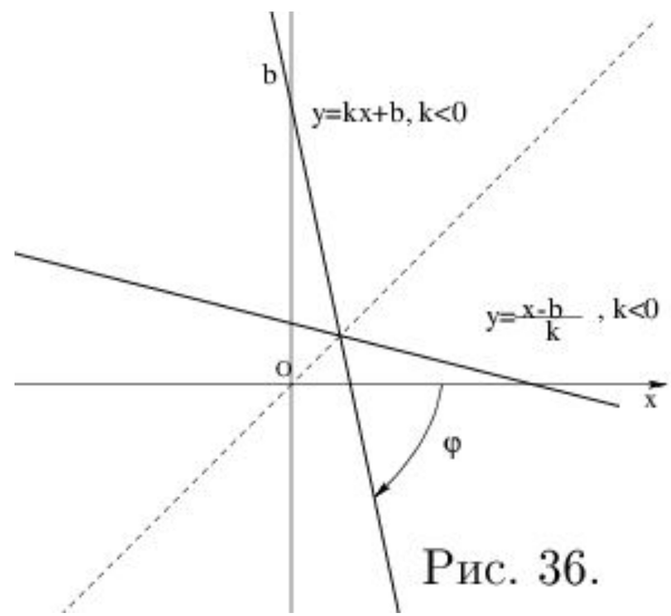

Рис. 36.

Условием параллельности двух невертикальных прямых на плоскости $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ является:

$$k_1 = k_2, \tag{4.2}$$

так как $\varphi_1 = \varphi_2 \Longleftrightarrow \operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2 \Longleftrightarrow k_1 = k_2$.

Замечание 4.1. *Условие (4.2) означает, что две прямые или не пересекаются при $b_1 \neq b_2$ или совпадают при $b_1 = b_2$.*

Угол между двумя прямыми на плоскости определяется с помощью известной тригонометрической формулы:

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \\ &\varphi_2 - \varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Используя формулу (4.3), получим условие перпендикулярности двух невертикальных прямых. В этом случае $\varphi_2 - \varphi_1 = 90^\circ \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = +\infty \Longrightarrow 1 + k_1 \cdot k_2 = 0$. Окончательно получаем условие перпендикулярности двух прямых на плоскости:

$$k_1 \cdot k_2 = -1. \tag{4.4}$$

Как известно, две точки определяют прямую на плоскости. Покажем, что уравнение прямой на плоскости, проходящей через две точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, имеет вид:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (4.5)$$

Действительно, выразив y из уравнения (4.5), получим уравнение вида (4.1) при $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ и $b = y_1 - \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$; кроме того, координаты данных двух точек удовлетворяют уравнению (4.5), т.е. эта прямая проходит через данные две точки.

Из изложенного следует, что уравнение (4.5) описывает любую прямую на плоскости, кроме вертикальной. Действительно, если две точки лежат на вертикальной прямой, то $x_1 = x_2$ и в уравнении (4.5) $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ не существует (угол $\varphi = 90^\circ \Longrightarrow k = \operatorname{tg}\varphi = +\infty$). Заметим также, что если две точки лежат на горизонтальной прямой, то $y_1 = y_2 \Longrightarrow k = 0$ и уравнение прямой (4.5) приобретает вид $y = b$. Данная точка прямой $(x_0; y_0)$ и угловой коэффициент k также определяют прямую.

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (4.6)$$

Определение 4.4. *Пучком прямых, проходящих через данную точку $(x_0; y_0)$, называется множество всех прямых на плоскости, проходящих через данную точку.*

Из сказанного следует, что однопараметрическое уравнение всех прямых пучка, кроме вертикальной, имеет вид (4.6). Уравнение конкретной прямой пучка получается из (4.6) при фиксированном k.

Наряду с уравнением (4.1) прямая на плоскости может быть задана так называемым общим уравнением прямой:

$$Ax + By + C = 0, \tag{4.7}$$

где коэффициенты A и B не равны нулю одновременно.

Действительно, уравнение (4.1) легко записать в виде (4.7), перенеся все члены в левую часть. Наоборот, если $B \neq 0$ в уравнении (4.7), то выражая y, получаем уравнение $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$ вида (4.1) При $B = 0$, $A \neq 0$ из уравнения (4.7) можно выразить $x = -\dfrac{C}{A}$ и получается уравнение вертикальной прямой. Таким образом, уравнение (4.7) является более общим уравнением прямой, чем (4.1), что объясняет его название.

4.3. Обратная пропорциональная зависимость

Определение 4.5. *Обратной пропорциональной зависимостью называется функция вида:* $y = \dfrac{1}{x}$; $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Функция неограниченная, непериодическая. Функция нечётная, так как $D(f)$ симметрична относительно точки O и $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$.

Функция убывает на$(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.

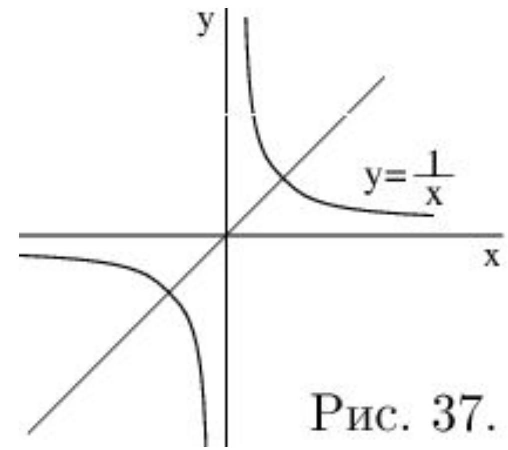

Рис. 37.

Точек пересечения с осями координат нет. Графиком функции $y = \dfrac{1}{x}$ является гипербола (рис. 37). Функция обратимая, обратная функция $y = \dfrac{1}{x}$.

4.4. Квадратичная зависимость $y = x^2$

$D(f) = (-\infty; +\infty)$; $E(f) = [0; +\infty)$ Функция ограничена снизу: $y \geqslant 0$; непериодическая. Функция чётная, так как $D(f)$ симметрична относительно O и $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Функция убывает на $(-\infty; 0)$ и возрастает на $(0; +\infty)$.

Графиком функции $y = x^2$ является парабола (рис. 38). Функция необратимая, но если рассмотреть одну её ветвь на $[0; +\infty)$ (или на $(-\infty; 0]$), то существует обратная функция $y = \sqrt{x}$ (или $y = -\sqrt{x}$).

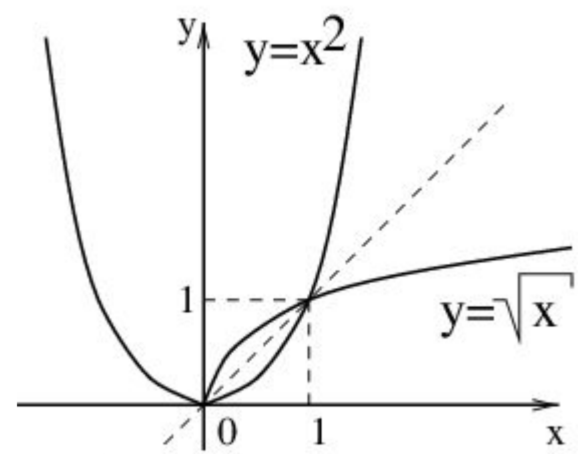

Рис. 38.

График параболы $y = x^2$

4.5. Степенная функция $y = x^n$

Рассмотренные выше функции $y = x$, $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{x}$ являются частными случаями степенной функции $y = x^n$ при $n = 1, 2, -1$ соответственно. Рассмотрим другие случаи. Возьмём $n = 3$: $y = x^3$. Тогда область определения функции $D(f) = (-\infty; +\infty)$, область значений $E(f) = (-\infty; +\infty)$. Функция неограниченная, непериодическая.

Функция нечётная. Функция монотонно возрастает. Точка пересечения с осями (0;0). Графиком функции $y = x^3$ является кубическая парабола (рис. 39). Функция имеет обратную функцию $y = \sqrt[3]{x}$. Функции $y = x^5$, $y = x^7$, $y = x^9$ и т.д. обладают аналогичными свойствами и имеют приблизительно такие же графики. Функции $y = x^4$, $y = x^6$, $y = x^8$ и т.д. обладают свойствами, аналогичными свойствам функции $y = x^2$, и имеют похожие графики.

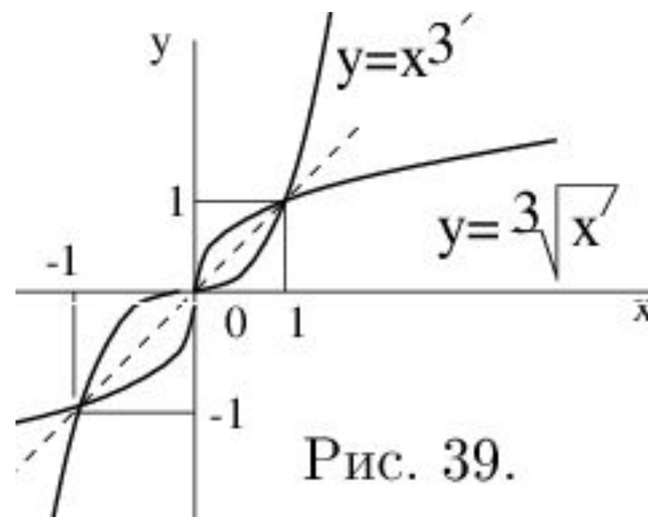

Рис. 39.

4.6. Показательная функция $y = a^x, a > 0$

Область определения показательной функции $D(f) = (-\infty; +\infty)$, область значений функции $E(f) = (0; +\infty)$. Функция ограничена снизу: $y > 0$; непериодическая. Функция ни чётная, ни нечётная. Функция при $a > 1$ возрастает, при $a < 1$ убывает. При $a = 1$ функция $y = a^x$ постоянна и равна 1. Точка пересечения с осью Oy: $(0; 1)$. График функции для разных значений a приведен на рис. 40. Функция обратимая, обратная функция $y = \log_a x$.

4.7. Логарифмическая функция $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$

Поскольку функция $y = \log_a x$ является обратной к функции $y = a^x$, она обладает следующими свойствами: область определения функции $D(f) = (0; +\infty)$, область значений $E(f) = (-\infty; +\infty)$. Функция неограниченная, непериодическая. Функция ни чётная, ни нечётная. При $a > 1$ функция возрастает, при $a < 1$ убывает. Точка пересечения с осью Ox: $(1; 0)$. График функции для разных значений a приведен на рис. 40. Функция обратимая, обратная функция $y = a^x$.

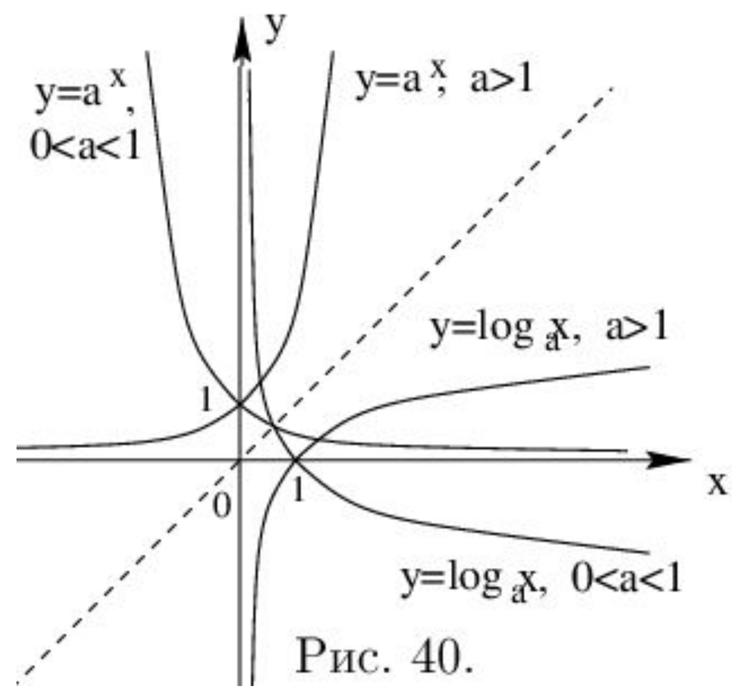

Рис. 40.

4.8. Тригонометрические функции

Функция $y = \sin x$.

Область определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$, область значений $E(f) = [-1; 1]$. Функция ограничена: $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. Функция нечётная, так как $D(f)$ симметрична относительно O и $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$. Функция периодическая с периодом $T = 2\pi$. Функция не монотонная: возрастает на интервалах $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$; убывает на интервалах $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$. Точки пересечения с осью Ox : $(\pi n; 0), n \in \mathbb{Z}$, с осью Oy : $(0; 0)$. Графиком функции является синусоида (рис. 41). Функция необратимая, но если рассмотреть её на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, то существует обратная функция $y = \arcsin x$.

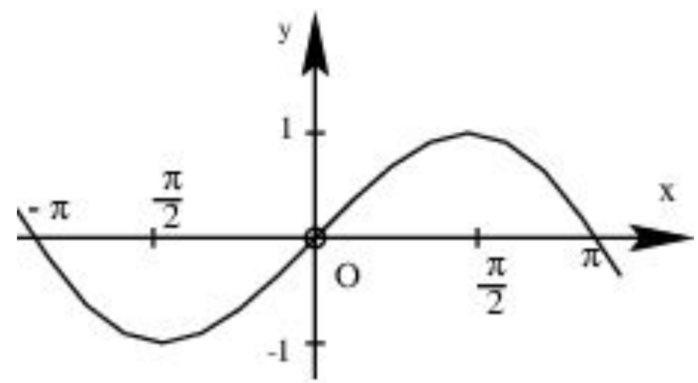

Рис. 41. *График функции* $y = \sin x$

Функция $y = \cos x$.

Область определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$, область значений $E(f) = [-1; 1]$. Функция ограничена $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Функция чётная, так как $D(f)$ симметрична относительно O и $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$. Функция периодическая с периодом $T = 2\pi$.

Функция не монотонная: убывает на интервалах $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$ и возрастает на интервалах $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.

Точки пересечения с осью Ox: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right)$; $n \in \mathbb{Z}$, точка пересечения с осью Oy: (0;1).

График функции $y = \cos x$ изображен на рис. 42.

Функция необратимая, но если рассмотреть её на $[0; \pi]$, то существует обратная функция $y = \arccos\ x$.

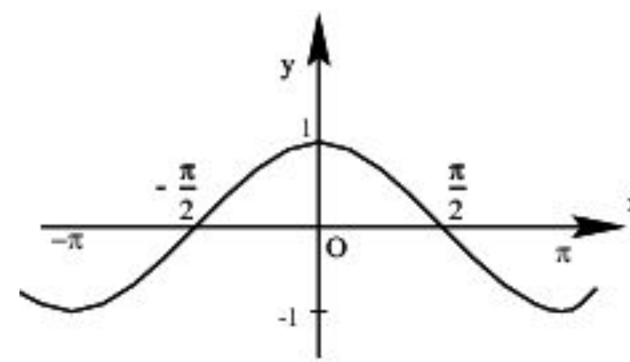

Рис. 42. *График функции* $y = \cos x$

Функция $y = \operatorname{tg} x$.

Область определения $D(f) = \{x |\ x \in R, x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \text{где } n \in \mathbb{Z}\}$; область значений $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

Функция неограниченная.

Функция нечётная, т.к. $D(f)$ симметрична относительно O и $f(-x) = \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x = -f(x)$.

Функция периодическая с периодом $T = \pi$.

Функция не монотонная; возрастает на интервалах $\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Точки пересечения с осью Ox: $(\pi n; 0)$; $n \in \mathbb{Z}$, точка пересечения с осью Oy: (0;0).

График функции $y = \operatorname{tg}\ x$ изображен на рис. 43.

Функция необратимая, но если рассмотреть её на $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, то существует обратная функция $y = \operatorname{arctg}\ x$.

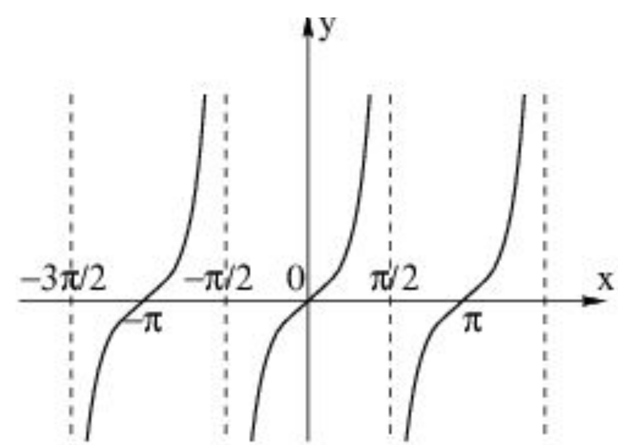

Рис. 43. *График функции $y = \operatorname{tg}\ x$*

Функция $y = \operatorname{ctg}\ x$.

Область определения $D(f) = \{x |\ x \in R, x \neq \pi n, \text{где}\ \ n \in \mathbb{Z}\}$;
область значений $E(f) = (-\infty; +\infty)$.
Функция неограниченная.
Функция нечётная, т.к. $D(f)$ симметрична относительно начала координат O и $f(-x) = \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x = -f(x)$.
Функция периодическая с периодом $T = \pi$.
Функция не монотонная; убывает $x \in (\pi n; \pi + \pi n),\ \ n \in \mathbb{Z}$.
Точки пересечения с осью Ox: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right)\ \ n \in \mathbb{Z}$.
График функции $y = \operatorname{ctg}\ x$ изображен на рис. 44.

Функция необратимая, но если рассмотреть её на интервале $(0; \pi)$, то существует обратная функция $y = \operatorname{arcctg}\ x$.

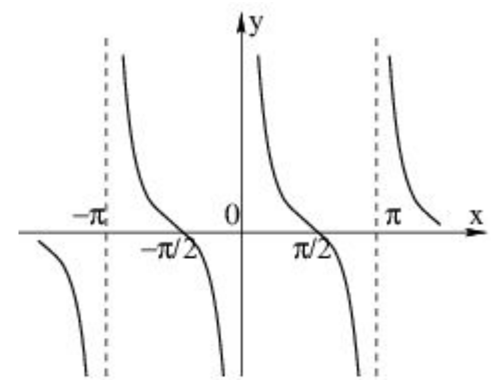

Рис. 44. *График функции* $y = \operatorname{ctg}\ x$

4.9. Обратные тригонометрические функции

$y = \arcsin\ x.$

$D(f) = [-1; 1];\ E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$

Функция ограничена: $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Функция нечётная: $\arcsin(-x) = -\arcsin\ x$.

Функция непериодическая.

Функция возрастает на области определения.

Точка пересечения с осями: (0;0).

График функции изображен на рис. 45.

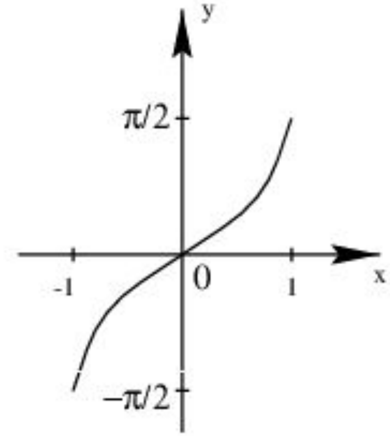

Рис. 45. *График функции* $y = \arcsin x$

$y = \arccos\ x.$

$D(f) = [-1; 1];\ E(f) = [0; \pi].$

Функция ограничена: $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$.

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

Функция убывает на области определения.

Точка пересечения с осью Ox: (1;0); с осью Oy: $(0; \frac{\pi}{2})$.

График функции изображен на рис. 46.

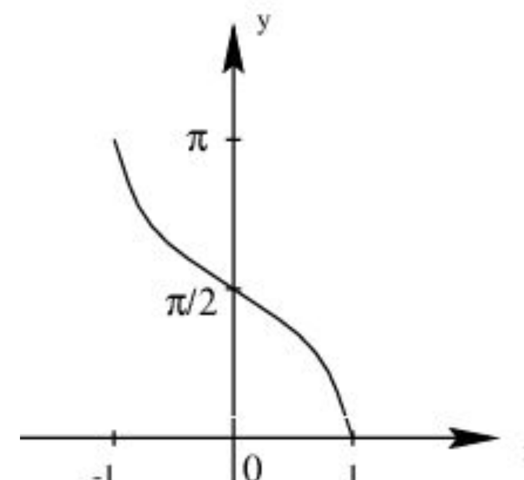

Рис. 46. *График функции* $y = \arccos x$

$y = \operatorname{arctg} x.$

$D(f) = (-\infty; +\infty)$; $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Функция ограничена: $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$.
Функция нечётная: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg}\ x$
Функция непериодическая.
Функция возрастает на области определения.
Точка пересечения с осями: (0;0).
График функции изображен на рис. 47.

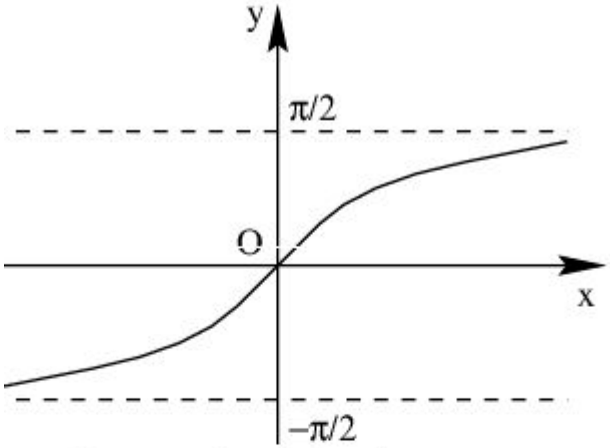

Рис. 47. *График функции* $y = \operatorname{arctg}\ x$

$y = \operatorname{arcctg}\ x.$

$D(f) = (-\infty; +\infty)$; $E(f) = \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Функция ограничена: $0 < \operatorname{arcctg}\ x < \pi$.
Можно показать, что $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg}\ x$.
Функция убывает на области определения.
Точка пересечения с осью Oy: $(0; \frac{\pi}{2})$.
График функции изображен на рис. 48.

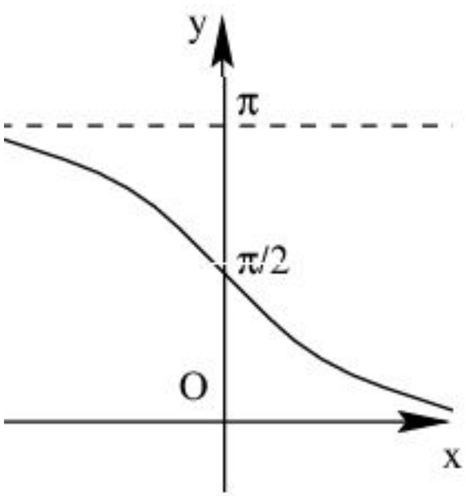

Рис. 48. *График функции* $y = \operatorname{arcctg}\ x$

4.10. Элементарные преобразования графиков

Графики многих функций можно получить из ранее рассмотренных с помощью элементарных геометрических преобразований: параллельного переноса, сжатия, растяжения, симметричного отображения. Рассмотрим некоторые из этих преобразований.

4.11. Параллельный перенос графиков

График функции $y = f(x) + b$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: ко всем ординатам графика $y = f(x)$ прибавляется величина b, что означает сдвиг графика вдоль оси Oy. Если $b > 0$, то график функции $y = f(x)$ переносится вверх параллельно оси Oy на b, если $b < 0$, то график функции $y = f(x)$ переносится вниз параллельно оси Oy на $|b|$ (рис. 49).

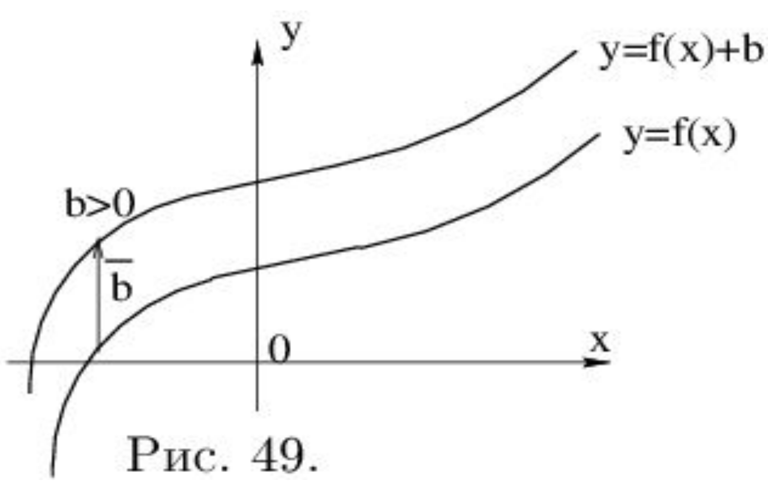

Рис. 49.

Пример 4.1. *График функции $y = x^2 - 1$ (рис. 50) смещён на 1 вниз параллельно оси Oy относительно графика функции $y = x^2$.*

График функции $y = f(x+a)$ получается с помощью переноса графика функции $y = f(x)$.

Если $a > 0$, то график функции $y = f(x)$ переносится налево параллельно оси Ox на a, если $a < 0$, то график функции $y = f(x)$ переносится направо вдоль оси Ox на $|a|$ (рис. 51).

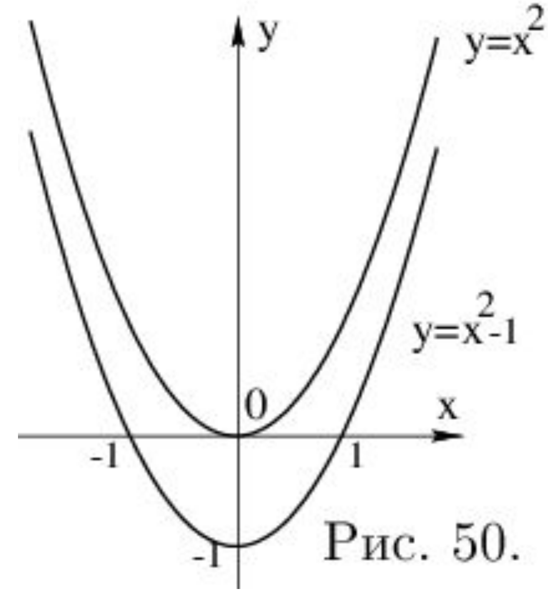

Рис. 50.

Пример 4.2. *График функции $y = (x-2)^2$ смещён на 2 единицы вправо параллельно оси Ox относительно графика функции $y = x^2$. (рис. 52).*

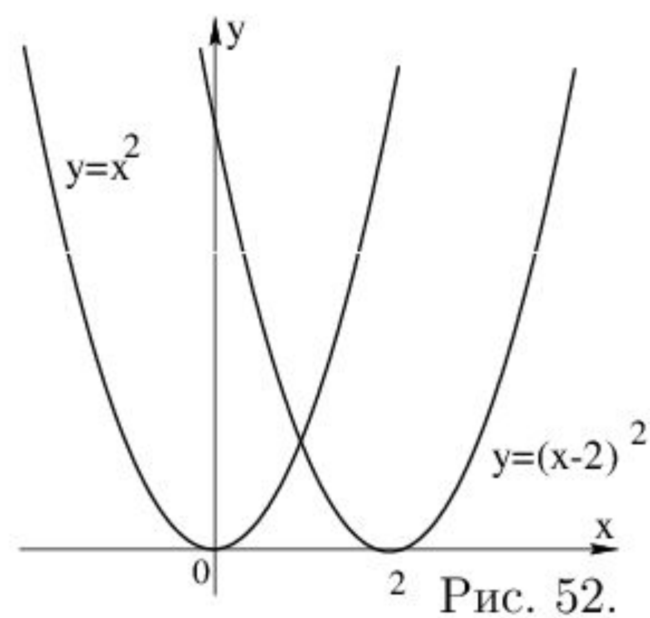

Рис. 52.

4.12. Сжатие и растяжение графиков

График функции $y = kf(x)$, где $k \in R$, получается с помощью «растяжения» графика функции $y = f(x)$ в k раз в направлении от оси Ox. «Растяжение» здесь понимается как умножение на k ординат всех точек графика $y = f(x)$. При $k > 1$ это будет действительно растяжение в k раз от оси Ox вдоль оси Oy. При $0 < k < 1$ это будет сжатие в $\frac{1}{k}$ раз к оси Ox вдоль оси Oy. При $k \leqslant -1$ это будет растяжение в $|k|$ раз с последующим симметричным отображением относительно оси Ox (перевернуть сверху вниз); при $-1 \leqslant k < 0$ это будет сжатие в $\frac{1}{|k|}$ раз и симметрия относительно оси Ox (рис. 53). В частности, график функции $y = -f(x)$ получается симметричным отображением относительно оси Ox графика функции $y = f(x)$.

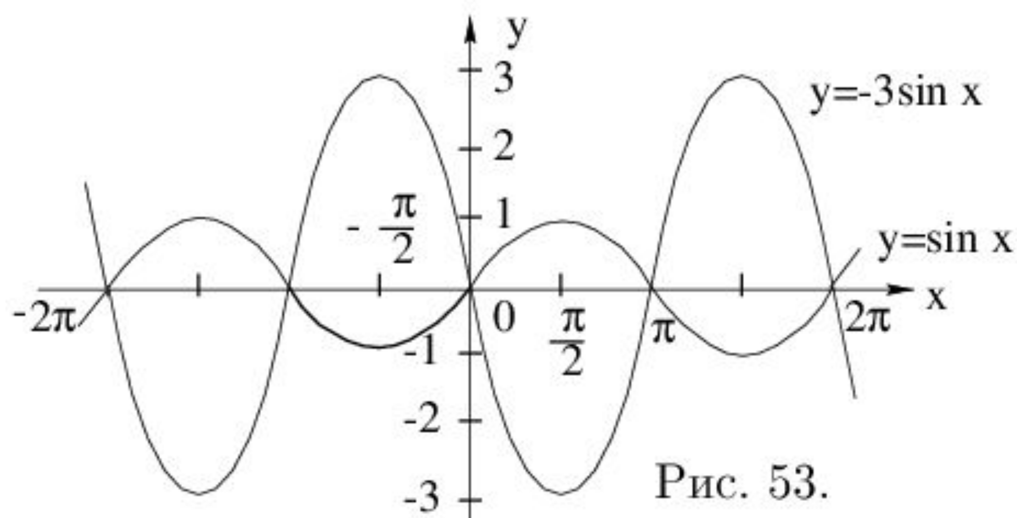

Рис. 53.

График функции $y = f(kx)$, где $k \in R$, получается с помощью «сжатия» графика $y = f(x)$ в k раз в направлении к оси Oy. «Сжатие» здесь понимается как деление на k абсцисс всех точек графика $y = f(x)$. Действительно, если, например, $f(1) = 0$, то, сделав замену $X = kx$, $Y = y$, получим, что функция $y = f(kx)$ обращается в нуль при $kx = 1$, т.е. при $x = \dfrac{1}{k}$.

При $k > 1$ график функции $y = f(x)$ сжимается в k раз к оси Oy вдоль оси Ox; при $0 < k < 1$ график функции $y = f(x)$ растягивается в $\dfrac{1}{k}$ раз от оси Oy вдоль оси Ox; при $k \leqslant -1$ исходный график сжимается в $|k|$ раз и симметрично отражается относительно оси Oy (слева направо); при $-1 \leqslant k < 0$ исходный график растягивается в $\dfrac{1}{|k|}$ раз с последующей симметрией относительно оси Oy.

В частности, график функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметрией относительно оси Oy.

Вместо преобразования графика при $k > 0$ можно исправить значения по оси Ox, поделив их на k. При $k < 0$ в этом случае следует предварительно перевернуть график слева направо.

Пример 4.3. *График функции* $y = \cos\ 2x$ *получается из графика* $y = \cos\ x$ *сжатием в 2 раза к оси* Oy*; график функции* $y = \ln(-x)$ *получается из графика* $y = \ln\ x$ *симметрией относительно оси* Oy *(рис. 54).*

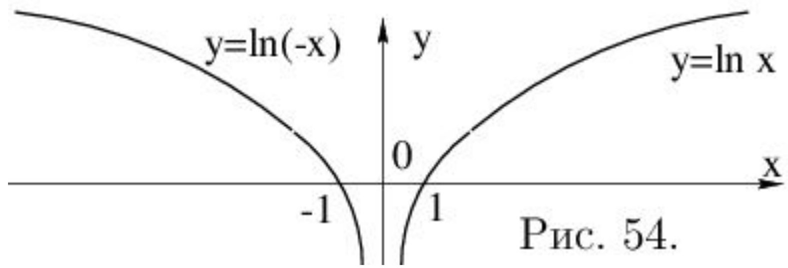

Рис. 54.

Пользуясь изложенными методами, приведем последовательность преобразований при построении графика функции $y = f(kx+b)$, если дан график функции $y = f(x)$:

- нарисовать график функции $y = f(x)$;
- получить график функции $y = f(x+b)$, сдвинув исходный, как описано в п. 4.11;
- получить график функции $y = f(kx+b)$, «сжав» предыдущий в k раз к оси Oy, как описано выше.

Пример 4.4. *Написать последовательность преобразований и построить график функции $y = \sqrt{4 - 5x}$.*

Р е ш е н и е:

- нарисуем график функции $y = \sqrt{x}$;
- получим график функции $y = \sqrt{x + 4}$, сдвинув исходный на 4 единицы влево вдоль оси Ox;
- получим график функции $y = \sqrt{-5x + 4}$, сжав предыдущий в 5 раз к оси Oy и затем отобразив симметрично относительно оси Oy. Построение графика показано на рис. 55.

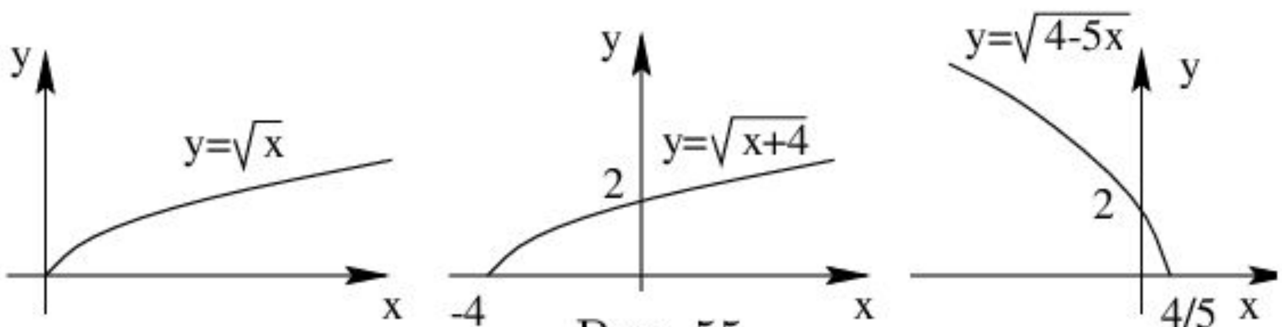

Рис. 55.

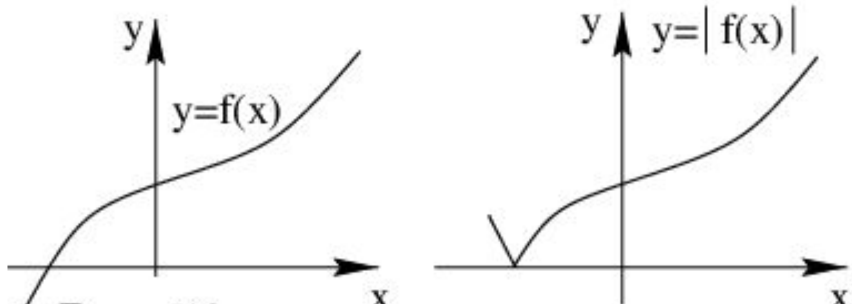

Рис. 56.

Построение графика функции $y = |f(x)|$

35.2. Понятие области

Введем некоторые определения, которые понадобятся в дальнейшем.

Определение 35.3. *Областью (открытой областью) называется множество точек плоскости, обладающее следующими двумя свойствами:*

(1) *каждая точка области принадлежит ей вместе с некоторой окрестностью этой точки (свойство открытости);*

(2) *всякие две точки области можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в этой области (свойство связности).*

Часть плоскости, лежащей внутри замкнутого контура L (см. рис. 3), является областью, так как: 1) для любой точки P, лежащей внутри L, существует окрестность, также лежащая внутри L; 2) две любые точки P и Q, лежащие внутри L, можно соединить непрерывной линией, лежащей внутри L.

Точка P_0 называется граничной точкой области G, если любая окрестность этой точки содержит как точки области G, так и точки, ей не принадлежащие.

Множество всех граничных точек области называется её границей.

На рис. 3 любая точка P_0 контура L, очевидно, является граничной.

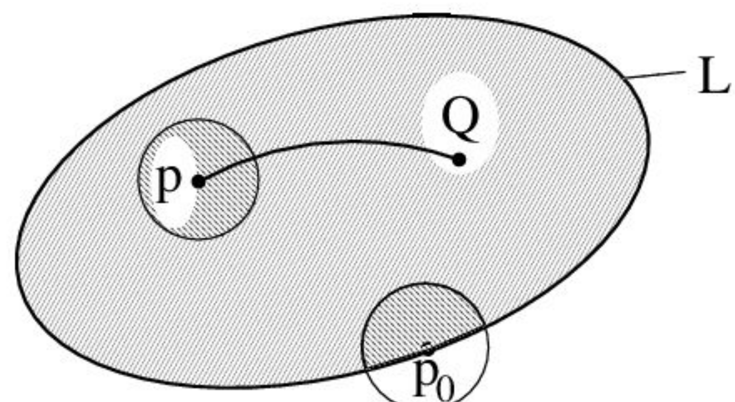

Рис. 3. *Область*

Определение 35.4. *Если к открытой области присоединить её границу, то полученное множество точек называется замкнутой областью.*

Определение 35.5. *Если для данной области можно подобрать круг, полностью её покрывающий, т.е. такой, внутри которого лежат все точки области, то такая область называется ограниченной.*

Если же круга, полностью покрывающего область, подобрать нельзя, то область называется неограниченной.

Определение 35.6. *Область G (открытая или замкнутая) называется односвязной, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости целиком принадлежит области G.*

Например, область, заключенная между окружностями $x^2+y^2=2$ и $x^2+y^2=4$ не является односвязной, так как, например, окружность $x^2+y^2=3$, лежащая в этой области, содержит внутри себя точки, не принадлежащие области (скажем, начало координат).

Замечание 35.1. *Все введенные в этом пункте понятия переносятся на пространство трёх и большего числа измерений.*

35.3. Основные понятия функций двух переменных

Определение 35.7. *Функцией двух переменных называется правило, которое каждой паре действительных чисел $(x;y) \in D$ ставит в соответствие единственное число $z \in E$.*

Переменные x и y называются независимыми переменными или аргументами, переменная z – зависимой переменной или функцией, множество D называется областью определения $D(f)$, множество E называется областью изменения или множеством значений функции $E(f)$.
Обозначать функцию двух переменных будем аналогично тому, как это делали для функции одной переменной: $z = f(x;y)$, $z = z(x;y)$. Значение функции для фиксированного значения аргументов x_0, y_0, будем обозначать $z_0 = f(x_0;y_0)$, $z_0 = z(x_0;y_0)$ или: $z_0 = z\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$. Так как каждой паре чисел $(x;y)$ соответствует единственная точка $P(x;y)$ плоскости Oxy в декартовых координатах и наоборот, то функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точки $P(x;y)$ и писать: $z = f(P)$ или $z = z(P)$. Областью определения функции в этом случае будет некоторое множество D точек плоскости Oxy.
Основными способами задания функции двух переменных являются аналитический и табличный.

При аналитическом способе функция задаётся посредством формул. При этом она может быть задана в декартовой, цилиндрической или сферической системе координат в явном и неявном виде.
Если в уравнении, определяющем функцию, значение функции z выражено в явном виде (изолировано в левой части уравнения), то говорят, что функция задана в явном виде: $z = f(x;y)$.

Пример 35.1. *Функция* $z = \dfrac{1}{x-y}$ *задана в явном виде.*

Область определения данной функции есть множество точек плоскости Oxy, для которых $y \neq x$, область изменения есть $(-\infty; +\infty)$.
Если в уравнении, определяющем функцию, значение функции z не изолированно, то говорят, что функция задана в неявном виде уравнением вида: $F(x; y; z) = 0$.
При этом остается требование, чтобы каждой паре чисел $(x; y)$ из области определения соответствовало единственное значение z.

Пример 35.2. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Функция z задана в неявном виде. Это уравнение определяет две функции: $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ и $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Как известно из курса средней школы, это есть уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат. Первая функция определяет верхнюю полусферу, вторая – нижнюю.
Область определения каждой из этих функций: $R^2 - x^2 - y^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leqslant R^2$, т.е. круг на плоскости Oxy радиуса R с центром в начале координат.

Для табличного задания функции двух переменных $z = f(x;y)$ составляется таблица «с двойным входом» вида:

y\ x	0	1	2	3	4	5
0,2	10	9	8	7	6	5
0,3	9	8	7	6	5	4
0,4	8	7	6	5	4	3

Табличное задание функции

В первой строке таблицы перечисляются значения аргумента x, в левом столбце – значения аргумента y, в остальных клетках – соответствующие значения функции z. Значение функции соответствующее данному значению аргумента x (например $x = 2$) и y (например $y = 0,3$) расположено на пересечении соответствующего столбца и строки: $z\big|_{\substack{x=2 \\ y=0,3}} = 7$.

Графиком функции двух переменных является множество точек пространства, удовлетворяющих уравнению функции. Для функции двух переменных это будет в общем случае некоторая поверхность. Следует отметить, что поскольку эта поверхность изображается в проекции на плоскость (лист бумаги), изображение графиков функции двух переменных вызывает определённые трудности. Однако в настоящее время в связи с широким распространением персональных компьютеров с большим набором графических пакетов прикладных программ эти трудности отступают на второй план по сравнению с наглядностью графического метода представления функции.

35.4. Функции более двух независимых переменных

На практике встречаются функции трёх и более независимых переменных. Так, например, объём V прямоугольного параллелепипеда зависит от трёх аргументов – длины x, ширины y и высоты $z : V = xyz$.

Определение 35.8. *Функцией трёх переменных называется правило, которое каждой тройке действительных чисел $(x;y;z) \in D$ ставит в соответствие единственное число $u \in E$.*

Переменные x, y, z называют независимыми переменными или аргументами, переменную u – зависимой переменной или функцией, множество D называют областью определения функции $D(f)$, множество E – областью изменения или множеством значений функции $E(f)$.
Обозначаются функции трёх переменных так же, как и функции двух переменных: $u = f(x;y;z)$, $u = u(x;y;z)$, $\omega = \omega(x;y;z)$. Функцию трёх переменных можно рассматривать как функцию точки $P(x;y;z)$ в пространстве $Oxyz$: $u = f(P)$. Область определения в такой интерпретации будет множеством точек в этом пространстве.

Способами задания функции трёх переменных являются также аналитический и табличный. Следует, однако отметить, что пользоваться таблицей с тремя входами менее удобно.

Аналогично можно ввести понятие функции четырёх переменных, пяти, вообще – n переменных. Область определения функции n переменных является множество D системы действительных чисел $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$. Функцию n переменных $u = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ также часто рассматривают как функцию точки $P(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ n-мерного пространства и пишут: $u = f(P)$.
Заметим, что функцию трёх или более переменных изобразить с помощью графика в пространстве невозможно.

Спасибо за внимание