Арифметическая прогрессия

Теоретические сведения

Определение. **Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом.**

Формула n-члена

Выведем формулу n-го члена арифметической прогрессии.

Из определения арифметической прогрессии следует, что:

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$
$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d.$$

Аналогично найдем, что $a_6 = a_1 + 5d$, $a_7 = a_1 + 6d$ и т. д. Вообще, чтобы найти a_n, надо к a_1 прибавить произведение $(n - 1)d$, т. е.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Доказательство формулы n-члена

Справедливость этого утверждения можно доказать, пользуясь методом математической индукции.

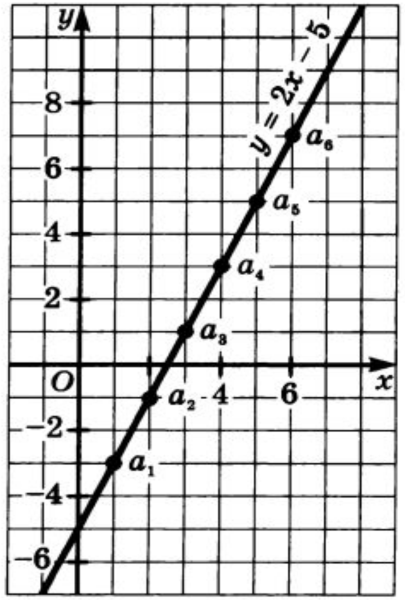

Рис. 91

Формулу n-го члена арифметической прогрессии можно записать иначе: $a_n = dn + (a_1 - d)$. Отсюда ясно, что арифметическая прогрессия является функцией $f(n)$, которая может быть задана формулой вида $y = kn + l$, где $k = d$, $l = a_1 - d$, т. е. является линейной функцией.

На координатной плоскости члены арифметической прогрессии (a_n) изображаются точками с координатами $(1; a_1)$, $(2; a_2)$, $(3; a_3)$ и т. д., расположенными на прямой $y = kx + l$, где $k = d$, $l = a_1 - d$, на одинаковом расстоянии друг от друга. Например, члены арифметической прогрессии −3, −1, 1, 3, 5, 7, ... изображаются точками, расположенными на прямой $y = kx + l$, где $k = 2$, $l = -3 - 2 = -5$, т. е. на прямой $y = 2x - 5$ (рис. 91).

Важное свойство арифметической прогрессии

Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, является средним арифметическим предыдущего и последующего членов.

Доказательство свойства

Действительно, из определения арифметической прогрессии вытекает, что

$$a_n - a_{n-1} = d, \quad a_{n+1} - a_n = d.$$

Значит,

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n,$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Верно и обратное: если в последовательности каждый член, начиная со второго, является средним арифметическим предыдущего и последующего членов, то последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия.

В самом деле, из равенства

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

получаем

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n \text{ при } n \geqslant 2.$$

Следовательно, разность между предыдущим и последующим членами остается постоянной, а это означает, что (a_n) — арифметическая прогрессия.

Характеристическое свойство

Таким образом, доказано свойство, выражающее необходимое и достаточное условие того, что последовательность является арифметической прогрессией:

числовая последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, начиная со второго, есть среднее арифметическое предыдущего и последующего членов.

Это свойство называют *характеристическим свойством* арифметической прогрессии.

Свойство арифметической прогрессии

Выведем формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии. Для этого предварительно докажем свойство арифметической прогрессии:

если a_n — арифметическая прогрессия и $p + m = k + l$, где p, m, k, l — натуральные числа, то $a_p + a_m = a_k + a_l$.

Действительно, пусть d — разность прогрессии, тогда

$$a_p + a_m = a_1 + d(p - 1) + a_1 + d(m - 1) = 2a_1 + d(p + m - 2),$$

$$a_k + a_l = a_1 + d(k - 1) + a_1 + d(l - 1) = 2a_1 + d(k + l - 2).$$

Так как $p + m = k + l$, то $a_p + a_m = a_k + a_l$.

Из доказанного свойства следует, что в конечной арифметической прогрессии сумма членов, равноудаленных от крайних членов, равна сумме крайних членов. Возможно, что с этим свой-

Формулы суммы первых n-членов

В каждой из скобок записана сумма, равная сумме $a_1 + a_n$. Всего таких скобок n. Следовательно,

$$2S_n = (a_1 + a_n)n,$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Мы получили формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии.

Формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии (a_n) можно записать в другом виде. Выразив a_n через a_1 и d, где d — разность прогрессии, получим:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n,$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Выведение формулы суммы n-члена

Обозначим через S_n сумму первых n членов арифметической прогрессии (a_n) и выпишем два равенства, располагая в первом случае члены прогрессии в порядке возрастания их номеров, а во втором — в порядке убывания номеров:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Складывая эти равенства и группируя попарно слагаемые, получим

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + \\ + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

В каждой из скобок записана сумма, равная сумме $a_1 + a_n$. Всего таких скобок n. Следовательно,

$$2S_n = (a_1 + a_n)n,$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Мы получили формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии.

Виды заданий

- Нахождение пропущенных членов арифметической прогрессии или нахождение заданного члена;
- Нахождение одинаковых членов разных прогрессий;
- Создание арифметической прогрессии по заданным условиям;
- Проверка формул на соответствие арифметической прогрессии;
- Нахождение количества членов по заданному условию;
- Задачи на доказательства с использованием арифметической прогрессии.

Виды заданий

- Нахождение суммы n-члена;
- Нахождение количества членов прогрессии;
- Решение уравнений;