Решить систему логарифмических уравнений

$$\begin{cases} 2\log_3 y + 3^{x^2+5x-5} = 7, \\ 3\log_3 y - 3^{x^2+5x-5} = 3; \end{cases}$$

ЛОГАРИФМИЧЕСК ИЕ НЕРАВЕНСТВА

Логарифмическими неравенствами называют неравенства вида:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x), \text{где } \alpha > 0, \alpha \neq 1,$$

и неравенства, сводящиеся к этому виду.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} > 0, \text{т.е. } \log_a t > 0, \text{где } t = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Получаем 2 случая: $a > 1$ и $0 < a < 1$

$$a > 1 \quad \log_a t > 0 \qquad t > 1 \qquad \frac{f(x)}{g(x)} > 1$$

$$f(x) > g(x)$$

$$0 < a < 1 \quad \log_a t > 0 \qquad 0 < t < 1 \qquad 0 < \frac{f(x)}{g(x)} < 1$$

$$f(x) < g(x)$$

Теорема: $f(x) > 0, g(x) > 0$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) <=> f(x) > g(x)$$

при $\alpha > 1;$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) <=> f(x) < g(x)$$

при $0 < \alpha < 1$

$$\alpha > 1 \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases}$$

$$0 < \alpha < 1 \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Пример 1.

а) $\log_3(2x-4) > \log_3(14-x)$;

$$\begin{cases} 2x-4>0, \\ 14-x>0, \\ 2x-4>14-x; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>2, \\ x<14, \\ x>6; \end{cases}$$

$6 < x < 14$

$x \in (6;14)$.

Ответ: $(6;14)$

б) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-4) > \log_{\frac{1}{3}}(14-x)$;

$$\begin{cases} 2x-4>0, \\ 14-x>0, \\ 2x-4<14-x; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>2, \\ x<14, \\ x<6; \end{cases}$$

$2 < x < 6$

$x \in (2;6)$.

Ответ: $(2;6)$

Пример 2.

$$\log_{\frac{1}{2}}(16+4x-x^2) \le -4;$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(16+4x-x^2) \le \log_{\frac{1}{2}}16;$$

$0 < \frac{1}{2} < 1$ $\quad \begin{cases} 16+4x-x^2 > 0, \\ 16+4x-x^2 \ge 16. \end{cases}$ $\quad 16+4x-x^2 \ge 16,$

$4x - x^2 \ge 0,$ $\quad x^2 - 4x \le 0,$

$x(x-4) \le 0,$ $\quad x \in [0;\ 4].$

Ответ: [0; 4]

Пример 3.

$$\lg x + \lg(45 - x) < 2 + lg2,$$

$$\lg x(45 - x) < lg100 + lg2,$$

$$\lg(45x - x^2) < lg200,$$

$$a = 10, a > 1,$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ 45 - x > 0, \\ 45x - x^2 < 200; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x < 45, \\ x^2 - 45x + 200 > 0. \end{cases}$$

1) $x^2 - 45x + 200 > 0,\ \ (x - 5)(x - 40) > 0,$

$x < 5, x > 40,\ \ x \in (-\infty; 5) \cup (40; +\infty).$

2) $x \in (0; 5) \cup (40; 45)$

Ответ: $(0; 5) \cup (40; 45)$.

Пример 4. $\log_2^2 x^2 - 5\log_2 x + 1 \le 0.$

ОДЗ: $x > 0$,

$\log_2^2 x^2 = 4\log_2^2|x| = 4\log_2^2 x,$

$4\log_2^2 x - 5\log_2 x + 1 \le 0,$

$\log_2 x = t,\ \ 4t^2 - 5t + 1 \le 0,$

$4(t-1)(t-\frac{1}{4}) \le 0, \quad (t-1)(t-\frac{1}{4}) \le 0,\ \ t \in \left[\frac{1}{4}; 1\right].$

$\frac{1}{4} \le \log_2 x \le 1, \quad \log_2 2^{\frac{1}{4}} \le \log_2 x \le \log_2 2,$

$2 > 1, \ \ 2^{\frac{1}{4}} \le x \le 2, \ \ x \in [\sqrt[4]{2}; 2].$

Ответ: $[\sqrt[4]{2}; 2]$

Решить самостоятельно

1) $\log_2 x \geq \log_2 3.$

1) $[0; 3]$

2) $[3; +\infty)$

3) $(0; 3]$

4) $(3; +\infty)$

5) $(-\infty; 3]$

Решить самостоятельно

2) $\log_2 x \le \log_2 3.$

1) $(0;\ 3)$

2) $[3;\ +\infty)$

3) $(0;\ 3]$

4) $(3;\ +\infty)$

5) $(-\infty; 3]$

Решить самостоятельно

$1)\log_2 x < \frac{1}{2};$

$2)\log_{0.2} x < -3;$

$3)\log_{\frac{1}{4}} \frac{x}{5} > 1;$

$4)\log_3 (8-6x) \le \log_3 2x;$

$5)\log_{\frac{1}{3}} (-x) > \log_{\frac{1}{3}} (4-2x);$

$6)\log_{\sqrt{2}} (x^2+10x) > \log_{\sqrt{2}} (x-14).$