

Решить систему логарифмических уравнений

$$\begin{cases} 2 \log_3 y + 3^{x^2+5x-5} = 7, \\ 3 \log_3 y - 3^{x^2+5x-5} = 3; \end{cases}$$

**ЛОГАРИФМИЧЕСК
ИЕ
НЕРАВЕНСТВА**

**Логарифмическими
неравенствами называют
неравенства вида:**

$$\log_a f(x) > \log_a g(x), \text{ где } a > 0, a \neq 1,$$

**и неравенства, сводящиеся к
этому виду.**

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} > 0, \text{ т.е. } \log_a t > 0, \text{ где } t = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Получаем 2 случая: $a > 1$ и $0 < a < 1$

$$a > 1 \quad \log_a t > 0 \quad t > 1 \quad \frac{f(x)}{g(x)} > 1$$

$$f(x) > g(x)$$

$$0 < a < 1 \quad \log_a t > 0 \quad 0 < t < 1 \quad 0 < \frac{f(x)}{g(x)} < 1$$

$$f(x) < g(x)$$

Теорем $f(x) > 0, g(x) > 0$

а:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

при $\alpha > 1$;

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

при $0 < \alpha < 1$

$$\alpha > 1 \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases}$$

$$0 < \alpha < 1 \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Пример 1. а) $\log_3(2x - 4) > \log_3(14 - x);$

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0, \\ 14 - x > 0, \\ 2x - 4 > 14 - x; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ x < 14, \\ x > 6; \end{cases} \quad \begin{array}{l} 6 < x < 14 \\ x \in (6; 14). \\ \text{Ответ: } (6; 14) \end{array}$$

б) $\log_{\frac{1}{3}}(2x - 4) > \log_{\frac{1}{3}}(14 - x);$

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0, \\ 14 - x > 0, \\ 2x - 4 < 14 - x; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ x < 14, \\ x < 6; \end{cases} \quad \begin{array}{l} 2 < x < 6 \\ x \in (2; 6). \\ \text{Ответ: } (2; 6) \end{array}$$

Пример

2.

$$\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leq -4;$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leq \log_{\frac{1}{2}} 16;$$

$$0 < \frac{1}{2} < 1 \quad \begin{cases} 16 + 4x - x^2 > 0, \\ 16 + 4x - x^2 \geq 16. \end{cases} \quad 16 + 4x - x^2 \geq 16,$$

$$4x - x^2 \geq 0, \quad x^2 - 4x \leq 0,$$

$$x(x - 4) \leq 0, \quad x \in [0; 4].$$

Ответ: $[0; 4]$

Пример

$$\lg x + \lg(45 - x) < 2 + \lg 2,$$

3. $\lg x(45 - x) < \lg 100 + \lg 2,$

$$\lg(45x - x^2) < \lg 200,$$

$$a = 10, a > 1,$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ 45 - x > 0, \\ 45x - x^2 < 200; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x < 45, \\ x^2 - 45x + 200 > 0. \end{cases}$$

$$1) x^2 - 45x + 200 > 0, (x - 5)(x - 40) > 0,$$

$$x < 5, x > 40, x \in (-\infty; 5) \cup (40; +\infty).$$

$$2) x \in (0; 5) \cup (40; 45)$$

$$\text{Ответ: } (0; 5) \cup (40; 45).$$

Пример 4.

$$\log_2^2 x^2 - 5 \log_2 x + 1 \leq 0.$$

$$\text{ОДЗ: } x > 0,$$

$$\log_2^2 x^2 = 4 \log_2^2 |x| = 4 \log_2^2 x,$$

$$4 \log_2^2 x - 5 \log_2 x + 1 \leq 0,$$

$$\log_2 x = t, \quad 4t^2 - 5t + 1 \leq 0,$$

$$4\left(t - 1\right)\left(t - \frac{1}{4}\right) \leq 0, \quad \left(t - 1\right)\left(t - \frac{1}{4}\right) \leq 0, \quad t \in \left[\frac{1}{4}; 1\right].$$

$$\frac{1}{4} \leq \log_2 x \leq 1, \quad \log_2 2^{\frac{1}{4}} \leq \log_2 x \leq \log_2 2,$$

$$2 > 1, \quad 2^{\frac{1}{4}} \leq x \leq 2, \quad x \in \left[\sqrt[4]{2}; 2\right].$$

$$\text{Ответ: } \left[\sqrt[4]{2}; 2\right]$$

Решить

самостоятельно

1) $[0; 3]$

1) $\log_2 x \geq \log_2 3.$

2) $[3; +\infty)$

3) $(0; 3]$

4) $(3; +\infty)$

5) $(-\infty; 3]$

Решить

1) $(0; 3)$ **самостоятельно** 2) $\log_2 x \leq \log_2 3.$

2) $[3; +\infty)$

3) $(0; 3]$

4) $(3; +\infty)$

5) $(-\infty; 3]$

Решить самостоятельно

$$1) \log_2 x < \frac{1}{2};$$

$$2) \log_{0.2} x < -3;$$

$$3) \log_{\frac{1}{4}} \frac{x}{5} > 1;$$

$$4) \log_3 (8 - 6x) \leq \log_3 2x;$$

$$5) \log_{\frac{1}{3}} (-x) > \log_{\frac{1}{3}} (4 - 2x);$$

$$6) \log_{\sqrt{2}} (x^2 + 10x) > \log_{\sqrt{2}} (x - 14).$$