Лекция 2.

Математические методы решения задач по акустике волнового уравнения. Фундаментальные решения волновых уравнений. Обобщенные функции в акустических задачах. Решение прямой акустической задачи – волны в пространстве

Вывод волнового уравнения

Пусть дано уравнение плоской волны:

$$A(\vec{r},t) = A_0 cos\left(\omega t - (\vec{k},\vec{r}) + \varphi_0\right),$$

где

- $A(x,t)$ — *величина возмущения в данной точке пространства x и времени t;*
- A_o — *амплитуда волны;*
- ω — *круговая частота;*
- $\vec{k}$ — *волновой вектор, равный $k\vec{n}$*

  где

  - k — *волновое число;*
  - $\vec{n}$ — *единичный вектор нормали, проведённый к волновому фронту*
- $\vec{r}\ (x,y,z)$ — *радиус-вектор точки с координатами x, y и z;*
- $(\vec{k},\vec{r})$ — *скалярное произведение векторов $\vec{k}$ и $\vec{r}$.*
- φ_0 — *начальная фаза колебаний.*

Продифференцируем его по x по y по z и по t. Получим четыре уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 A(\vec{r},t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A_0 cos\left(\omega t - (\vec{k},\vec{r}) + \varphi_0\right) = -\omega^2 A(\vec{r},t) & (1) \\ \dfrac{\partial^2 A(\vec{r},t)}{\partial x^2} = -k_x^2 A_0 cos\left(\omega t - (\vec{k},\vec{r}) + \varphi_0\right) = -k_x^2 A(\vec{r},t) & (2) \\ \dfrac{\partial^2 A(\vec{r},t)}{\partial y^2} = -k_y^2 A_0 cos\left(\omega t - (\vec{k},\vec{r}) + \varphi_0\right) = -k_y^2 A(\vec{r},t) & (3) \\ \dfrac{\partial^2 A(\vec{r},t)}{\partial z^2} = -k_z^2 A_0 cos\left(\omega t - (\vec{k},\vec{r}) + \varphi_0\right) = -k_z^2 A(\vec{r},t) & (4) \end{cases}$$

Сложим (2) , (3) *и* (4) :

$$\frac{\partial^2 A(\vec{r},t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A(\vec{r},t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A(\vec{r},t)}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) A(\vec{r},t) = -\vec{k}^2 \cdot A(\vec{r},t)$$

Из полученного уравнения и уравнения (1) , *заменив* $\dfrac{k^2}{\omega^2} = \dfrac{1}{v^2}$, *получаем, что*

$$\frac{\partial^2 A(\vec{r},t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A(\vec{r},t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A(\vec{r},t)}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 A(\vec{r},t)}{\partial t^2} \Leftrightarrow \Delta A(\vec{r},t) = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 A(\vec{r},t)}{\partial t^2}$$

Основные акустические формулы

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - c_s^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right) = 0.$$

- волновое уравнение

Частное решение для плоской волны, распространяющейся в направлении x, имеет вид $\Phi = g(x - c_s t)$, где g – произвольная функция.

$$V_0 = \frac{p'_0}{\rho_0 c_s}$$

- амплитуда колебательной скорости

$$\xi_0 = \frac{V_0}{2\pi f}$$

- амплитуда смещения

$$J = \frac{p'^2_0}{2\rho_0 c_s}$$

- средняя интенсивность колебаний

$$W = \frac{J}{c_s}$$

- средняя плотность энергии волны

Задача 1

Найти решение волнового уравнения для бегущей плоской волны.

Показать, что звуковая волна является продольной

Установить связь между возмущениями давления, плотности и колебательной скоростью в такой волне

Решение

1. Для плоской волны, распространяющейся по оси x, волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0, \qquad (90)$$

где c_s – волновая скорость (скорость звука), $\Phi(x,t)$ – потенциал скорости. Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\Phi(x,t) = F_1(x - c_s t) + F_2(x + c_s t). \qquad (91)$$

Здесь F_1 и F_2 – произвольные функции.

Для волны, распространяющейся в сторону положительных x потенциал скорости $\Phi(x,t)$ имеет вид:

$$\Phi(x,t) = F_1(x - c_s t). \tag{92}$$

Потенциал скорости вводится соотношением:

$$\overline{V} = grad\Phi . \tag{93}$$

Из (92) и (93) видно, что в бегущей волне колебательная скорость имеет единственную компоненту $V_x = V$. Т.е частицы среды в волне колеблются вдоль направления распространения, следовательно, звуковая волна является продольной.

2. В продольной волне колебательная скорость V связана с приращением давления p' и плотности ρ' алгебраическими соотношениями. Используя (93) и соотношение

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{94}$$

из (92) получаем

$$V = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = F_1(x - c_s t),\ p' = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \rho_0 c_s F_1(x - c_s t). \tag{95}$$

Следовательно

$$\frac{p'}{V} = \rho_0 c_s. \tag{96}$$

Соотношение (96) называют акустическим законом Ома, величину $\rho_0 c_s$ – волновым сопротивлением.

Воспользуемся уравнением состояния

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \rho' \tag{97}$$

где S – энтропия и учтено, что звуковая волна в идеальной жидкости есть адиабатическое движение.

Для возмущений плотности ρ' и колебательной скорости имеем:

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{V}{c_s} \tag{98}$$

Задача 2

Найти длину звуковой волны в воздухе на частоте $500\,Гц$ при температуре $t = 15°C$ и давлении $p_0 = 10^5\,Па$. Плотность звука $\rho_0 = 1.26\frac{кг}{м^3}$, показатель адиабаты $\gamma = \frac{c_p}{c_V} = 1.14$.

Ответ

$$\lambda = \frac{c_s}{f} = \frac{1}{f}\sqrt{\gamma\frac{p_0}{\rho_0}} \approx 0.7\,м$$

Задача 3

Амплитуда звукового давления в плоской гармонической волне равна $p'_0 = 2 \cdot 10^{-4}\,\dfrac{Н}{м^2}$. Вычислить амплитуды колебательной скорости V_0 и смещения ξ_0, средние интенсивность J и плотность энергии волны в воздухе W на частоте $f = 1кГц$ $\left(\rho_0 c_s = 420\dfrac{кг}{м^2 \cdot с}\right)$.

Ответ

$$V_0 = \frac{p'_0}{\rho_0 c_s} = 4.7 \cdot 10^{-7}\,\frac{м}{с}$$

$$\xi_0 = \frac{V_0}{2\pi f} = 7 \cdot 10^{-11} м$$

$$J = \frac{p'^2_0}{2\rho_0 c_s} = 4.8 \cdot 10^{-11}\,\frac{Вт}{м^2}$$

$$W = \frac{J}{c_s} = 1.4 \cdot 10^{-13}\,\frac{Дж}{м^3}$$

Решение волнового уравнения в Maple

```
> wave:=diff(u(x,t),t,t)-c^2*diff(u(x,t),x,x);
```

$$wave := \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right) \qquad \textbf{(1)}$$

```
> sol:=pdsolve(wave,u(x,t));
```

$$sol := u(x, t) = \_F1(c\, t + x) + \_F2(c\, t - x) \qquad \textbf{(2)}$$

```
> f1:=xi->sech(-xi^2);
```

$$f1 := \xi \rightarrow \mathrm{sech}\left(-\xi^2\right) \qquad \textbf{(3)}$$

```
> f2:=xi->piecewise(-1/2<xi and xi<1/2,1,0);
```

$$f2 := \xi \rightarrow piecewise\left(-\frac{1}{2} < \xi \textbf{ and } \xi < \frac{1}{2}, 1, 0\right) \qquad \textbf{(4)}$$

```
> subs(_F1=f1, _F2=f2, c=1, sol);
```

$$u(x, t) = f1(t + x) + f2(t - x) \tag{5}$$

```
> subs(%,u(x,t));
```

$$\operatorname{sech}\left((t + x)^2\right) + \left(\begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < t - x \textbf{ and } t - x < \frac{1}{2} \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}\right) \tag{6}$$

```
> f:=unapply(%,x,t);
```

$$f := (x, t) \rightarrow \operatorname{sech}\left((t + x)^2\right) + \textit{piecewise}\left(-\frac{1}{2} < t - x \textbf{ and } t - x < \frac{1}{2}, 1, 0\right) \tag{7}$$

```
> plot3d(f,-20..20,0..10,grid=[60,60]);
```