

Лекция 2.

Математические методы решения задач по акустике волнового уравнения.

Фундаментальные решения волновых уравнений. Обобщенные функции в акустических задачах. Решение прямой акустической задачи – волны в пространстве

Вывод волнового уравнения

Пусть дано уравнение плоской волны:

$$A(\vec{r}, t) = A_0 \cos(\omega t - (\vec{k}, \vec{r}) + \varphi_0),$$

где

- $A(x, t)$ — величина возмущения в данной точке пространства x и времени t ;
- A_0 — амплитуда волны;
- ω — круговая частота;
- \vec{k} — волновой вектор, равный $k\vec{n}$

где

- k — волновое число;
- \vec{n} — единичный вектор нормали, проведённый к волновому фронту
- $\vec{r}(x, y, z)$ — радиус-вектор точки с координатами x, y и z ;
- (\vec{k}, \vec{r}) — скалярное произведение векторов \vec{k} и \vec{r} .
- φ_0 — начальная фаза колебаний.

Продифференцируем его по x по y по z и по t . Получим четыре уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 A(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A_0 \cos(\omega t - (\vec{k}, \vec{r}) + \varphi_0) = -\omega^2 A(\vec{r}, t) \quad (1) \\ \frac{\partial^2 A(\vec{r}, t)}{\partial x^2} = -k_x^2 A_0 \cos(\omega t - (\vec{k}, \vec{r}) + \varphi_0) = -k_x^2 A(\vec{r}, t) \quad (2) \\ \frac{\partial^2 A(\vec{r}, t)}{\partial y^2} = -k_y^2 A_0 \cos(\omega t - (\vec{k}, \vec{r}) + \varphi_0) = -k_y^2 A(\vec{r}, t) \quad (3) \\ \frac{\partial^2 A(\vec{r}, t)}{\partial z^2} = -k_z^2 A_0 \cos(\omega t - (\vec{k}, \vec{r}) + \varphi_0) = -k_z^2 A(\vec{r}, t) \quad (4) \end{array} \right.$$

Сложим (2), (3) и (4) :

$$\frac{\partial^2 A(\vec{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A(\vec{r}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A(\vec{r}, t)}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) A(\vec{r}, t) = -\vec{k}^2 \cdot A(\vec{r}, t)$$

Из полученного уравнения и уравнения (1), заменив $\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{v^2}$, получаем, что

$$\frac{\partial^2 A(\vec{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A(\vec{r}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A(\vec{r}, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 A(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \Leftrightarrow \Delta A(\vec{r}, t) = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 A(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

Основные акустические формулы

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c_s^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad \text{- волновое уравнение}$$

Частное решение для плоской волны, распространяющейся в направлении x , имеет вид $\Phi = g(x - c_s t)$, где g – произвольная функция.

$$V_0 = \frac{p'_0}{\rho_0 c_s} \quad \text{- амплитуда колебательной скорости}$$

$$\xi_0 = \frac{V_0}{2\pi f} \quad \text{- амплитуда смещения}$$

$$J = \frac{p_0'^2}{2\rho_0 c_s} \quad \text{- средняя интенсивность колебаний}$$

$$W = \frac{J}{c_s} \quad \text{- средняя плотность энергии волны}$$

Задача 1

Найти решение волнового уравнения для бегущей плоской волны.

Показать, что звуковая волна является продольной

Установить связь между возмущениями давления, плотности и колебательной скоростью в такой волне

Решение

1. Для плоской волны, распространяющейся по оси x , волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (90)$$

где c_s – волновая скорость (скорость звука), $\Phi(x, t)$ – потенциал скорости. Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\Phi(x, t) = F_1(x - c_s t) + F_2(x + c_s t). \quad (91)$$

Здесь F_1 и F_2 – произвольные функции.

Для волны, распространяющейся в сторону положительных x потенциал скорости $\Phi(x, t)$ имеет вид:

$$\Phi(x, t) = F_1(x - c_s t). \quad (92)$$

Потенциал скорости вводится соотношением:

$$\bar{V} = grad\Phi. \quad (93)$$

Из (92) и (93) видно, что в бегущей волне колебательная скорость имеет единственную компоненту $V_x = V$. Т.е. частицы среды в волне колеблются вдоль направления распространения, следовательно, звуковая волна является продольной.

2. В продольной волне колебательная скорость V связана с приращением давления p' и плотности ρ' алгебраическими соотношениями. Используя (93) и соотношение

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (94)$$

из (92) получаем

$$V = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = F_1(x - c_s t), \quad p' = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \rho_0 c_s F_1(x - c_s t). \quad (95)$$

Следовательно

$$\frac{p'}{V} = \rho_0 c_s. \quad (96)$$

Соотношение (96) называют акустическим законом Ома, величину $\rho_0 c_s$ – волновым сопротивлением.

Воспользуемся уравнением состояния

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \rho' \quad (97)$$

где S – энтропия и учтено, что звуковая волна в идеальной жидкости есть адиабатическое движение.

Для возмущений плотности ρ' и колебательной скорости имеем:

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{V}{c_s} \quad (98)$$

Задача 2

Найти длину звуковой волны в воздухе на частоте 500Гц при температуре $t = 15^\circ\text{C}$ и давлении $p_0 = 10^5\text{Па}$. Плотность звука $\rho_0 = 1.26 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$,

показатель адиабаты $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.14$.

Ответ

$$\lambda = \frac{c_s}{f} = \frac{1}{f} \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} \approx 0.7\text{м}$$

Задача 3

Амплитуда звукового давления в плоской гармонической волне равна $p'_0 = 2 \cdot 10^{-4} \frac{Н}{м^2}$. Вычислить амплитуды колебательной скорости V_0 и смещения ξ_0 , средние интенсивность J и плотность энергии волны в воздухе W на частоте $f = 1 кГц$ ($\rho_0 c_s = 420 \frac{кг}{м^2 \cdot с}$).

Ответ

$$V_0 = \frac{p'_0}{\rho_0 c_s} = 4.7 \cdot 10^{-7} \frac{м}{с}$$

$$\xi_0 = \frac{V_0}{2\pi f} = 7 \cdot 10^{-11} м$$

$$J = \frac{p'^2_0}{2\rho_0 c_s} = 4.8 \cdot 10^{-11} \frac{Вт}{м^2}$$

$$W = \frac{J}{c_s} = 1.4 \cdot 10^{-13} \frac{Дж}{м^3}$$

Решение волнового уравнения в Maple

> `wave:=diff(u(x,t),t,t)-c^2*diff(u(x,t),x,x);`

$$wave := \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right) \quad (1)$$

> `sol:=pdsolve(wave,u(x,t));`

$$sol := u(x, t) = _F1(ct + x) + _F2(ct - x) \quad (2)$$

> `f1:=xi->sech(-xi^2);`

$$f1 := \xi \rightarrow \operatorname{sech}(-\xi^2) \quad (3)$$

> `f2:=xi->piecewise(-1/2<xi and xi<1/2,1,0);`

$$f2 := \xi \rightarrow \operatorname{piecewise}\left(-\frac{1}{2} < \xi \text{ and } \xi < \frac{1}{2}, 1, 0\right) \quad (4)$$

> **subs(_F1=f1, _F2=f2, c=1, sol);**

$$u(x, t) = f1(t + x) + f2(t - x) \quad (5)$$

> **subs(% , u(x, t));**

$$\operatorname{sech}((t + x)^2) + \left(\begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < t - x \text{ and } t - x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \right) \quad (6)$$

> **f:=unapply(% , x, t);**

$$f := (x, t) \rightarrow \operatorname{sech}((t + x)^2) + \operatorname{piecewise}\left(-\frac{1}{2} < t - x \text{ and } t - x < \frac{1}{2}, 1, 0\right) \quad (7)$$

```
> plot3d(f, -20..20, 0..10, grid=[60, 60]);
```

