



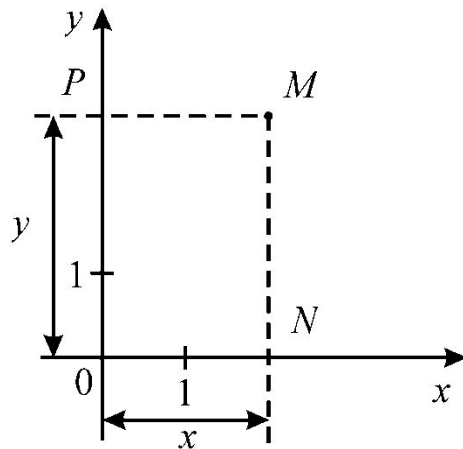
# Аналитическая геометрия на плоскости



# Основные задачи метода координат

# Прямоугольная система координат

**Определение:** Прямоугольной (декартовой) системой координат на плоскости называется две взаимно перпендикулярные оси  $Ox$  и  $Oy$ , имеющие общее начало  $O$  и одинаковую масштабную единицу.



$Ox$  называется *осью абсцисс*,  $Oy$  – *осью ординат*. Из произвольной точки  $M$  опустим перпендикуляры на оси  $Ox$  и  $Oy$ .

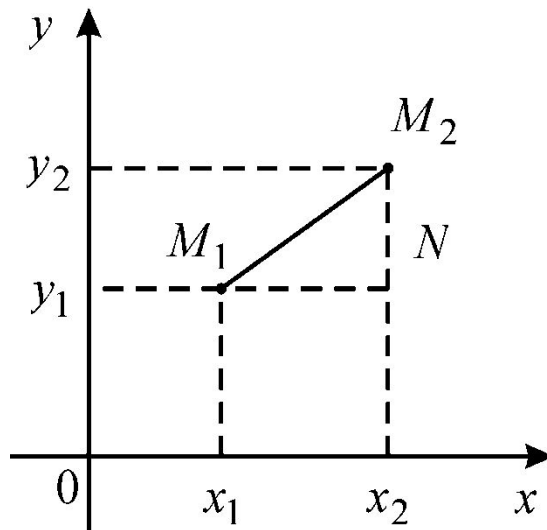
Число  $x$  называется абсциссой,  $y$  – ординатой точки  $M$ . Упорядоченная пара  $(x; y)$  называется координатами точки  $M$ .

Каждой точке на плоскости в прямоугольной системе координат соответствует единственная пара действительных чисел  $(x; y)$ .

Метод определения положения точек на плоскости с помощью чисел называется *методом координат*.

Расстояние от точки  $M(x; y)$  до начала координат определяется по формуле:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1)$$



**Теорема:** Для любых двух точек  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$  на плоскости расстояние между ними выражается формулой:

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2)$$

*Пример:* Даны точки  $M_1(-2; 1)$ ,  $M_2(1; -3)$ . Найти расстояние между этими точками.

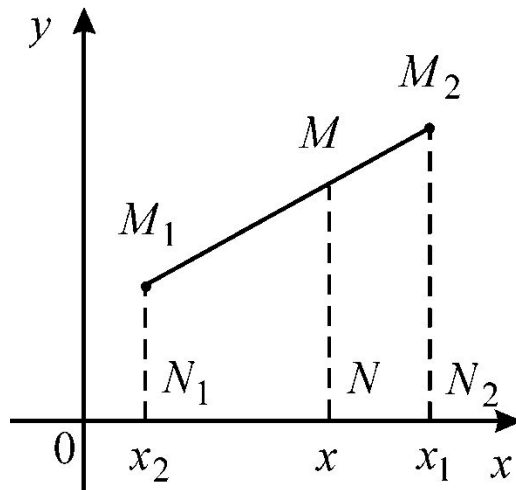
*Решение:*

Используя формулу (2) получим:

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(1+2)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

## Деление отрезка в данном отношении

Пусть на плоскости дан произвольный отрезок  $M_1M_2$  и пусть  $M$  – любая точка, принадлежащая этому отрезку.



$$\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|} \quad (3)$$

**Определение:** Число  $\lambda > 0$ , определяемое равенством (3), называется отношением в котором точка  $M$  делит отрезок  $M_1M_2$ .

Задача о делении отрезка в данном отношении состоит в том, чтобы по данному отношению  $\lambda$  и координатам точек  $M_1$  и  $M_2$  найти координаты точки  $M$ .

**Теорема:** Если точка  $M$  делит отрезок  $M_1M_2$  в отношении  $\lambda$ , то координаты этой точки определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (4)$$

где  $(x_1; y_1)$  – координаты точки  $M_1$ ,

$(x_2; y_2)$  – координаты точки  $M_2$ .



**Следствие:** Если точка  $M$  делит отрезок  $M_1M_2$  пополам, то есть  $|M_1M| = |MM_2|$  ( $\lambda = 1$ ), то координаты этой точки определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (5)$$

*Пример:* Даны точки  $M_1(1; 1)$  и  $M_2(7; 4)$ . Найти точку  $M$ , которая в два раза ближе к  $M_1$ , чем к  $M_2$ .

*Решение:*

Искомая точка делит отрезок в отношении  $\lambda = \frac{1}{2}$ .  
Применяя формулы (4), получим:

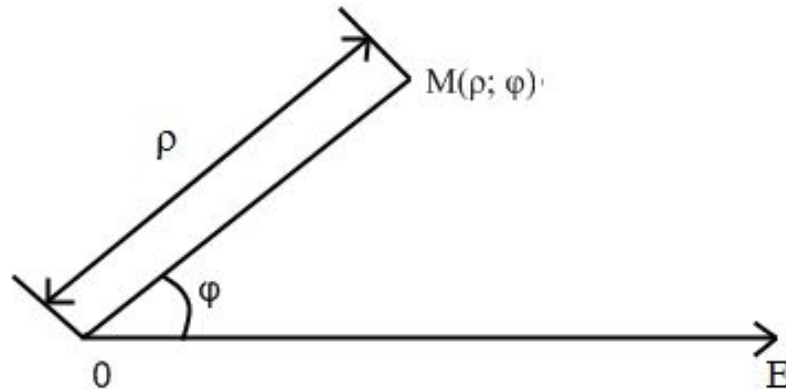
$$x = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot 7}{1 + \frac{1}{2}} = 3; \quad y = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot 4}{1 + \frac{1}{2}} = 2.$$

Следовательно,  $M(3; 2)$ .

# Полярная система координат

Полярная система координат состоит из точки  $O$ , называемой полюсом, и исходящего из него луча  $OE$ , полярной оси.

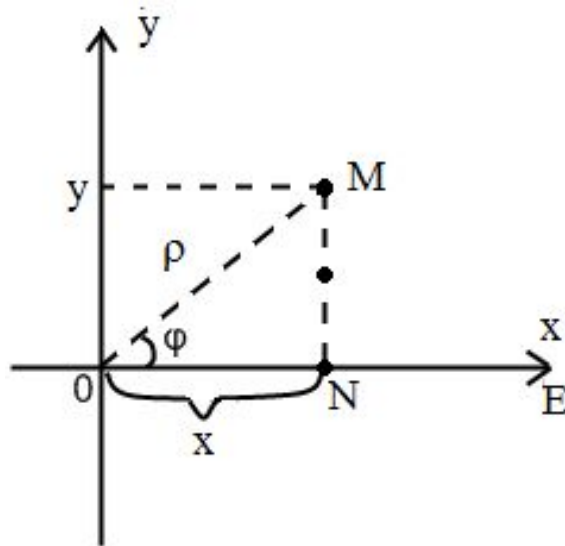
Кроме того задается единица масштаба для измерения длин отрезков.



Полярными координатами точки  $M$  называют числа  $\rho$  и  $\varphi$ .

Установим связь между прямоугольными и полярными координатами точки.

Для этого совместим начало прямоугольной и полярной систем координат, а ось  $Ox$  направим по направлению полярной оси  $OE$ . Пусть точка  $M$  имеет прямоугольные координаты  $(x; y)$ , полярные  $(\rho; \varphi)$ .



Тогда из прямоугольного треугольника  $ONM$   
получим:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \end{cases} \quad (7)$$

(6) - выражает прямоугольные координаты через полярные.

(7) - выражает полярные координаты через прямоугольные.

*Пример:* Найти полярные координаты точки  $M(2\sqrt{3}; -2)$

*Решение:*

Воспользуемся формулами (7):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 \cdot 3 + 4} = \sqrt{16} = 4,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Так как точка лежит в четвертой четверти, то угол выбираем исходя из этого условия:  $\varphi = -\frac{\pi}{6}$  или  $\varphi = \frac{11\pi}{6}$ ,

то есть  $M\left(4; -\frac{\pi}{6}\right)$  или  $M\left(4; \frac{11\pi}{6}\right)$ .

*Пример:* Найти прямоугольные координаты точки

$$M\left(3; \frac{3\pi}{4}\right).$$

*Решение:*

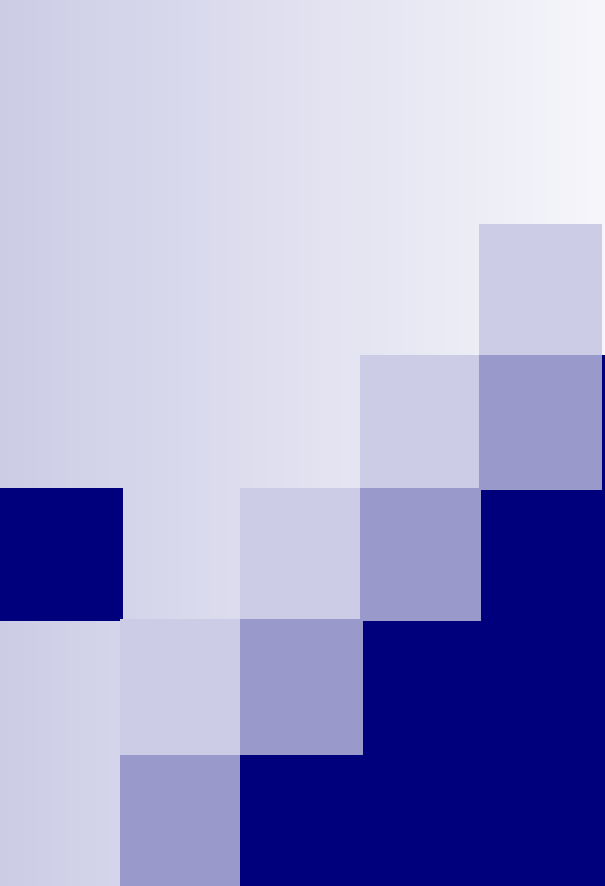
Воспользуемся формулами (6):

$$x = \rho \cos \varphi = 3 \cdot \cos \frac{3\pi}{4} = 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$y = \rho \sin \varphi = 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{4} = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Таким образом, прямоугольные координаты данной точки имеют вид:

$$M\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$



# Уравнение прямой на ПЛОСКОСТИ



# Уравнение прямой с угловым коэффициентом

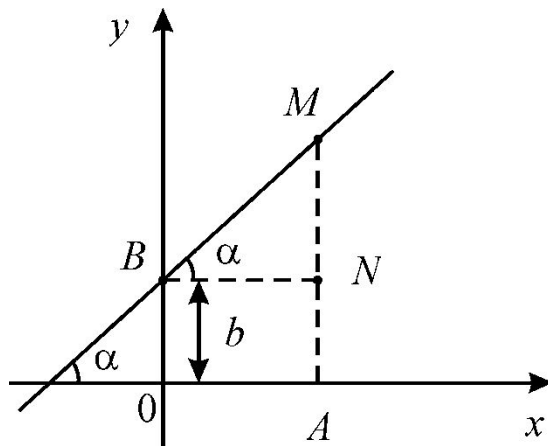
**Определение:** Углом наклона прямой, образованном с положительным направлением оси  $Ox$  называется наименьший угол  $\alpha$ , на который нужно повернуть положительное направление оси  $Ox$  против хода часовой стрелки для совмещения ее с прямой.

**Определение:** Угловым коэффициентом прямой называется тангенс угла наклона прямой:  $k = \operatorname{tg}\alpha$ . (1)

Если  $\alpha = 0$ , то прямая параллельна оси  $Ox$  и  $k = 0$ .

Если  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , то прямая перпендикулярна оси  $Ox$  и говорят, что <sup>2</sup>угловой коэффициент обращается в  $\infty$ .

Выведем уравнение прямой, если ее положение определено величиной отрезка  $|OB| = b$ , отсекаемого на оси  $Oy$  и угловым коэффициентом  $k = \operatorname{tg}\alpha$ .



Пусть  $M(x; y)$  – текущая точка искомой прямой.

Опустим перпендикуляр из точки  $M$  на ось  $Ox$  и через точку  $B$  проведем прямую, параллельно оси  $Ox$ .

Рассмотрим прямоугольный треугольник:  $\triangle BNM$ .

Из треугольника:  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{|MN|}{|BN|}$ ,  $|MN| = |BN| \cdot \operatorname{tg}\alpha$ , но

$$\operatorname{tg}\alpha = k, \quad |MN| = y - b, \quad |BN| = x \quad \Rightarrow \quad y - b = kx$$

$$y = kx + b \quad (2)$$

(2) – уравнение прямой с угловым коэффициентом.

При  $k > 0$  прямая образует с осью  $Ox$  острый угол, при  $k < 0$  – тупой, при  $k = 0$  прямая параллельна оси  $Ox$ .

При  $b > 0$  прямая пересекает ось  $Oy$  выше начала координат, при  $b < 0$  – ниже, при  $b = 0$  проходит через начало координат.

## Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении

Выведем уравнение прямой, если ее положение определяется данной точкой  $M_1(x_1; y_1)$  и заданным угловым коэффициентом  $k = \operatorname{tg}\alpha$ .

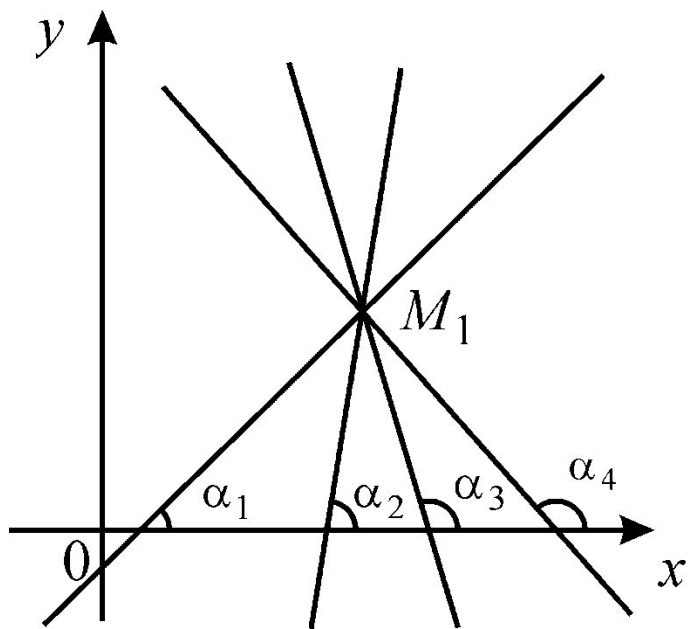
Запишем уравнение прямой в виде  $y = kx + b$ , где  $b$  – неизвестное число.

Так как прямая проходит через точку  $M_1(x_1; y_1)$ , то ее координаты удовлетворяют уравнению:  $y_1 = kx_1 + b$ .

Отсюда  $b = y_1 - kx_1$ , подставляя в уравнение получим:  $y = kx + y_1 - kx_1$  или  $y - y_1 = k(x - x_1)$  (3)

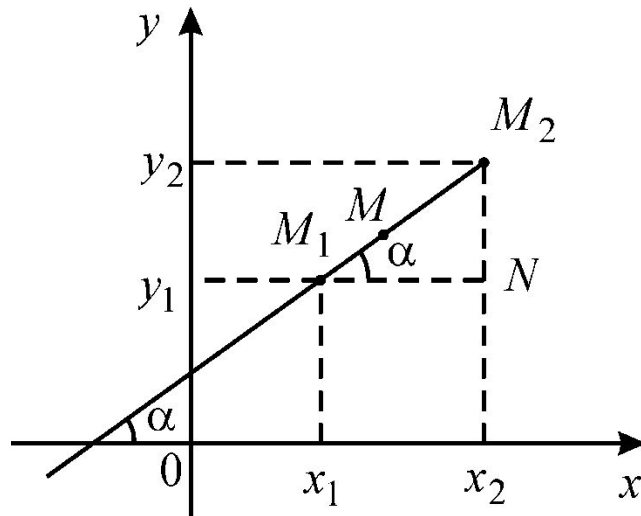
(3) – уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении.

Изменяя угловой коэффициент  $k$  (направление прямой), через данную точку  $M_1(x_1; y_1)$  можно провести множество прямых. Поэтому уравнение (3) называют уравнением пучка прямых.



## Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть положение прямой определяется двумя  
данными точками  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$ .



Запишем уравнение прямой в виде:  $y - y_1 = k(x - x_1)$ ,  
где  $k$  – неизвестное число.

Но прямая проходит через точку  $M_2(x_2; y_2)$ . Следовательно, координаты этой точки также удовлетворяют уравнению:  $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$ .

Откуда  $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .

Подставим найденный коэффициент в уравнение пучка прямых:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

Перегруппируем левую правую часть и получим:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (4)$$

(4) – уравнение прямой проходящей через две данные точки.

Если  $x_1 = x_2$ , то уравнение прямой имеет вид:  $x = x_1$ ,  
и прямая параллельна оси  $Oy$ .

Если  $y_1 = y_2$ , то уравнение прямой имеет вид:  $y = y_1$ ,  
и прямая параллельна оси  $Ox$ .



*Пример:* Составить уравнение прямой, проходящей через точки  $M_1(2; 3)$  и  $M_2(3; -1)$ .

*Решение:*

Воспользуемся формулой (4):

$$\frac{y-3}{-1-3} = \frac{x-2}{3-2} \Rightarrow \frac{y-3}{-4} = \frac{x-2}{1}$$

Разрешим полученное уравнение относительно  $y$ :

$$y-3 = -4(x-2) \Rightarrow y-3 = -4x+8$$

ИЛИ  $y = -4x + 11.$

*Пример:* Составить уравнение прямой, проходящей через точки  $M_1(3; 4)$  и  $M_2(3; -7)$ .

*Решение:*

Воспользуемся формулой (4):

$$\frac{y-4}{-7-4} = \frac{x-3}{3-3} \Rightarrow \frac{y-4}{-11} = \frac{x-3}{0}$$

На ноль делить нельзя, но можно воспользоваться свойством пропорции:

$$(y-4) \cdot 0 = -11 \cdot (x-3) \Rightarrow x-3 = 0 \text{ ИЛИ } x = 3.$$

В данном примере  $x_1 = x_2 = 3$ , поэтому можно было сразу записать уравнение прямой в виде:  $x = 3$ .

# Общее уравнение прямой

**Теорема:** В прямоугольной системе координат любая прямая задается уравнением первой степени:

$$Ax + By + C = 0 \quad (5)$$

где  $A$  и  $B$  одновременно не обращаются в ноль.

(5) называют общим уравнением прямой, так как данное уравнение охватывает все случаи положения прямой на плоскости.

Из него можно получить другие уравнения прямой.

## Уравнение прямой «в отрезках»

Рассмотрим общее уравнение прямой:  $Ax + By + C = 0$ , при условии, что все коэффициенты отличны от нуля.

Преобразуем его, для этого свободное слагаемое перенесем в правую часть и поделим левую и правую часть на  $-C$  :

$$Ax + By = -C,$$

$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\left(-\frac{C}{A}\right)}x + \frac{1}{\left(-\frac{C}{B}\right)}y = 1.$$

Введем обозначение:  $a = -\frac{C}{A}$ ,  $b = -\frac{C}{B}$ .

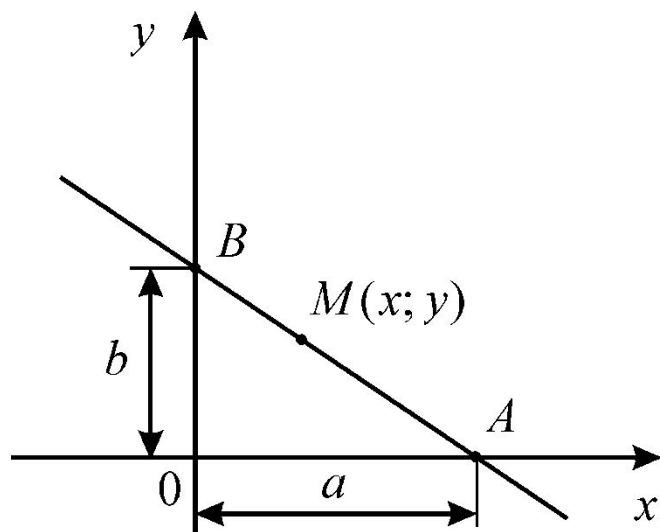
Тогда уравнение прямой примет вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (6)$$

(6) – уравнение прямой «в отрезках».

*Замечание:* в виде уравнения (6) не могут быть записаны уравнение прямой, проходящей через начало координат и уравнения прямых, параллельных осям координат.

Геометрический смысл уравнения (6) состоит в том, что числа  $a$  и  $b$  являются величинами отрезков, которые прямая отсекает на соответствующих осях координат.



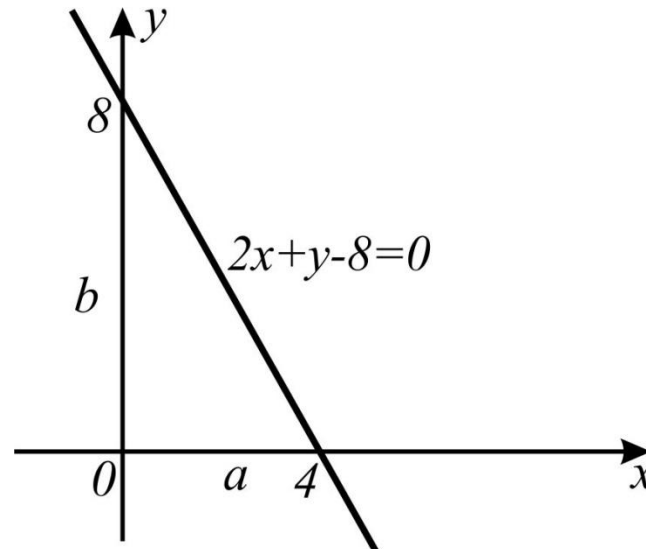
Эта форма уравнения удобна для геометрического построения прямой.

*Пример:* Прямая задана уравнением  $2x + y - 8 = 0$ .

По данному уравнению прямой составить уравнение прямой «в отрезках» и построить прямую.

*Решение:*

Преобразуем уравнение прямой:  $2x + y = 8$ ,  $\frac{x}{4} + \frac{y}{8} = 1$ .



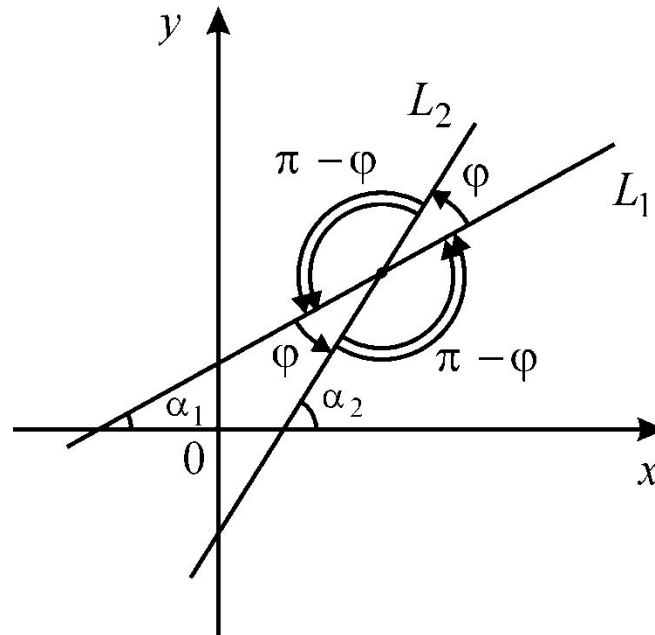
Отложим на осях  $Ox$  и  $Oy$  отрезки  $a = 4$ ;  $b = 8$  и проведем прямую через точки  $M_1(4; 0)$  и  $M_2(0; 8)$ .

## Угол между двумя прямыми

Пусть заданы прямые  $L_1$  и  $L_2$  уравнениями:

$$y = k_1x + b_1 \quad \text{и} \quad y = k_2x + b_2, \quad \text{где} \quad k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1, \quad k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2.$$

При пересечении двух прямых  $L_1$  и  $L_2$  на плоскости образуются четыре угла, которые попарно равны между собой как вертикальные углы.





Определим угол между прямыми:  $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ .

$$\text{Тогда } \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}$$

Так как  $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$ ,  $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$  то отсюда следует, что

$$(7)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

(7) – определяет один из углов между двумя прямыми.

Второй угол равен  $\pi - \varphi$ .

*Пример:* Две прямые заданы уравнениями:  $y = -2x + 3$ ,  
 $y = 3x + 6$ . Найти угол между этими прямыми.

*Решение:*

Воспользуемся формулой (7):  $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ .

Так как  $k_1 = -2$ ,  $k_2 = 3$ , то  $tg\varphi = \frac{3 - (-2)}{1 + 3 \cdot (-2)} = \frac{5}{-5} = -1$ .

Отсюда  $\varphi = arctg(tg\varphi) = arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$ .

Знак « $-$ » указывает на то, что отсчет от первой прямой ко второй совершался по ходу часовой стрелки.

## Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Если прямые  $L_1$  и  $L_2$  параллельны, то  $\varphi = 0$  и

$$\operatorname{tg}\varphi = 0, \text{ то есть } \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = 0 \quad \text{или} \quad k_2 = k_1 \quad (8)$$

(8) – условие параллельности двух прямых.

## Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Если прямые  $L_1$  и  $L_2$  перпендикулярны, то  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  
то есть  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) = -\operatorname{ctg}\alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1}$$

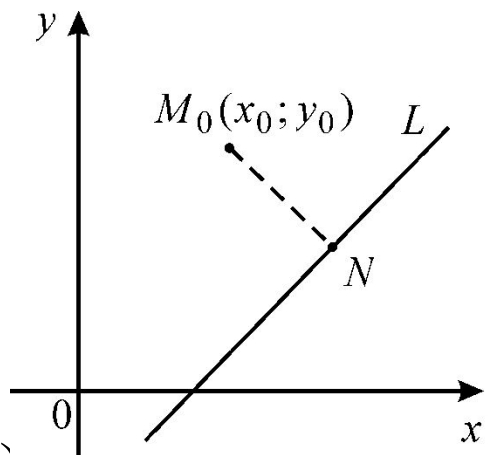
$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad (9)$$

(9) – условие перпендикулярности двух прямых.

## Расстояние от точки до прямой

Пусть на плоскости  $Oxy$  задана прямая  $L$  общим уравнением  $Ax + By + C = 0$ .

Требуется найти расстояние от точки  $M_0(x_0; y_0)$  до прямой  $L$ . Под расстоянием от точки до прямой понимают длину перпендикуляра, опускаемого из точки на прямую.



$$d = |M_0N| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (10)$$

(10) – формула расстояния от точки  $M_0$  до прямой  $L$ .

*Пример:* Определить расстояние от точки  $M(1; -4)$  до прямой  $y = \frac{4}{3}x - 4$ .

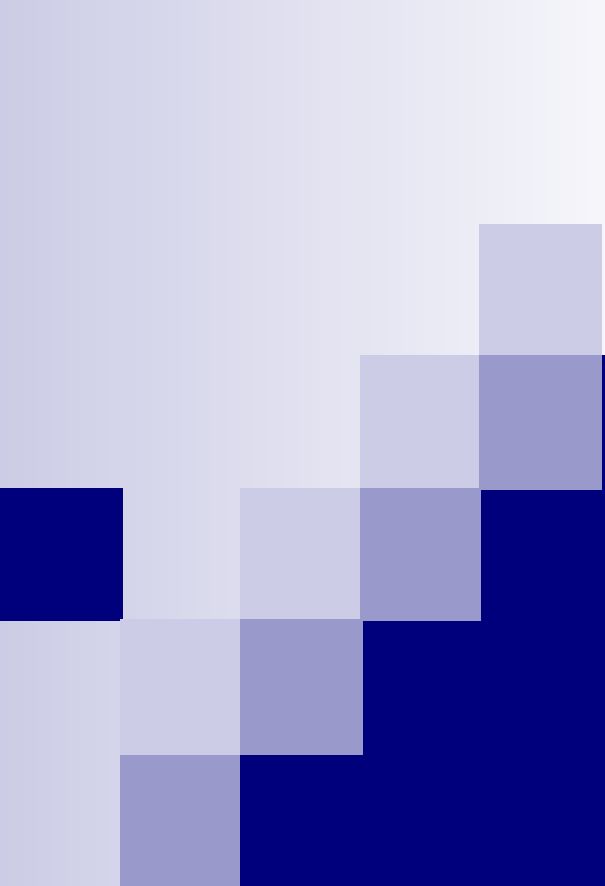
*Решение:*

Воспользуемся формулой (10):  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ .

Приведем уравнение прямой к общему виду, для этого умножим уравнение на 3 и все перенесем в левую часть:

$$3y = 4x - 12, \quad -4x + 3y + 12 = 0.$$

$$d = \frac{|-4 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + 12|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5} = 0,8.$$



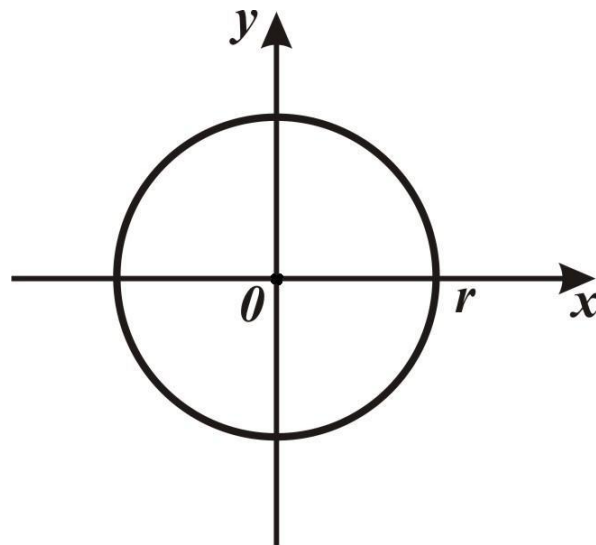
# Кривые второго порядка

# Окружность

**Определение:** *Окружностью* называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра окружности).

Если центр окружности совпадает с началом координат, то ее уравнение имеет вид:

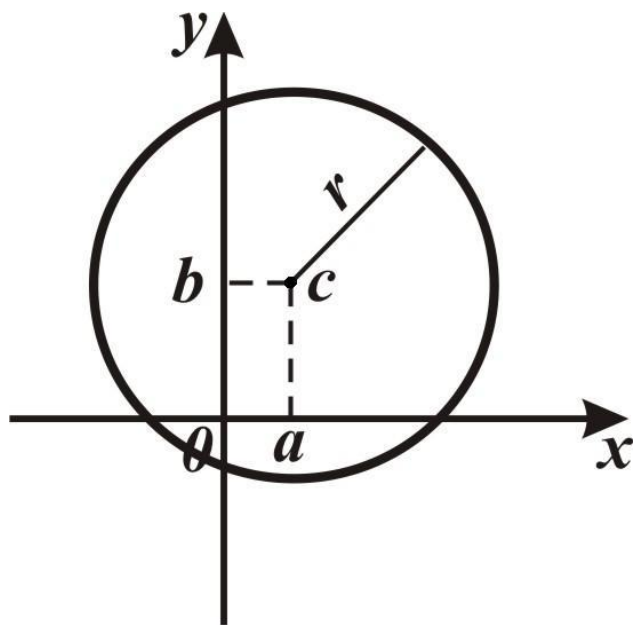
$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (1)$$





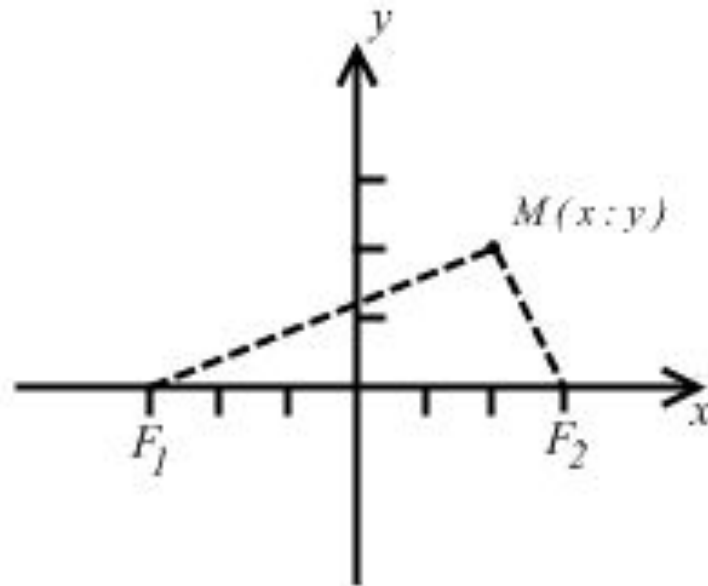
Если  $r$  – радиус окружности, а точка  $C(a; b)$  – ее центр, то каноническое уравнение окружности имеет вид:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (2)$$



# Эллипс

**Определение:** *Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между двумя фокусами.

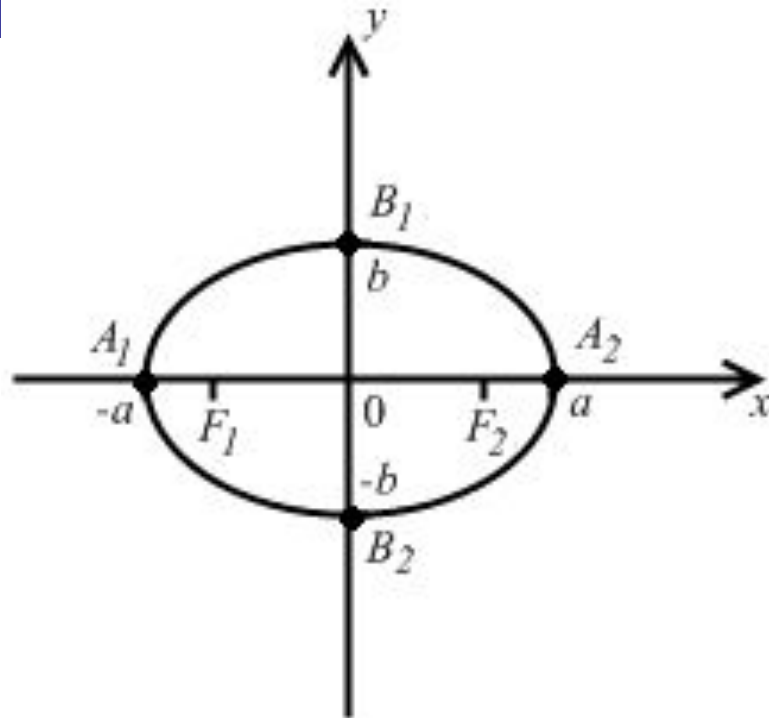


По определению  $MF_1 + MF_2 = 2a$ ,  $F_1F_2 = 2c$  и, следовательно,  $2a > 2c$ . Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

где  $b^2 = a^2 - c^2$  (4),  $a$  – длина большой полуоси эллипса,  $b$  – длина малой полуоси эллипса ( $a > b$ ),  $c$  – половина расстояния между фокусами.

Оси координат являются *осями симметрии эллипса*.



$|A_1A_2| = 2a$  – Длина большой оси эллипса,

$|B_1B_2| = 2b$  – длина малой оси эллипса,

$O$  – центр эллипса,

$A_1(-a; 0)$ ,  $A_2(a; 0)$ ,  $B_1(0; b)$ ,  $B_2(0; -b)$  – вершины эллипса,

$F_1(-c; 0)$ ,  $F_2(c; 0)$  – фокусы эллипса.

**Определение:** *Эксцентриситетом эллипса* называется отношение половины расстояния между фокусами к длине большой полуоси эллипса:  $\varepsilon = \frac{c}{a}$  (5).

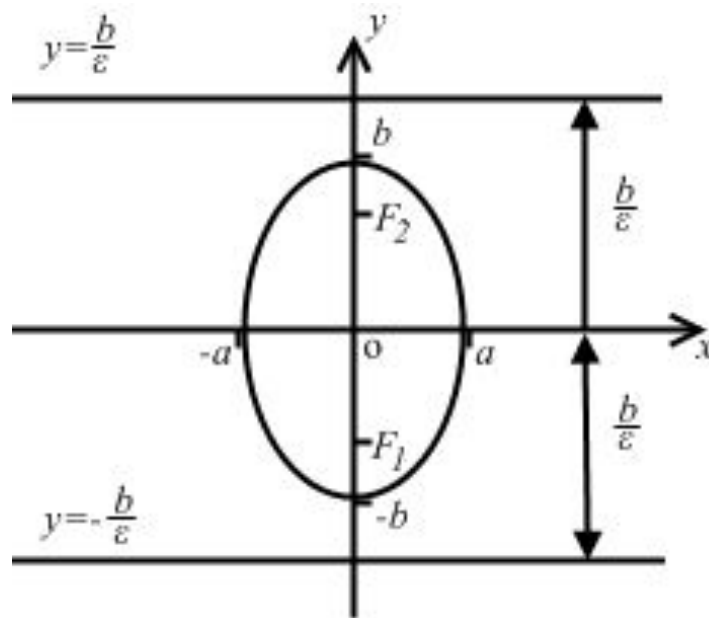
Так как  $c < a$ , то  $0 \leq \varepsilon < 1$ .

Чем больше эксцентриситет, тем больше расстояние от центра эллипса до его фокусов и тем более «сплюсчен» эллипс; чем ближе эксцентриситет к 0, тем больше форма эллипса приближается к окружности.

При  $a = b$  эллипс преобразуется в окружность, тогда  $c = 0$  и, следовательно,  $\varepsilon = 0$ . Если  $\varepsilon = 1$ , эллипс преобразуется в свою сдвоенную большую ось.

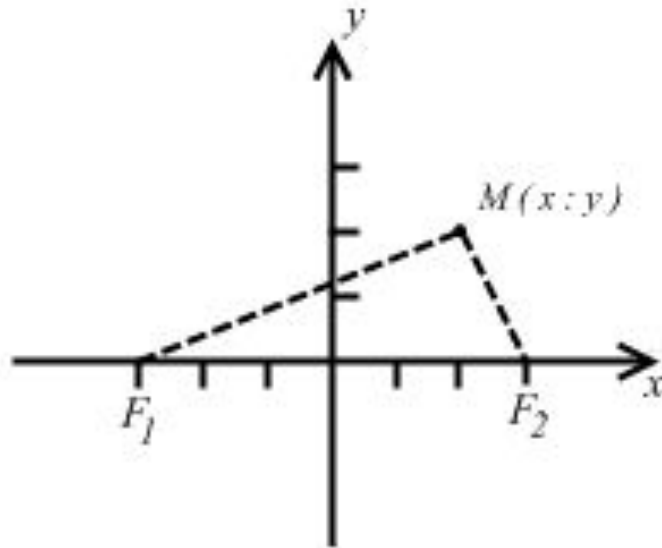
При  $b > a$  эллипс расположен вдоль оси  $Oy$ . В этом случае оси  $Ox$  и  $Oy$  поменялись местами: большая ось и фокусы такого эллипса лежат на оси  $Oy$ , а малая ось на оси  $Ox$ .

Для такого эллипса:  $c^2 = b^2 - a^2$ ,  $\varepsilon = \frac{c}{b}$ ;  
 $F_1(0; -c)$ ,  $F_2(0; c)$  – координаты фокусов;



# Гипербола

**Определение:** *Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между двумя фокусами.



По определению  $|MF_1 - MF_2| = 2a$ ,  $F_1F_2 = 2c$  и, следовательно,  $2a < 2c$ . Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6)$$

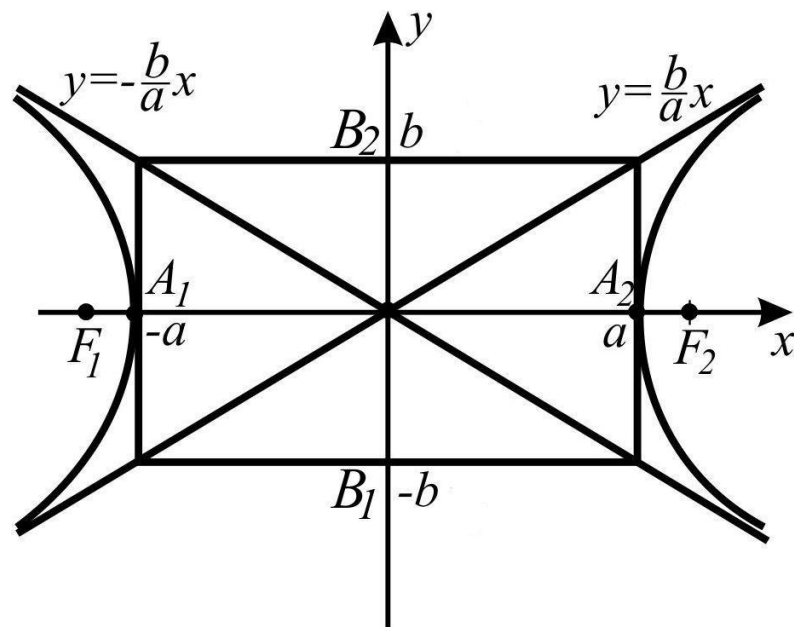
где  $b^2 = c^2 - a^2$  (7),  $a$  – длина действительной полуоси гиперболы,  $b$  – длина мнимой полуоси гиперболы,  $c$  – половина расстояния между фокусами.



Для построения гиперболы необходимо сначала построить осевой прямоугольник, затем провести диагонали этого прямоугольника, которые являются асимптотами гиперболы.

В силу симметрии гиперболы, она имеет две асимптоты:  $y = \frac{b}{a}x$  и  $y = -\frac{b}{a}x$ . Наличие асимптот и симметрии позволяют построить всю гиперболу.

Кривая состоит из двух не смыкающихся ветвей, лежащих в углах между асимптотами  $y = \pm \frac{b}{a}x$  (8), и неограниченно приближающихся к этим прямым.



$|A_1A_2| = 2a$  – длина действительной оси гиперболы,

$|B_1B_2| = 2b$  – длина мнимой оси гиперболы,

$O$  – центр гиперболы,

$A_1(-a; 0)$ ,  $A_2(a; 0)$ ,  $B_1(0; -b)$ ,  $B_2(0; b)$  – вершины гиперболы,

$F_1(-c; 0)$ ,  $F_2(c; 0)$  – фокусы гиперболы.

**Определение:** Эксцентриситетом гиперболы называется отношение половины расстояния между фокусами к длине действительной полуоси гиперболы:  $\varepsilon = \frac{c}{a}$  (9).

Так как  $c > a$ , то  $\varepsilon > 1$ .

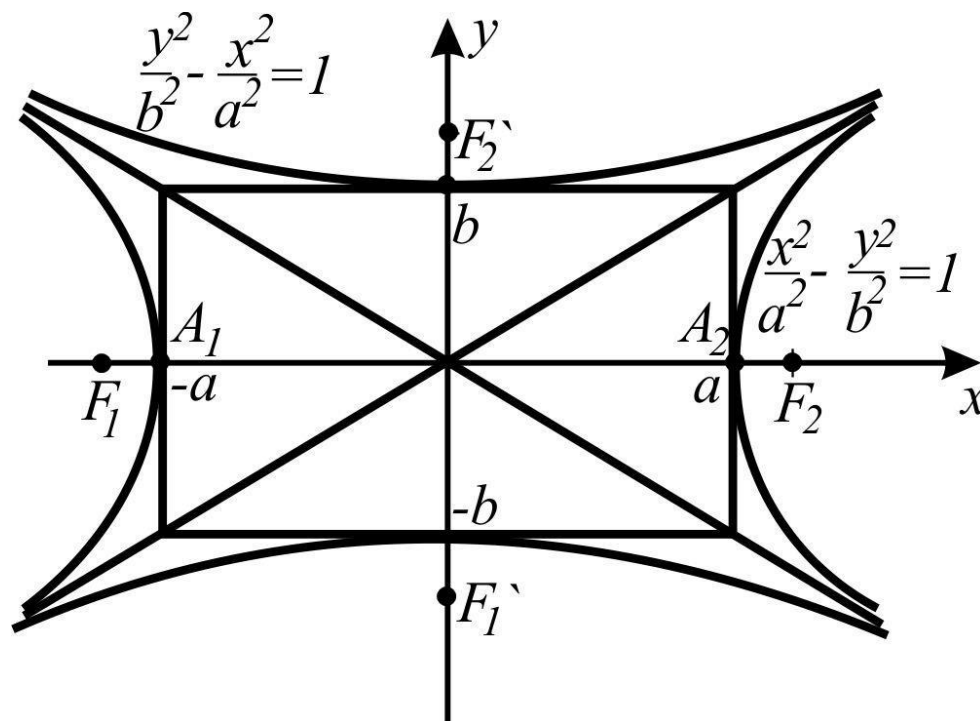
Если  $a = b$  то гипербола называется *равнобочной* и ее асимптоты образуют прямой угол. Уравнение равнобочной гиперболы имеет вид:

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad (10)$$

**Определение:** Две гиперболы, у которых оси совпадают и равны, но действительная ось одной из них служит мнимой осью другой, и наоборот, называются *сопряженными гиперболами*.

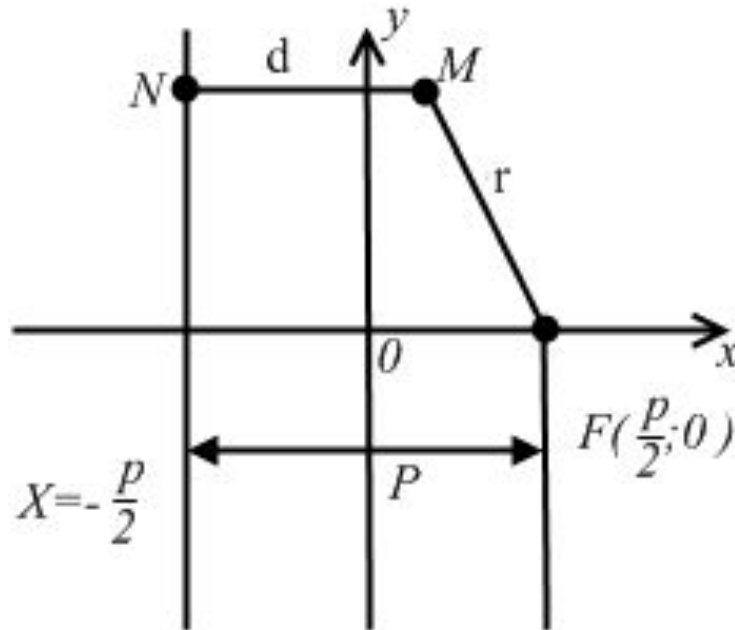
Если уравнение одной из сопряженных гипербол  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , то уравнение второй  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ .

Асимптоты сопряженных гипербол совпадают, а сами гиперболы расположены в смежных углах между асимптотами.



# Парабола

**Определение:** *Параболой* называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.



Согласно определению точка  $M$  будет лежать на параболе, когда  $r = d$ , где  $r$  – расстояние от точки до фокуса,  $d$  – расстояние от точки до директрисы.

Каноническое уравнение параболы имеет вид:

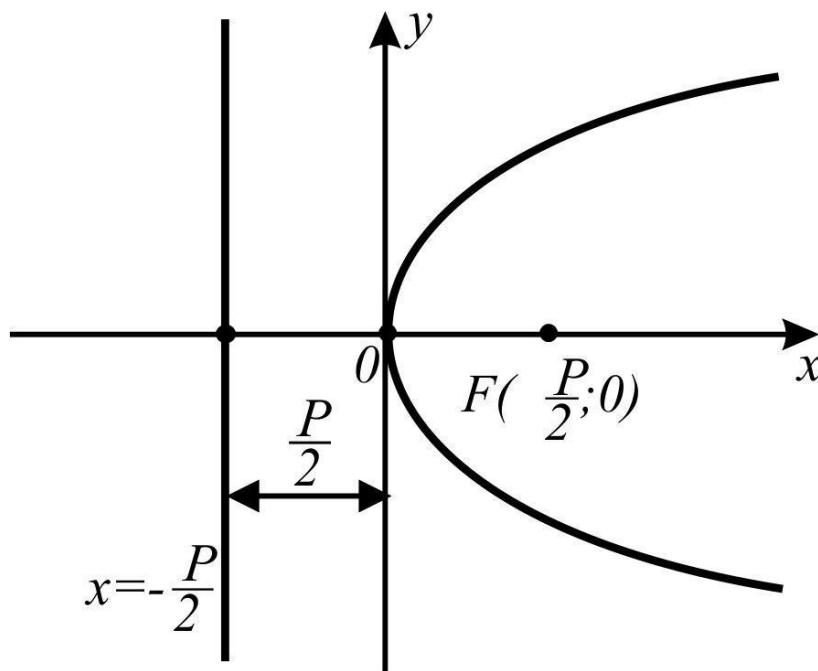
$$y^2 = 2px, (p \neq 0)$$

где  $p$  – параметр параболы (расстояние от фокуса до директрисы).

Параметр параболы характеризует ширину области ограниченной параболой. Чем больше  $p$ , тем шире распахнуты ветви параболы.

Парабола  $y^2 = 2px$ ,  $p > 0$  расположена симметрично относительно оси  $Ox$ , ветви направлены вправо.

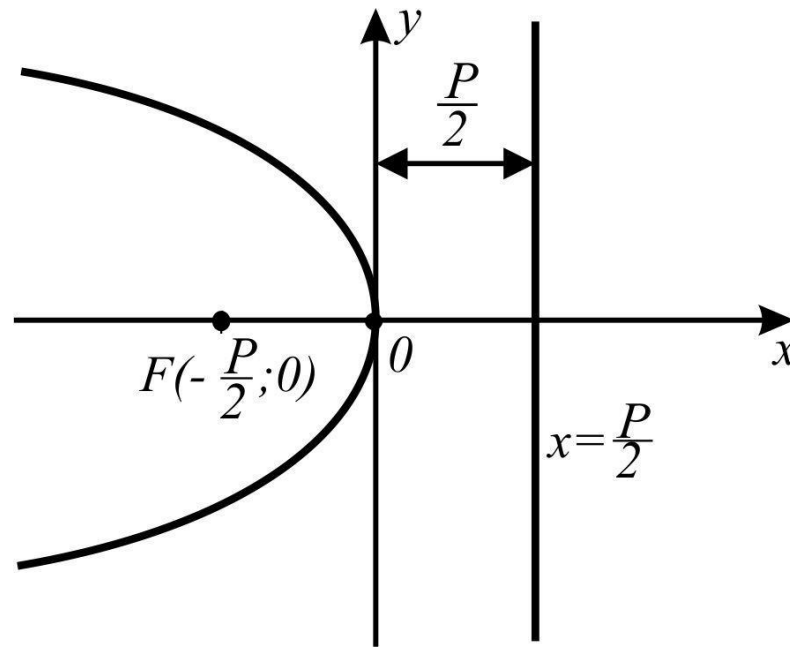
Директрисой параболы является прямая  $x = -\frac{p}{2}$ , а фокусом – точка  $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ . Вершина такой параболы находится в начале координат  $O(0; 0)$ .





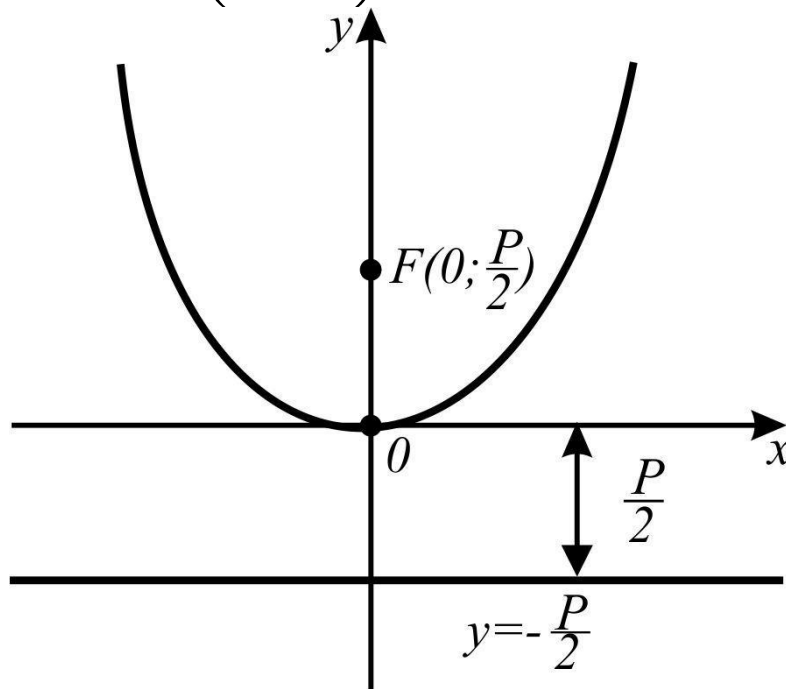
Парабола  $y^2 = -2px$ ,  $p > 0$ , расположена симметрично относительно оси  $Ox$ , ветви направлены влево.

Вершина параболы находится в точке  $O(0;0)$ .  
Директрисой параболы является прямая  $x = \frac{p}{2}$ , а фокусом – точка  $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$ .



Парабола  $x^2 = 2py$ ,  $p > 0$ , расположена симметрично относительно оси  $Oy$ , ветви направлены вверх.

Вершина параболы находится в точке  $O(0;0)$ .  
Директрисой параболы является прямая  $y = -\frac{p}{2}$ , а фокусом – точка  $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ .



Парабола  $x^2 = -2py$ ,  $p > 0$ , расположена симметрично относительно оси  $Oy$ , ветви направлены вниз.

Вершина параболы находится в точке  $O(0;0)$ .  
Директрисой параболы является прямая  $y = \frac{p}{2}$ , а фокусом – точка  $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$ .

