

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»  
КАФЕДРА «МЕДИЦИНСКАЯ ФИЗИКА»**

**Курс «ФИЗИКА РАДИОИЗОТОПНОЙ МЕДИЦИНЫ»**

**ФИЗИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
ОСНОВЫ  
ОФЭКТ**

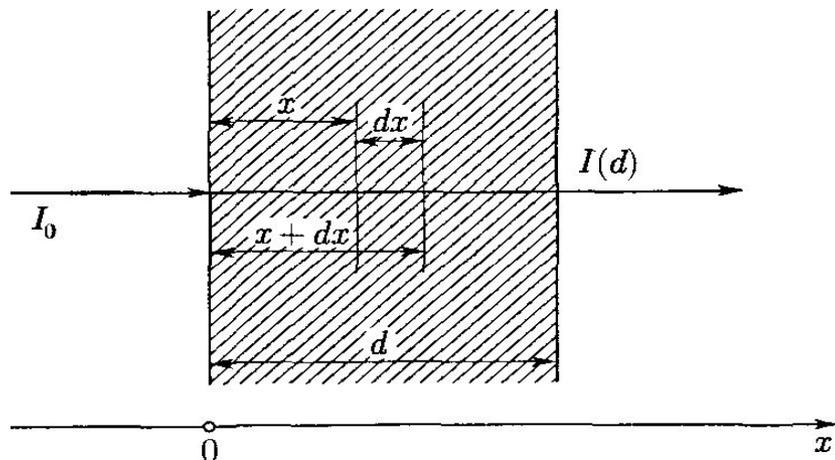
доцент каф. 35, к.ф.-м.н. Штоцкий Ю.В.

# Содержание

- **Излучение точечного источника. Закон Бера**
- **Основная задача ОФЭКТ. Круговая геометрия измерений в ОФЭКТ. Влияние факторов геометрического ослабления и ослабления излучения веществом**
- **Методы обращения интегрального экспоненциального преобразования Радона:**
  1. *Метод двумерной фильтрации*
  2. *Метод Фурье-синтеза*
  3. *Метод одномерной фильтрации*
- **Методы коррекции на поглощение. Метод корректирующей матрицы**

# 1. Уравнение переноса излучения

## 1.1. Закон распространения внешнего излучения в веществе.



$I_0$  - интенсивность тонкого пучка  $\gamma$ -излучения, падающего на слой вещества:

$\mu(x)$  - распределением коэффициента линейного поглощения (ослабления) вдоль распространения пучка;

$P(x) = \mu(x) \cdot dx$  - вероятность поглощения  $\gamma$ -кванта при прохождении элементарного пути  $dx$ .

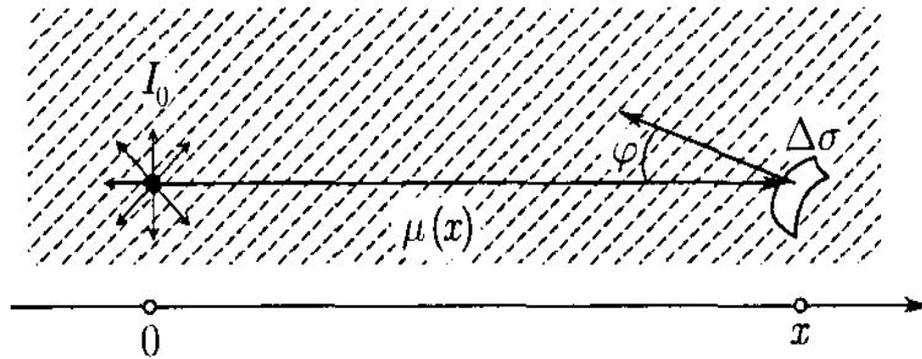
*Стационарное уравнение переноса излучения в поглощающей неоднородной среде*

$$\frac{dI(x)}{dx} = -\mu(x)I(x) \quad (1)$$

*Решением уравнения (1.1) будет закон Бугера-Ламберта-Бэра для поглощающей неоднородной среды*

$$I(x) = I_0 \exp \left\{ -\int_0^x \mu(x') dx' \right\} \quad (2)$$

## 1.2. Закон распространения излучения при действии внутренних источников излучения (самоизлучающие объекты)



$I_0$  - интенсивность точечного источника, излучающего в телесный угол  $4\pi$ ;  
 $\mu(x)$  - распределением коэффициента линейного поглощения вдоль прямой, соединяющей источник с небольшой площадкой  $\Delta\sigma$ , наклоненной под углом  $\varphi$  к этой прямой.

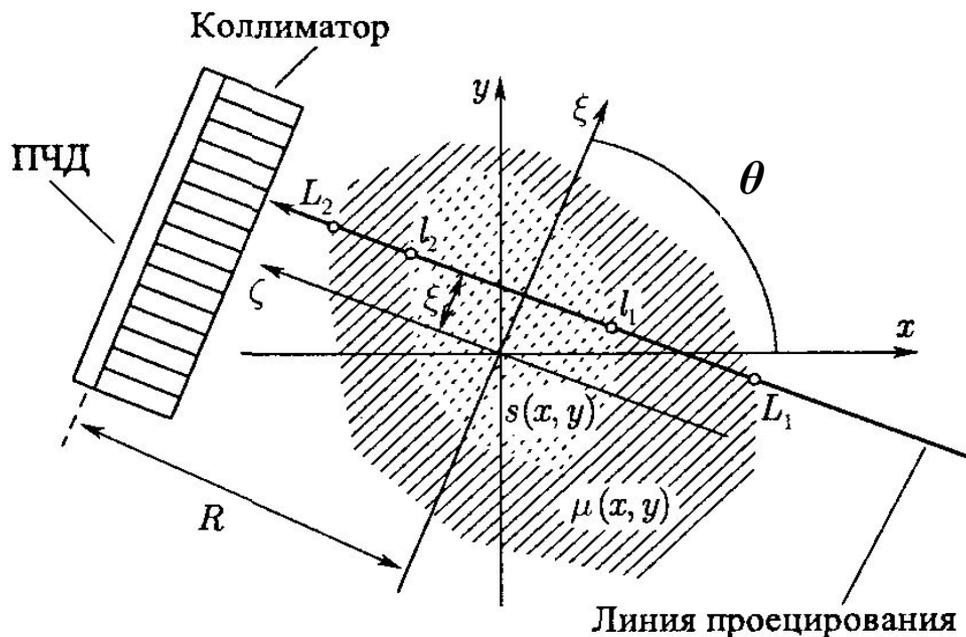
Тогда интенсивность  $I(x)$ , приходящаяся на площадку  $\Delta\sigma$ , будет равна:

$$I(x) = I_0 \frac{1}{4\pi x^2} \exp\left\{-\int_0^x \mu(x') dx'\right\} \cos\varphi \Delta\sigma \quad (3)$$

Выражение (1.3) учитывает четыре основных фактора:

- геометрическое ослабление;
- ослабление излучения в веществе;
- наклон площадки детектора.

## 2. Круговая геометрия измерений в ОФЭКТ с параллельными проекциями

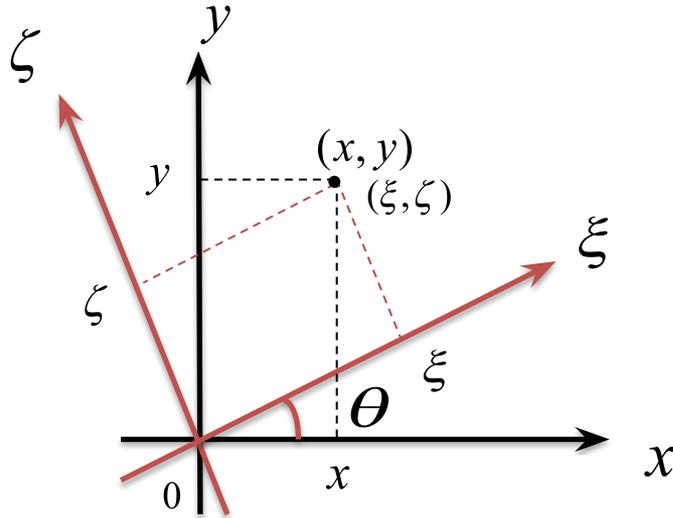


**2.1. Основная задача ОФЭКТ - восстановление двумерного распределения источников излучения  $s(x, y)$ , целиком расположенного в области с коэффициентом ослабления излучения  $\mu(x, y)$ .**

### ***Схема кругового сканирования с параллельными проекциями***

*Набор отсчётов, зафиксированный элементами ПЧД, определяет проекцию (под углом  $\theta$ ). Затем система «Коллиматор-Детектор» поворачивается относительно объекта на угол  $\Delta\theta$  и вновь измеряется проекция. Измерения повторяются, пока система «Коллиматор-Детектор» не повернётся на угол  $2\pi$ . По измеренному набору проекций необходимо восстановить двумерное распределение источников излучения  $s(x, y)$ .*

## 2.2. Выражение для проекции $p(\xi, \theta)$ , измеренной под углом $\theta$ во вращающейся системе координат



$$x = \xi \cos \theta - \zeta \sin \theta$$

$$y = \xi \sin \theta + \zeta \cos \theta$$

(4)

$$\zeta = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$\xi = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

*Распределение источников излучения  $s(\xi, \theta)$  :*

$$s_{\theta}(\xi, \zeta) = s(\xi \cos \theta - \zeta \sin \theta, \xi \sin \theta + \zeta \cos \theta)$$

*Распределение линейного коэффициента поглощения  $\mu(\xi, \theta)$ :*

$$\mu_{\theta}(\xi, \zeta) = \mu(\xi \cos \theta - \zeta \sin \theta, \xi \sin \theta + \zeta \cos \theta)$$

*Тогда выражение для проекции  $p(\xi, \theta)$  – интенсивность излучения, выходящего из объекта, будет иметь вид:*

$$p(\xi, \theta) = \int_{l_1}^{l_2} \frac{s_{\theta}(\xi, \zeta)}{4\pi(R - \zeta)^2} \exp \left\{ - \int_{\zeta}^{L_2} \mu_{\theta}(\xi, \zeta') d\zeta' \right\} d\zeta$$

(5)

## 2.3. Влияние геометрического ослабления и ослабления излучения веществом

### 2.3.1. Геометрическое ослабление

при равномерном распределении источников [ $s_{\theta}(\xi, \zeta) = \text{const} = C$ ] и отсутствии поглощения [ $\mu_{\theta}(\xi, \zeta) = 0$ ] равно:

$$p(\xi, \theta) = \int_{l_1}^{l_2} \frac{C}{4\pi(R - \zeta)^2} d\zeta = \frac{C}{4\pi} \int_{l_1}^{l_2} \frac{d\zeta}{(R - \zeta)^2} = \frac{C}{4\pi} \cdot \frac{(l_2 - l_1)}{(R - l_2)(R - l_1)}$$

Если не учитывать зависимость фактора геометрического ослабления от  $\zeta$  [т.е.  $(R - \zeta) = R$ ], то получим:

$$\tilde{p}(\xi, \theta) = \int_{l_1}^{l_2} \frac{C}{4\pi \cdot R^2} d\zeta = \frac{C}{4\pi} \cdot \frac{(l_2 - l_1)}{R^2}$$

Тогда относительный вклад учёта фактора  $\zeta$  при характерных размерах томографии головы человека ( $R = 25$  см;  $l_1 = -l_2 = 8$  см) составит:

$$\tilde{p}(\xi, \theta) \frac{p(\xi, \theta) - \tilde{p}(\xi, \theta)}{p(\xi, \theta)} = \frac{R^2 - (R - l_1)(R - l_2)}{R^2} = \frac{R^2 - (R + l)(R - l)}{R^2} = \left(\frac{l}{R}\right)^2 = \left(\frac{8}{25}\right)^2 = 0.102$$

*т.е. геометрическое ослабление вносит искажения на уровне 10%.*

### 2.3.2. Ослабление излучения веществом

при равномерном распределении источников  $[s_{\theta}(\xi, \zeta) = \text{const} = C]$ ,  
при равномерном распределении поглощения -  $[\mu_{\theta}(\xi, \zeta) = \text{const} = \mu]$   
и отсутствии геометрического фактора равно:

$$p(\xi, \theta) = \int_{l_1}^{l_2} C \exp\left\{-\int_{\zeta}^{L_2} \mu_{\theta}(\xi, \zeta') d\zeta'\right\} d\zeta = C \int_{l_1}^{l_2} \exp\{-\mu(L_2 - \zeta)\} d\zeta = \frac{C}{\mu} [e^{-\mu(L_2 - l_2)} - e^{-\mu(L_2 - l_1)}]$$

Если не учитывать поглощение излучения в веществе (т.е.  $\mu = 0$ ),  
то получим:

$$\tilde{p}(\xi, \theta) = \int_{l_1}^{l_2} C d\zeta = C(l_2 - l_1)$$

Тогда относительный вклад учёта фактора поглощения излучения в веществе  $\mu$  при характерных размерах  $L_2 = 8$  см;  $l_1 = -l_2 = 8$  см),  $\mu = 0.15$  см<sup>-1</sup> для источника <sup>99m</sup>Tc ( $E_{\gamma} = 140$  кэВ) в мягких тканях человека составит:

$$\frac{p(\xi, \theta) - \tilde{p}(\xi, \theta)}{p(\xi, \theta)} = \frac{e^{-\mu(L_2 - l_2)} - e^{-\mu(L_2 - l_1)} - e^{-\mu(l_2 - l_1)}}{e^{-\mu(L_2 - l_2)} - e^{-\mu(L_2 - l_1)}} = \frac{e^0 - e^{-2\mu l} - 2\mu l}{e^0 - e^{-2\mu l}} = \frac{1 - 0.09 - 2}{1 - 0.09} = -1.64$$

**т.е. относительный вклад фактора поглощения излучения в 16 раз больше вклада фактора геометрического ослабления. Следовательно, ослаблением излучения в веществе пренебречь нельзя.**

Тогда уравнение для проекции примет следующий вид (несущественные постоянные множители отброшены):

$$p(\xi, \theta) = \int_{l_1}^{l_2} s_\theta(\xi, \zeta) \exp \left\{ - \int_{\zeta}^{L_2} \mu_\theta(\xi, \zeta') d\zeta' \right\} d\zeta$$

**Если бы  $\mu(x, y) = 0$** , то это выражение превратилось бы в преобразование Радона относительно  $s(x, y)$ , к которому применимы методы, рассмотренные в трансмиссионной РКТ.

**Если считать  $\mu(x, y)$  неизвестной функцией**, подлежащей определению [как и  $s(x, y)$ ], то задача становится слишком сложной для решения, т.к. нужно по одной двумерной функции  $p(\xi, \Theta)$  восстановить две двумерные функции -  $\mu(x, y)$  и  $s(x, y)$ . Возможное решение задачи – использование алгебраических методов.

**Если считать  $\mu(x, y)$  произвольной, но известной функцией** (например, с помощью РКТ), то решение этой задачи возможно, по-видимому, только в алгебраической форме.

## 2.4. Вид экспоненциального преобразования Радона

Будем считать, что  $\mu(x,y) = \mu = \text{const}$  (промежуточный случай), для которого найдено аналитическое решение.

Тогда:

$$p(\xi, \theta) = \int_{l_1}^{l_2} s_\theta(\xi, \zeta) \cdot e^{-\mu(L_2 - \zeta)} d\zeta \quad (6)$$

Учитывая, что конфигурация области, ослабляющей излучение, известна (сам исследуемый объект), можно скорректировать каждую проекцию на постоянный для неё множитель  $\exp(-\mu L_2)$ .

Тогда уравнение (6) примет вид:

$$p(\xi, \theta) = \int_{l_1}^{l_2} s_\theta(\xi, \zeta) \cdot e^{\mu\zeta} d\zeta$$

Т.к.  $s(x,y) = 0$  вне интервала  $[l_1; l_2]$ , пределы интегрирования можно продлить до бесконечности:

$$\begin{aligned} p(\xi, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_\theta(\xi, \zeta) \cdot e^{\mu\zeta} d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} s[x(\xi, \zeta, \Theta), y(\xi, \zeta, \Theta)] \cdot e^{\mu\zeta} d\zeta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(\xi \cos \Theta - \zeta \sin \Theta, \xi \sin \Theta + \zeta \cos \Theta) \cdot e^{\mu\zeta} d\zeta \end{aligned} \quad (7)$$

Это выражение называется экспоненциальным преобразованием Радона. С помощью  $\delta$ -функции Дирака его можно представить в виде:

$$p(\xi, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x, y) \delta(\xi - x \cos \Theta - y \sin \Theta) \cdot e^{\mu(-x \sin \Theta + y \cos \Theta)} dx dy \quad (8)$$

**Целью коррекции ослабления излучения** является получение из исходных проекций таких скорректированных проекций, которые совпадали бы с проекциями, полученными в отсутствие поглощающей среды. Тогда для обращения этих скорректированных проекций относительно  $s(x, y)$  можно применить методы, рассмотренные в трансмиссионной РКТ.

Большинство приближённых методов коррекции основаны на:

- **использовании оппозитных проекций** [ $p(\xi, \zeta)$  и  $p(-\xi, \Theta + \pi)$ ].
- **методе корректирующей матрицы** (не использующем оппозитные проекции), основанным на итерационном применении алгоритмов трансмиссионной РКТ с коррекцией ослабления излучения в каждой точке (пикселе) получаемого изображения.

### 3. Приближённые методы обращения экспоненциального преобразования Радона.

#### 3.1. Использование оппозитных проекций

Напомним выражения для прямой  $p(\xi, \theta)$  и оппозитной  $p(-\xi, \theta + \pi)$  проекций:

$$p(\xi, \theta) = \int_{l_1}^{l_2} s(\zeta) \cdot \exp[-\mu(L_2 - \zeta)] d\zeta$$

$$p(-\xi, \theta + \pi) = \int_{-l_2}^{-l_1} s(\zeta') \cdot \exp[-\mu(-L_1 - \zeta')] d\zeta' = \int_{l_1}^{l_2} s(\zeta'') \cdot \exp[-\mu(L_1 - \zeta'')] d\zeta''$$

Пусть на линии проецирования находится только один точечный источник  $s(\zeta) = C\delta(\zeta - \zeta_0)$ .

Тогда при отсутствии поглощающей среды [ $\mu(x, y) = 0$ ] прямая и оппозитная проекции равны:

$$p(\xi, \theta)_{\mu=0} = p(-\xi, \theta + \pi)_{\mu=0}$$

а при её наличии:

$$p(\xi, \theta)_{\mu=0} = C \exp[-\mu(L_2 - \zeta_0)]$$

$$p(-\xi, \theta + \pi)_{\mu=0} = C \exp[-\mu(L_1 - \zeta_0)]$$

Покажем, что выражение для скорректированной проекции  $\tilde{p}(\xi, \theta)$ , совпадающей с проекцией, полученной в отсутствие поглощающей среды, является среднее геометрическое значение, умноженное на известный множитель, равный  $\exp\left[-\frac{\mu(L_2 - L_1)}{2}\right]$

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\xi, \theta)_{\mu=0} &= \tilde{p}(-\xi, \theta + \pi)_{\mu=0} = \sqrt{\tilde{p}(\xi, \theta) \cdot \tilde{p}(-\xi, \theta + \pi)} = \\ &= C \sqrt{\exp[-\mu(L_2 - \xi_0) + \mu(L_1 - \xi_0)]} = C \exp\left[-\frac{\mu(L_2 - L_1)}{2}\right] \end{aligned}$$

*Существенно, что скорректированная проекция не зависит от позиции точечного источника на линии проецирования.*

### 3.2. Метод корректирующей матрицы

#### Алгоритм использования корректирующей матрицы:

- сначала восстанавливают «нулевое» приближение  $s_0(x,y)$  к искомой функции  $s(x,y)$  по измеренным проекциям  $p(\xi, \Theta)$  при помощи методов РКТ;
- затем находят первое приближение  $s_1(x,y)$  с использованием выбранных элементов матрицы  $c(x,y)$ , корректирующей ослабление излучения в среде :

$$s_1(x,y) = c(x,y) \cdot s_0(x,y)$$

где:  $c(x,y) = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-\mu l_\Theta) d\Theta \right]^{-1}$  ;  $l_\Theta = L_2 + x \sin \Theta - y \cos \Theta$

- по найденному приближению  $s_1(x,y)$  вычисляют проекции  $p_1(\xi, \Theta)$  и определяют их отклонение от измеренных проекций по формуле:

$$p_{11}(\xi, \Theta) = p(\xi, \Theta) - p_1(\xi, \Theta);$$

- по этому отклонению находят элементы распределения  $s_{11}(x,y)$ , также используя методы РКТ;
- затем находят второе приближение  $s_2(x,y)$  к искомой функции  $s(x,y)$  по формуле:

$$s_2(x,y) = s_1(x,y) + c(x,y) \cdot s_{11}(x,y)$$

- Затем процесс коррекции повторяется.  
Как правило, процесс сходится за 1-2 итерации.

## Определение корректирующей матрицы $s(x,y)$ .

Рассмотрим точечный источник  $s(x,y) = C\delta(x-x_0)\cdot\delta(y-y_0)$ .

Запишем выражение для проекции (8) в виде:

$$\begin{aligned} p(\xi, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x, y) \delta(\xi - x \cos \Theta - y \sin \Theta) \cdot e^{-\mu(L_2 + x \sin \Theta - y \cos \Theta)} dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(\xi - x \cos \Theta - y \sin \Theta) \cdot e^{-\mu(L_2 + x \sin \Theta - y \cos \Theta)} dx dy = \\ &= \left| \frac{l_{\Theta} = L_2 + x_0 \cos \Theta - y_0 \sin \Theta}{\xi_{\Theta} = x \cos \Theta + y \sin \Theta} \right| = C \delta(\xi - \xi_{\Theta}) e^{-\mu l_{\Theta}} \end{aligned}$$

Применим к проекциям метод фильтрованных обратных проекций для РКТ с фильтром Рамагандрана и Лакшминараянана и получим:

$$\begin{aligned}
f(\xi, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi_0, \Theta) \cdot h_1(\xi - \xi_0) d\xi_0 = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi_0, \Theta) \cdot \frac{\chi_0^2}{2\pi} \left\{ \operatorname{sinc} c[\chi_0(\xi - \xi_0)] - \frac{1}{2} \operatorname{sinc} c^2 \left[ \frac{\chi_0(\xi - \xi_0)}{2} \right] \right\} d\xi_0 = \\
&= C \cdot \frac{\chi_0^2}{2\pi} \left\{ \operatorname{sinc} c[\chi_0(\xi - \xi_0)] - \frac{1}{2} \operatorname{sinc} c^2 \left[ \frac{\chi_0(\xi - \xi_0)}{2} \right] \right\} \exp(-\mu l_{\ominus})
\end{aligned}$$

Выполнив операцию обратного проецирования в точке  $[x_0, y_0]$  найдём:

$$\begin{aligned}
\tilde{s}(x_0, y_0) &= s(x, y) \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x \cos \Theta + y \sin \Theta, \Theta) d\Theta \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi_{\ominus}, \Theta) d\Theta = C \cdot \frac{\chi_0^2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \exp(-\mu l_{\ominus}) d\Theta
\end{aligned}$$

(при  $\xi \rightarrow \xi$   $\operatorname{sinc}[\ ] \rightarrow 1$ , а  $\{\operatorname{sinc}[\ ] - \operatorname{sinc}^2[\ ]/2\} \rightarrow 1/2$ )

Определим элементы корректирующей матрицы  $c(x_0, y_0)$  следующим образом:

$$c(x_0, y_0) = \frac{\tilde{s}(x_0, y_0)_{\mu=0}}{\tilde{s}(x_0, y_0)_{\mu \neq 0}} = \frac{C\chi_0^2 / 2\pi}{C\chi_0^2 / 4\pi^2 \int_0^{2\pi} \exp(-\mu l_{\Theta}) d\Theta} = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-\mu l_{\Theta}) d\Theta \right]^{-1}$$

Это выражение можно записать в дискретном виде:

$$c(x_0, y_0) = \left[ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \exp(-\mu l_{\Theta_i}) \right]^{-1}$$

где  $M$  – общее количество проекционных лучей, проходящих через точку  $[x_0, y_0]$ .

Фактически,  $c(x_k, y_j)$  – величина, *обратная среднеарифметическому* от  $[\exp(-\mu l_{\Theta_i})]$ , которую можно подсчитать, зная  $\mu$  и контуры  $L_2$  для всех  $[x, y]$ .



***КОНЕЦ 2-ОЙ ЧАСТИ  
СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ***

# **Обратное проецирование в эмиссионной вычислительной томографии.**