НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
КАФЕДРА «МЕДИЦИНСКАЯ ФИЗИКА»

Курс «ФИЗИКА РАДИОИЗОТОПНОЙ МЕДИЦИНЫ»

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОФЭКТ

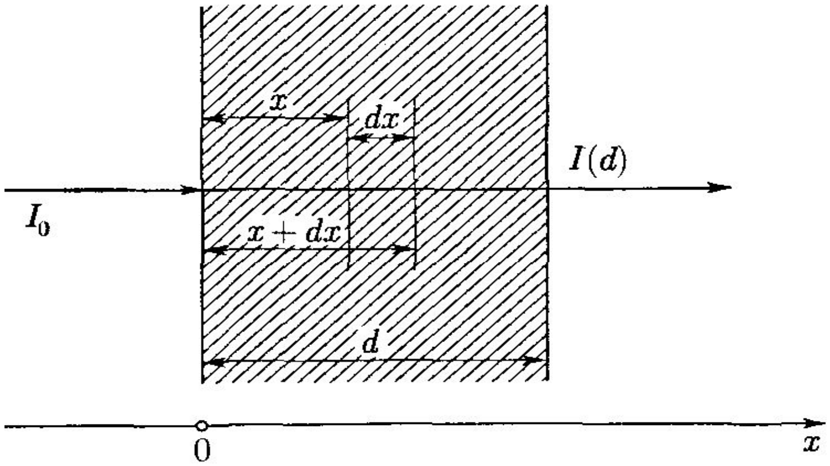
доцент каф. 35, к.ф.-м.н. Штоцкий Ю.В.

Содержание

- **Излучение точечного источника. Закон Бера**
- **Основная задача ОФЭКТ. Круговая геометрия измерений в ОФЭКТ. Влияние факторов геометрического ослабления и ослабления излучения веществом**
- **Методы обращения интегрального экспоненциального преобразования Радона:**
    1. *Метод двумерной фильтрации*
    2. *Метод Фурье-синтеза*
    3. *Метод одномерной фильтрации*
- **Методы коррекции на поглощение. Метод корректирующей матрицы**

1. Уравнение переноса излучения

1.1. Закон распространения внешнего излучения в веществе.



$\boldsymbol{I_0}$ - интенсивность тонкого пучка γ-излучения, падающего на слой вещества:

$\boldsymbol{\mu(x)}$ - распределением коэффициента линейного поглощения (ослабления) вдоль распространения пучка;

$\boldsymbol{P(x) = \mu(x) \cdot dx}$ - вероятность поглощения γ-кванта при прохождении элементарного пути dx.

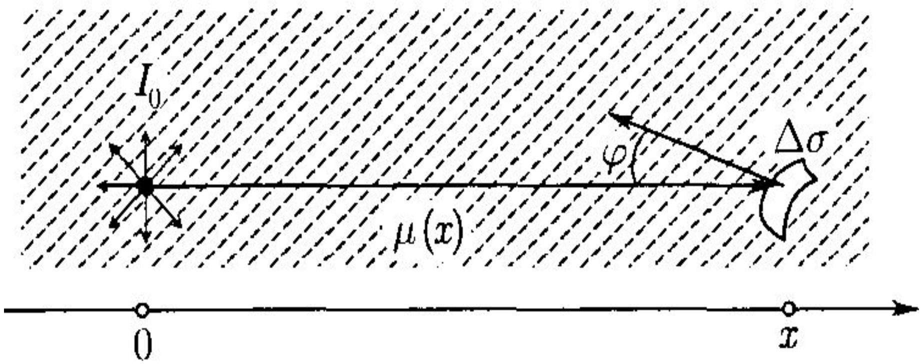
Стационарное уравнение переноса излучения в поглощающей неоднородной среде

$$\frac{dI(x)}{dx} = -\mu(x) I(x) \qquad (1)$$

Решением уравнения (1.1) будет закон ***Бугера-Ламберта-Бэра*** *для поглощающей неоднородной среды*

$$I(x) = I_0 \exp\left\{-\int_0^x \mu(x')dx'\right\} \qquad (2)$$

1.2. Закон распространения излучения при действии внутренних источников излучения (самоизлучающие объекты)



I_0 - интенсивность точечного источника, излучающего в телесный угол 4π;

$\mu(x)$ - распределением коэффициента линейного поглощения вдоль прямой, соединяющей источник с небольшой площадкой $\Delta\sigma$, наклоненной под углом φ к этой прямой.

Тогда интенсивность ***I(x)****, приходящаяся на площадку Δ****σ****, будет равна:*

$$I(x) = I_0 \frac{1}{4\pi x^2} \exp\left\{-\int_0^x \mu(x')dx'\right\} \cos\varphi \Delta\sigma \qquad (3)$$

Выражение (1.3) учитывает четыре основных фактора:

- ***геометрическое ослабление;***
- ***ослабление излучения в веществе;***
- ***наклон площадки детектора.***

2. Круговая геометрия измерений в ОФЭКТ с параллельными проекциями

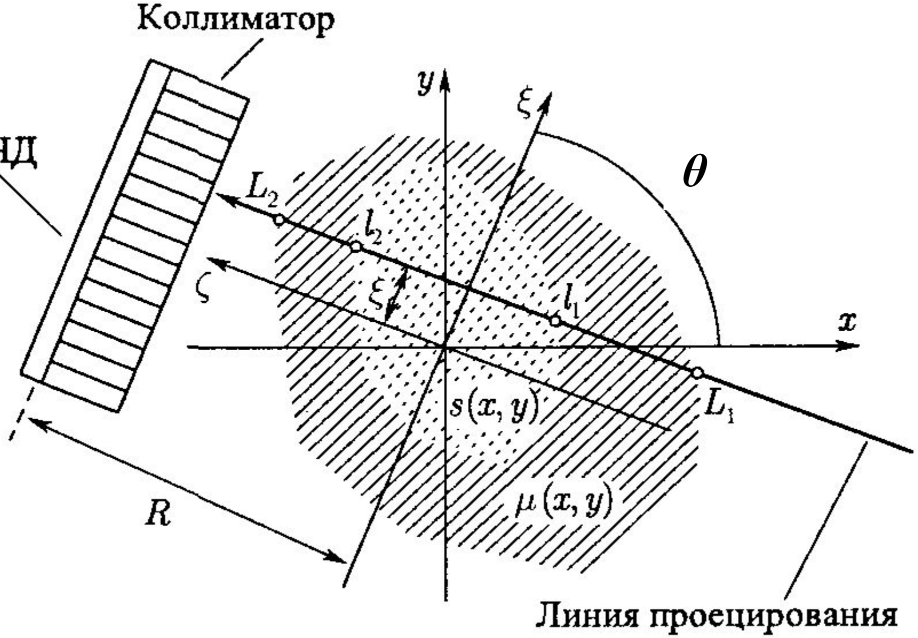
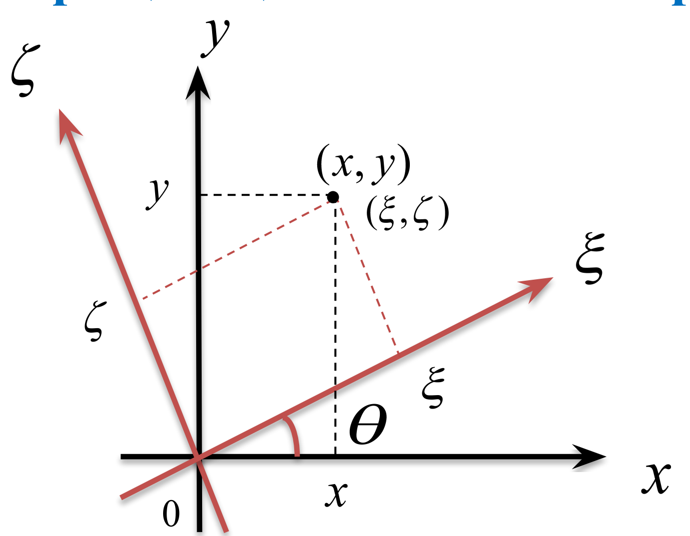


Схема кругового сканирования с параллельными проекциями

2.1. Основная задача ОФЭКТ - восстановление двумерного распределения источников излучения *s*(*x*,*y*), целиком расположенного в области с коэффициентом ослабления излучения *μ*(*x*,*y*).

*Набор отсчётов, зафиксированный элементами ПЧД, определяет проекцию (под углом **θ**). Затем система «Коллиматор-Детектор» поворачивается относительно объекта на угол **Δθ** и вновь измеряется проекция. Измерения повторяются, пока система «Коллиматор-Детектор» не повернётся на угол **2π**. По измеренному набору проекций необходимо восстановить двумерное распределение источников излучения **s**(**x**,**y**).*

2.2. Выражение для проекции $p(\xi,\theta)$, измеренной под углом θ во вращающейся системе координат



$$x = \xi\cos\theta - \zeta\sin\theta$$
$$y = \xi\sin\theta + \zeta\cos\theta$$

$$\zeta = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$\xi = -x\sin\theta + y\cos\theta \qquad (4)$$

Распределение источников излучения $\mathbf{s}(\xi,\theta)$ *:*

$$s_\theta(\xi,\varsigma) = s(\xi\cos\theta - \xi\sin\theta, \xi\sin\theta + \xi\cos\theta)$$

Распределение линейного коэффициента поглощения $\mu(\xi,\theta)$*:*

$$\mu_\theta(\xi,\varsigma) = \mu(\xi\cos\theta - \xi\sin\theta, \xi\sin\theta + \xi\cos\theta)$$

Тогда выражение для проекции $\mathbf{p}(\xi,\theta)$ *– интенсивность излучения, выходящего из объекта, будет иметь вид:*

$$p(\xi,\theta) = \int_{l_1}^{l_2} \frac{s_\theta(\xi,\varsigma)}{4\pi(R-\varsigma)^2} \exp\left\{-\int_{\varsigma}^{L_2} \mu_\theta(\xi,\varsigma')d\varsigma'\right\} d\varsigma \qquad (5)$$

2.3. Влияние геометрического ослабления и ослабления излучения веществом

2.3.1. Геометрическое ослабление

при равномерном распределении источников [$\mathbf{s}_{\Theta}(\xi,\varsigma) = \mathrm{const} = C$] и отсутствии поглощения [$\boldsymbol{\mu}_{\Theta}(\xi,\varsigma) = 0$] равно:

$$p(\xi,\theta)=\int_{l_1}^{l_2}\frac{C}{4\pi(R-\varsigma)^2}d\varsigma=\frac{C}{4\pi}\int_{l_1}^{l_2}\frac{d\varsigma}{(R-\varsigma)^2}=\frac{C}{4\pi}\cdot\frac{(l_2-l_1)}{(R-l_2)(R-l_1)}$$

Если не учитывать зависимость фактора геометрического ослабления от ς [т.е. $(\boldsymbol{R} - \varsigma) = \boldsymbol{R}$], то получим:

$$\widetilde{p}(\xi,\theta)=\int_{l_1}^{l_2}\frac{C}{4\pi\cdot R^2}d\varsigma=\frac{C}{4\pi}\cdot\frac{(l_2-l_1)}{R^2}$$

Тогда относительный вклад учёта фактора ς при характерных размерах томографии головы человека ($\boldsymbol{R}$ = 25 см; $\boldsymbol{l_1} = -\boldsymbol{l_2}$ = 8 см) составит:

$$\widetilde{p}(\xi,\theta)\frac{p(\xi,\theta)-\widetilde{p}(\xi,\theta)}{p(\xi,\theta)}=\frac{R^2-(R-l_1)(R-l_2)}{R^2}=\frac{R^2-(R+l)(R-l)}{R^2}=\left(\frac{l}{R}\right)^2=\left(\frac{8}{25}\right)^2=0.102$$

т.е. геометрическое ослабление вносит искажения на уровне <u>10%</u>.

2.3.2. Ослабление излучения веществом

при равномерном распределении источников $[\mathbf{s}_{\Theta}(\xi,\varsigma) = \text{const} = C]$,
при равномерном распределении поглощения - $[\boldsymbol{\mu}_{\Theta}(\xi,\varsigma) = \text{const} = \boldsymbol{\mu}]$
и отсутствии геометрического фактора равно:

$$p(\xi,\theta) = \int_{l_1}^{l_2} C\exp\left\{-\int_{\varsigma}^{L_2} \mu_\theta(\xi,\varsigma')d\varsigma'\right\}d\varsigma = C\int_{l_1}^{l_2}\exp\{-\mu(L_2-\varsigma)\}d\varsigma = \frac{C}{\mu}\left[e^{-\mu(L_2-l_2)} - e^{-\mu(L_2-l_1)}\right]$$

Если не учитывать поглощение излучения в веществе (т.е. $\mu = 0$),
то получим:

$$\tilde{p}(\xi,\theta) = \int_{l_1}^{l_2} C d\varsigma = C(l_2 - l_1)$$

Тогда относительный вклад учёта фактора поглощения излучения в веществе $\boldsymbol{\mu}$ при характерных размерах $\boldsymbol{L_2} = 8$ см; $\boldsymbol{l_1} = -\boldsymbol{l_2} = 8$ см), $\boldsymbol{\mu} = 0.15$ см$^{-1}$ для источника $^{99m}\boldsymbol{Tc}$ ($\boldsymbol{E_\gamma} = 140$ кэВ) в мягких тканях человека составит:

$$\frac{p(\xi,\theta) - \tilde{p}(\xi,\theta)}{p(\xi,\theta)} = \frac{e^{-\mu(L_2-l_2)} - e^{-\mu(L_2-l_1)} - e^{-\mu(l_2-l_1)}}{e^{-\mu(L_2-l_2)} - e^{-\mu(L_2-l_1)}} = \frac{e^0 - e^{-2\mu l} - 2\mu l}{e^0 - e^{-2\mu l}} = \frac{1-0.09-2}{1-0.09} = -1.64$$

т.е. относительный вклад фактора поглощения излучения в 16 раз больше вклада фактора геометрического ослабления. Следовательно, ослаблением излучения в веществе пренебречь нельзя.

Тогда уравнение для проекции примет следующий вид (несущественные постоянные множители отброшены):

$$p(\xi,\theta)=\int_{l_1}^{l_2} s_\theta(\xi,\varsigma)\exp\left\{-\int_{\varsigma}^{L_2}\mu_\theta(\xi,\varsigma')d\varsigma'\right\}d\varsigma$$

Если бы $\boldsymbol{\mu(x,y)=0}$, то это выражение превратилось бы в преобразование Радона относительно $\boldsymbol{s}(x,y)$, к которому применимы методы, рассмотренные в трансмиссионной РКТ.

Если считать $\boldsymbol{\mu(x,y)}$ неизвестной функцией, подлежащей определению [как и $\boldsymbol{s}(x,y)$], то задача становится слишком сложной для решения, т.к. нужно по одной двумерной функции $\boldsymbol{p}(\xi,\Theta)$ восстановить две двумерные функции - $\boldsymbol{\mu}(x,y)$ и $\boldsymbol{s}(x,y)$. Возможное решение задачи – использование алгебраических методов.

Если считать $\boldsymbol{\mu(x,y)}$ произвольной, но известной функцией (например, с помощью РКТ), то решение этой задачи возможно, по-видимому, только в алгебраической форме.

2.4. Вид экспоненциального преобразования Радона

Будем считать, что $\boldsymbol{\mu}(x,y) = \boldsymbol{\mu}$ = const (промежуточный случай), для которого найдено аналитическое решение.
Тогда:

$$p(\xi,\theta)=\int_{l_1}^{l_2} s_\theta(\xi,\varsigma)\cdot e^{-\mu(L_2-\varsigma)}d\varsigma \qquad (6)$$

Учитывая, что конфигурация области, ослабляющей излучение, известна (сам исследуемый объект), можно скорректировать каждую проекцию на постоянный для неё множитель **exp(-$\boldsymbol{\mu L_2}$)**.
Тогда уравнение (6) примет вид:

$$p(\xi,\theta)=\int_{l_1}^{l_2} s_\theta(\xi,\varsigma)\cdot e^{\mu\varsigma}d\varsigma$$

Т.к. $\boldsymbol{s}(x,y) = 0$ вне интервала $[l_1; l_2]$, пределы интегрирования можно продлить до бесконечности:

$$p(\xi,\theta)=\int_{-\infty}^{\infty} s_\theta(\xi,\varsigma)\cdot e^{\mu\varsigma}d\varsigma=\int_{-\infty}^{\infty} s[x(\xi,\varsigma,\Theta),y(\xi,\varsigma,\Theta)]\cdot e^{\mu\varsigma}d\varsigma= \qquad (7)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} s(\xi\cos\Theta-\varsigma\sin\Theta,\xi\sin\Theta+\varsigma\cos\Theta)\cdot e^{\mu\varsigma}d\varsigma$$

Это выражение называется экспоненциальным преобразованием Радона. С помощью $\boldsymbol{\delta}$-функции Дирака его можно представить в виде:

$$p(\xi,\theta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}s(x,y)\delta(\xi - x\cos\Theta - y\sin\Theta)\cdot e^{\mu(-x\sin\Theta + y\cos\Theta)}dxdy \qquad (\mathbf{8})$$

Целью коррекции ослабления излучения является получение из исходных проекций таких скорректированных проекций, которые совпадали бы с проекциями, полученными в отсутствие поглощающей среды. Тогда для обращения этих скорректированных проекций относительно $\boldsymbol{s}(x,y)$ можно применить методы, рассмотренные в трансмиссионной РКТ.

Большинство приближённых методов коррекции основаны на:

- ***использовании оппозитных проекций*** [$\boldsymbol{p}(\xi,\varsigma)$ и $\boldsymbol{p}(-\xi,\Theta+\pi)$].
- ***методе корректирующей матрицы*** (не использующем оппозитные проекции), основанным на итерационном применении алгоритмов трансмиссионной РКТ с коррекцией ослабления излучения в каждой точке (пикселе) получаемого изображения.

3. Приближённые методы обращения экспоненциального преобразования Радона.

3.1. Использование оппозитных проекций

Напомним выражения для прямой $\boldsymbol{p}(\xi,\Theta)$ и оппозитной $\boldsymbol{p}(-\xi,\Theta+\pi)$ проекций:

$$p(\xi,\theta)=\int_{l_1}^{l_2} s(\varsigma)\cdot exp[-\mu(L_2-\varsigma)]d\varsigma$$

$$p(-\xi,\theta+\pi)=\int_{-l_2}^{-l_1} s(\varsigma')\cdot \exp[-\mu(-L_1-\varsigma')]d\varsigma'=\int_{l_1}^{l_2} s(\varsigma'')\cdot \exp[-\mu(L_1-\varsigma'')]d\varsigma''$$

Пусть на линии проецирования находится только один точечный источник $\boldsymbol{s}(\varsigma) = C\delta(\varsigma-\varsigma_0)$.

Тогда при отсутствии поглощающей среды [$\boldsymbol{\mu}(x,y)=0$] прямая и оппозитная проекции равны:

$$p(\xi,\theta)_{\mu=0}=p(-\xi,\theta+\pi)_{\mu=0}$$

а при её наличии:

$$p(\xi,\theta)_{\mu=0}=C\exp[-\mu(L_2-\varsigma_0)]$$

$$p(-\xi,\theta+\pi)_{\mu=0}=C\exp[-\mu(L_1-\varsigma_0)]$$

Покажем, что выражение для скорректированной проекции $\tilde{p}(\xi,\theta)$, совпадающей с проекцией, полученной в отсутствие поглощающей среды, является среднее геометрическое значение, умноженное на известный множитель, равный $\exp\left[-\frac{\mu(L_2-L_1)}{2}\right]$

$$\tilde{p}(\xi,\theta)_{\mu=0} = \tilde{p}(-\xi,\theta+\pi)_{\mu=0} = \sqrt{\tilde{p}(\xi,\theta)\cdot\tilde{p}(-\xi,\theta+\pi)} =$$

$$= C\sqrt{\exp\left[-\mu(L_2-\xi_0)+\mu(L_1-\xi_0)\right]} = C\exp\left[-\frac{\mu(L_2-L_1)}{2}\right]$$

Существенно, что скорректированная проекция не зависит от позиции точечного источника на линии проецирования.

3.2. Метод корректирующей матрицы

Алгоритм использования корректирующей матрицы:

- сначала восстанавливают «нулевое» приближение $\boldsymbol{s_0}(x,y)$ к искомой функции $\boldsymbol{s}(x,y)$ по измеренным проекциям $\boldsymbol{p}(\xi,\Theta)$ при помощи методов РКТ;
- затем находят первое приближение $\boldsymbol{s_1}(x,y)$ с использованием выбранных элементов матрицы $\boldsymbol{c}(x,y)$, корректирующей ослабление излучения в среде :

$$\boldsymbol{s_1}(x,y) = \boldsymbol{c}(x,y)\cdot\boldsymbol{s_0}(x,y)$$

где: $$c(x,y)=\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(-\mu l_\Theta)d\Theta\right]^{-1}; \quad l_\Theta = L_2 + x\sin\Theta - y\cos\Theta$$

- по найденному приближению $\boldsymbol{s_1}(x,y)$ вычисляют проекции $\boldsymbol{p_1}(\xi,\Theta)$ и определяют их отклонение от измеренных проекций по формуле:

$$\boldsymbol{p_{l1}}(\xi,\Theta) = \boldsymbol{p}(\xi,\Theta) - \boldsymbol{p_1}(\xi,\Theta);$$

- по этому отклонению находят элементы распределения $\boldsymbol{s_{l1}}(x,y)$, также используя методы РКТ;
- затем находят второе приближение $\boldsymbol{s_2}(x,y)$ к искомой функции $\boldsymbol{s}(x,y)$ по формуле:

$$\boldsymbol{s_2}(x,y) = \boldsymbol{s_1}(x,y) + \boldsymbol{c}(x,y)\cdot\boldsymbol{s_{l1}}(x,y)$$

- Затем процесс коррекции повторяется.

  Как правило, процесс сходится за 1-2 итерации.

Определение корректирующей матрицы c(x,y).

Рассмотрим точечный источник $\mathbf{s}(x,y) = C\delta(x-x_0)\cdot\delta(y-y_0)$.

Запишем выражение для проекции (8) в виде:

$$p(\xi,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x,y)\delta(\xi - x\cos\Theta - y\sin\Theta)\cdot e^{-\mu(L_2 + x\sin\Theta - y\cos\Theta)}dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(\xi - x\cos\Theta - y\sin\Theta)\cdot e^{-\mu(L_2 + x\sin\Theta - y\cos\Theta)}dxdy =$$

$$= \left|\frac{l_\Theta = L_2 + x_0\cos\Theta - y_0\sin\Theta}{\xi_\Theta = x\cos\Theta + y\sin\Theta}\right| = C\delta(\xi - \xi_\Theta)e^{-\mu l_\Theta}$$

Применим к проекциям метод фильтрованных обратных проекций для РКТ с фильтром Рамагандрана и Лакшминарайянана и получим:

$$f(\xi,\theta)=\int_{-\infty}^{\infty} p(\xi_0,\Theta)\cdot h_1(\xi-\xi_0)d\xi_0=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} p(\xi_0,\Theta)\cdot\frac{\chi_0^2}{2\pi}\left\{\sin c\left[\chi_0(\xi-\xi_0)\right]-\frac{1}{2}\sin c^2\left[\frac{\chi_0(\xi-\xi_0)}{2}\right]\right\}d\xi_0=$$

$$=C\cdot\frac{\chi_0^2}{2\pi}\left\{\sin c\left[\chi_0(\xi-\xi_0)\right]-\frac{1}{2}\sin c^2\left[\frac{\chi_0(\xi-\xi_0)}{2}\right]\right\}\exp(-\mu l_\Theta)$$

Выполнив операцию обратного проецирования в точке $[x_0,y_0]$ найдём:

$$\tilde{s}(x_0,y_0)=s(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x\cos\Theta+y\sin\Theta,\Theta)d\Theta\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi_\Theta,\Theta)d\Theta=C\cdot\frac{\chi_0^2}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\exp(-\mu l_\Theta)d\Theta$$

(при $\xi\to\xi$ sinc[ ] $\to$ 1, а {sinc[ ] - sinc^2[ ]/2} $\to$ 1/2

Определим элементы корректирующей матрицы $\boldsymbol{c}(x_0,y_0)$·следующим образом:

$$c(x_0,y_0)=\frac{\widetilde{s}(x_0,y_0)_{\mu=0}}{\widetilde{s}(x_0,y_0)_{\mu\neq 0}}=\frac{C\chi_0^2/2\pi}{C\chi_0^2/4\pi^2\int\limits_0^{2\pi}\exp(-\mu l_\Theta)d\Theta}=\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\exp(-\mu l_\Theta)d\Theta\right]^{-1}$$

Это выражение можно записать в дискретном виде:

$$c(x_0,y_0)=\left[\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\exp\left(-\mu l_{\Theta_i}\right)\right]^{-1}$$

где M – общее количество проекционных лучей, проходящих через точку $[x_0,y_0]$.

Фактически, $\boldsymbol{c}(x_k,y_j)$·- величина, ***обратная среднеарифметическому*** от $[\exp(-\mu l_{\Theta i})]$, которую можно подсчитать, зная $\boldsymbol{\mu}$ и контуры $\boldsymbol{L_2}$ для всех $[x,y]$.

КОНЕЦ 2-ОЙ ЧАСТИ
СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

Обратное проецирование в эмиссионной вычислительной томографии.