1.6. Действия над матрицами. Обратная матрица. Свойства обратной матрицы

- **Произведением** матрицы $A = (a_{ij})_{m\times n}$ **на число *k*** называется матрица, элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы A умножением на число k: $k \cdot A = A \cdot k = (k \cdot a_{ij})$, $i = 1,2, \ldots, m$, $j = 1,2, \ldots, n$.

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \cdots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \ldots & k \cdot a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & \ldots & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Пример 1.8. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, k = 3,

$$A \cdot k = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 15 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Суммой (разностью)** двух матриц называется матрица, каждый элемент которой равен сумме (разности) соответствующих элементов данных матриц.
  Пусть даны матрицы $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, тогда $A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$.
  Операция сложения (вычитания) вводится только для матриц одинаковых размеров.

Матрица $-A = (-1) \cdot A$ называется противоположной матрице A.
Разность матриц $A - B$ можно определить так: $A - B = A + (-B)$.

Свойства сложения матриц и умножения матрицы на число

1. Сложение матриц коммутативно $A + B = B + A$;
2. Сложение ассоциативно $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3. $A + O = A$, O – нулевая матрица;
4. $A + (-A) = O$;
5. $1 \cdot A = A$;

6. $(\alpha + \beta) A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$;
7. $\alpha(A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$;
8. $\alpha(\beta \cdot A) = (\alpha\beta) \cdot A$; A, B, C – матрицы, α, β - числа.

Матрицы A и B называются противоположными, если их сумма A+ B = O есть нуль-матрица.

Произведение $A \cdot B$ матрицы A на матрицу B определяется в предположении, что число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Произведением двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$, $B_{n\times p} = (b_{jk})$ заданных в определённом порядке (A – первая, B - вторая), называется матрица $C_{m\times p}$ элементы которой определяются по следующему правилу:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}, \quad (5)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \ k = 1, 2, \ldots, p.$$

Пример 1.8. Перемножить матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. $A_{3\times 2} \cdot B_{2\times 3} = C_{3\times 3}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) & 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) & 3 \cdot 3 + 5 \cdot 4 & 3 \cdot 1 + 5 \cdot 5 \\ 1 \cdot 1 + 7 \cdot (-2) & 1 \cdot 3 + 7 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 7 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -7 & 29 & 28 \\ -13 & 31 & 36 \end{pmatrix}$$

Свойства умножения матриц

1. Умножение матриц не коммутативно $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Если $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы называются переставочными

Например $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}$ $A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Умножение матриц ассоциативно $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
3. $A \cdot O = O$, O – нулевая матрица;
4. $E \cdot A = A \cdot E = A$;
5. $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$;

   $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;

6. $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$; A, B, C – матрицы, α - число.

7. Произведение двух ненулевых матриц может оказаться равным нулевой матрице, например

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ненулевые матрицы A и B n – го порядка произведение которых есть нулевая матрица называются делителями нуля. При этом A – левый делитель, B – правый.

Если $A \cdot B = 0$, то $B \cdot A$ может быть не равно нулю.

Обратная матрица.

Рассмотрим квадратную матрицу $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Квадратная матрица A называется **невырожденной** или **неособенной**, если её определитель от нуля, т.е. $\det A \neq 0$, и **вырожденной** или **особенной**, если определитель равен нулю,т.е. $\det A = 0$.

- Квадратная матрица B называется **обратной** для квадратной матрицы А того же порядка, если их произведение $A \cdot B = B \cdot A = E$.

Матрица обратная матрице A обозначается A^{-1}.

Пусть дана квадратная матрица n – го порядка. Построим матрицу n – го порядка заменив в матрице A все её элементы их алгебраическими дополнениями:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Транспонируем полученную матрицу:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Матрица A^* называется **союзной** (**присоединённой**) к матрице A.
Обозначим $\Delta = |A|$, тогда обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Некоторые свойства обратной матрицы

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$$

$$(A^{-m}) \quad = (A^{-1})^{m} = (A^{m})^{-1}$$

$$|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \neq 0$$

Пример. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 = -12 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -8 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = -3 \end{cases}.$$

Данную систему можно записать в виде матричного уравнения: $A \cdot X = B$.

Умножая обе части уравнения на обратную матрицу A^{-1} получим: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B$, следовательно $X = A^{-1} \cdot B$. Нужно найти обратную матрицу A^{-1} и умножить на неё матрицу B, в результате получится искомый вектор X. В этом и заключается метод обратной матрицы (матричный метод).

Найдём определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 \cdot 6 + 7 \cdot 4 \cdot 4 - 4 \cdot 5 \cdot 6 - 3 \cdot 4 \cdot 8 - 6 \cdot 7 \cdot 1 =$$

$$= 40 + 108 + 112 - 120 - 96 - 42 = 2.$$

Так как $\Delta \neq 0$ матрица системы невырожденная и имеет обратную матрицу A^{-1} и эта матрица единственная:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \tilde{A}, \qquad (11)$$

где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Определяем алгебраические дополнения элементов матрицы системы:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 12 = -7, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(7 - 18) = 11, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 28 - 30 = -2,$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(6 - 16) = 10, \; A_{22} = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 24 = -16, \; A_{32} = -\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -(32 - 36) =$ $-4,$

$A_{13} = -\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 20 = -2, \; A_{23} = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(24 - 28) = 4, \quad A_{33} = -\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 40 - 42 =$ $-2,$

Решение системы определяем следующим образом,

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -7 & 11 & -2 \\ 10 & -16 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 84 - 88 + 6 \\ -120 + 128 - 12 \\ 24 - 32 + 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -1$.