

Булевой функцией $y=f(x_1, x_2 \dots x_n)$ от n переменных $x_1, x_2 \dots x_n$ называется любая функция, в которой аргументы и функция могут принимать значение либо 0 либо 1

$$\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$$






0 - ложь

1 – истина

булевы функции называют логическими

Область определения булевой функции конечна ->
можно задать значения во всех точках (таблица
истинности)

Наиболее важные функции

-  *Отрицание*
-  *Конъюнкция*
-  *Дизъюнкция*
-  *Импликация*
-  *Эквиваленция (или эквивалентность)*

Отрицание

№ набора	a	\bar{a}
0	0	1
1	1	0

обозначается $\bar{a}, \neg a$

Конъюнкция

№ набора	a	b	$a \wedge b$
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

обозначается $a \wedge b$ или $a \& b$

$a \cdot b$

ab

Дизъюнкция

№ набора	a	b	$a \vee b$
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1

обозначается через $a \vee b$

Импликация

№ набора	a	b	$a \rightarrow b$
0	0	0	1
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	1	1

обозначается $a \rightarrow b$

$$a \supset b$$

$$a \Rightarrow b$$

Эквиваленция

№ набора	a	b	$a \approx b$
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

обозначается $a \approx b$

$$a \equiv b$$

$$a \leftrightarrow b$$

$$a \Leftrightarrow b$$

Способы задания булевых функций

Задание булевой функции таблицей истинности

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

2^н строк

Задание булевой функции вектором значений

$f(0,0,\dots,0,0), f(0,0,\dots,0,1), f(0,0,\dots,1,0),$
 $f(0,0,\dots,1,1), \dots, f(1,1,\dots,0,0), f(1,1,\dots,0,1), f(1,1,\dots,1,0),$
 $f(1,1,\dots,1,1)$

$\varphi_f = 00010111$

Задание булевой функции номером

Каждой функции присваивается порядковый номер в виде натурального числа, двоичный код которого представляет собой столбец значений функции в таблице истинности.

Пример

Найти порядковый номер функции $f(x,y)$, принимающей следующие значения: $f(0,0)=1$, $f(0,1)=1$, $f(1,0)=0$, $f(1,1)=1$.

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Двоичный код, соответствующий значению этой функции – 1101.

$$1101_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13^{10}$$

Таким образом

$$f_{13}(x,y) = (1101)_2$$

Пример

Построить таблицу истинности для функции f_{198}

$$\frac{198}{0} \left| \frac{2}{99} \right| \frac{2}{1} \left| \frac{2}{49} \right| \frac{2}{1} \left| \frac{2}{24} \right| \frac{2}{0} \left| \frac{2}{12} \right| \frac{2}{0} \left| \frac{2}{6} \right| \frac{2}{0} \left| \frac{2}{3} \right| \frac{2}{1} \left| \frac{2}{1} \right|$$

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Формулами

$$(x \rightarrow \bar{y}) \rightarrow (\overline{x \vee y} \wedge z)$$

Приоритет выполнения операций

Если в формуле отсутствуют скобки, то операции выполняются в следующей последовательности:

1. Отрицание.
2. Конъюнкция.
3. Дизъюнкция.
4. Импликация.
5. Эквивалентность

—
∧
∨
→
~

Пример

Убрать все возможные скобки

$$((x \wedge y) \wedge z) \vee (x \vee y) = x \wedge y \wedge z \vee x \vee y$$

Расставить скобки с учетом приоритета операций

$$((x \wedge y) \wedge z) \vee (x \vee y)$$

- ◆ *Формула называется выполнимой (опровержимой), если существует такой набор значений переменных, при которых эта формула принимает значение 1 (0).*
- ◆ *Формула называется тождественно-истинной, или тавтологией (тождественно-ложной или противоречием), если эта формула принимает значение 1 (0) при всех наборах значений переменных.*

*Пусть A и B – две формулы, зависящие от одного и того же списка переменных. Будем называть их **равносильными**, если для любого набора значений переменных они принимают одинаковые значения*

свойства логических операций

<i>1. Идемпоентность</i>	
$A \wedge \underline{A} = A$	$A \vee \underline{A} = A$
<i>2. Коммутативность</i>	
$A \wedge B = \underline{B} \wedge A$	$A \vee B = \underline{B} \vee A$
<i>3. Ассоциативность</i>	
$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
<i>4. Правила поглощения</i>	
$A \wedge (A \vee B) = A$	$A \vee (A \wedge B) = A$
<i>5. Дистрибутивность</i>	
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

6. Правила де Моргана

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$

7. Свойства констант

$$A \wedge 1 = A$$

$$A \vee 0 = A$$

$$A \wedge 0 = 0$$

$$A \vee 1 = 1$$

8. Закон исключения третьего и закон противоречия

$$A \wedge \overline{A} = 0$$

$$A \vee \overline{A} = 1$$

9. Снятие двойного отрицания

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Безымянный - Paint

10. Формулы расщепления (склеивания)

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B}) = A$$

$$(A \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}) = A$$

11. Связь дизъюнкции, конъюнкции, отрицания и импликации

$$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B = \overline{A \wedge \bar{B}} = \bar{B} \rightarrow \bar{A}$$

12. Выражение эквивалентности

$$A \approx B = (\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{B} \vee A) = (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$$

Любая из равносильностей легко может быть доказана с помощью таблицы истинности

$$\underline{A} \wedge (A \vee B) = A.$$

A	B	$A \vee B$	$A \wedge (A \vee B)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Строим таблицу истинности для формулы $F = (x \rightarrow y) \wedge x \wedge y$.

№	x	y	$x \rightarrow y$	$F = (x \rightarrow y) \wedge x \wedge y$
0	0	0	1	0
1	0	1	1	0
2	1	0	0	0
3	1	1	1	1

Однако часто равносильность экономнее доказывать без составления полной таблицы истинности, а с помощью приведенных равносильностей

Доказать равносильность формулы, используя логические законы

$$\overline{a \rightarrow b} \equiv a \wedge \bar{b}$$

$$\overline{a \rightarrow b} \equiv \overline{a \vee \bar{b}} \equiv \bar{a} \wedge b \equiv a \wedge \bar{b}$$

$$\overline{(\overline{\overline{x \wedge y} \vee \overline{x}}) \wedge x \vee \overline{\overline{\overline{x \wedge y}}}}$$

$$\overline{(\overline{\overline{x \wedge y} \vee \overline{x}}) \wedge x \vee \overline{\overline{\overline{x \wedge y}}}} \equiv 6 \mid \equiv (\overline{\overline{x \vee y} \vee \overline{x}}) \wedge (\overline{x \wedge \overline{\overline{\overline{x \wedge y}}}}) \equiv 9 \mid \equiv$$

$$\equiv (x \vee y \vee \overline{x}) \wedge (\overline{x} \wedge \overline{x} \wedge y) \equiv 2, 1 \mid \equiv$$

$$\equiv ((x \vee \overline{x}) \vee y) \wedge (\overline{x} \wedge y) \equiv 8, 3 \mid \equiv (1 \vee y) \wedge \overline{x} \wedge y \equiv 7 \mid \equiv 1 \wedge \overline{x} \wedge y \equiv 7 \mid \equiv \overline{x} \wedge y.$$

$$\bar{a} \rightarrow (a \rightarrow b) \equiv \bar{a} \vee \bar{a} \vee b \equiv \bar{a} \vee b \equiv a \vee \bar{a} \vee b \equiv 1$$

Нормальные формы

Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция, составленная из попарно различных переменных или отрицаний переменных.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция попарно различных элементарных конъюнкций.

$$x \wedge y; \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3; ab \vee a\bar{b}c \vee \bar{a}c; x \vee xy.$$

Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция, составленная из попарно различных переменных или отрицаний переменных.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция попарно различных элементарных дизъюнкций.

$$x \vee \bar{y}; (x \vee y)(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$$

Совершенные нормальные формы

Совершенной ДНФ называется ДНФ, в которой

- нет одинаковых элементарных конъюнкций и

все конъюнкции состоят из одного и того же набора переменных, в который каждая переменная входит только один раз (возможно с отрицанием) $X \& Y \& \neg Z \vee X \& Y \& Z$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{F(c_1, \dots, c_n)=1} x_1^{c_1} \dots x_n^{c_n}$$

по всем наборам $c=(c_1, c_2, \dots, c_n)$ из 0 и 1

Совершенные нормальные формы

Совершенной КНФ называется КНФ, в которой

- нет одинаковых элементарных дизъюнкций и
- все дизъюнкții состоят из одного и того же набора переменных, в который каждая переменная входит только один раз (возможно с отрицанием)
($\neg X \vee Y \vee Z$) & ($X \vee \neg Y \vee Z$).

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{F(c_1, \dots, c_n)=0} (x_1^{\tilde{c}_1} \vee \dots \vee x_n^{\overline{c_n}})$$

по всем наборам $c=(c_1, c_2, \dots, c_n)$ из 0 и 1

Алгоритм получения СДНФ по таблице истинности

- ◆ Отметить те строки ТИ, в последнем столбце которых стоят 1:
- ◆ Выписать для каждой отмеченной строки конъюнкцию всех переменных следующим образом:
 - если значение некоторой переменной в данной строке =1, то в конъюнкцию включают саму эту переменную,
 - если =0, то ее отрицание:
- ◆ Все полученные конъюнкции связать в дизъюнкцию:

Алгоритм получения СДНФ по таблице истинности

$$F = x(\bar{y} \vee z)$$

№	x	y	z	\bar{y}	$\bar{y} \vee z$	$F = x(\bar{y} \vee z)$
0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	1	1
5	1	0	1	1	1	1
6	1	1	0	0	0	0
7	1	1	1	0	1	1

$$F = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z.$$

Алгоритм получения СКНФ по таблице истинности

- ◆ Отметить те строки ТИ, в последнем столбце которых стоят 0:
- ◆ Выписать для каждой отмеченной строки дизъюнкцию всех переменных следующим образом:
 - если значение некоторой переменной в данной строке =0, то в дизъюнкцию включают саму эту переменную,
 - если =1, то ее отрицание:
- ◆ Все полученные дизъюнкции связать в конъюнкцию:

Алгоритм получения СКНФ по таблице истинности

$$F = x(\bar{y} \vee z)$$

№	x	y	z	$F = x(\bar{y} \vee z)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

$$F = (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$$

