Булевой функцией $y=f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ от n переменных $x_1, x_2 \ldots x_n$ называется любая функция, в которой аргументы и функция могут принимать значение либо 0 либо 1

$$\{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

0 - ложь

1 – истина

булевы функции называют логическими

Область определения булевой функции конечна ->

можно задать значения во всех точках (таблица истинности)

Наиболее важные функции

- ***Отрицание***
- ***Конъюнкция***
- ***Дизъюнкция***
- ***Импликация***
- ***Эквиваленция (или эквивалентность)***

Отрицание

№ набора	a	$\overline{a}$
0	0	1
1	1	0

обозначается $\overline{a}, \neg a$

Конъюнкция

№ набора	a	b	$a \wedge b$
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

обозначается $a \wedge b$ или $a \& b$

$a \cdot b$

ab

Дизъюнкция

№ набора	a	b	$a \vee b$
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1

обозначается через $a \vee b$

Импликация

№ набора	a	b	$a \to b$
0	0	0	1
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	1	1

обозначается $a \to b$

$a \supset b$

$a \Rightarrow b$

Эквиваленция

№ набора	a	b	$a \approx b$
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

обозначается $a \approx b$

$a \equiv b$

$a \leftrightarrow b$

$a \Leftrightarrow b$

Способы задания булевых функций

Задание булевой функции таблицей истинности

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

2^n строк

Задание булевой функции вектором значений

$f(0,0,...,0,0), f(0,0,...,0,1), f(0,0,...,1,0), f(0,0,...,1,1),..., f(1,1,...,0,0), f(1,1,...,0,1), f(1,1,...,1,0), f(1,1,...,1,1)$

φf=00010111

Задание булевой функции номером

Каждой функции присваивается порядковый номер в виде натурального числа, двоичный код которого представляет собой столбец значений функции в таблице истинности.

Пример

Найти порядковый номер функции $f(x,y)$, принимающей следующие значения: $f(0,0)=1$, $f(0,1)=1$, $f(1,0)=0$, $f(1,1)=1$.

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Двоичный код, соответствующий значению этой функции – 1101.

$1101_2 = 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 =$
$=8+4+0+1=13^{10}$

Таким образом

$f_{13}(x,y) = (1101)_2$

Пример

Построить таблицу истинности для функции f_{198}

198 | 2
0 | 99 | 2
1 | 49 | 2
1 | 24 | 2
0 | 12 | 2
0 | 6 | 2
0 | 3 | 2
1 | 1

x	*y*	*z*	*f (x,y,z)*
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Формулами

$$\left(x \to \overline{y}\right) \to \left(\overline{x \vee y} \wedge z\right)$$

Приоритет выполнения операций

Если в формуле отсутствуют скобки, то операции выполняются в следующей последовательности:

1. Отрицание.
2. Конъюнкция.
3. Дизъюнкция.
4. Импликация.
5. Эквивалентность

$\overline{}$
$\wedge$
$\vee$
$\rightarrow$
$\sim$

<u>Пример</u>

Убрать все возможные скобки

$$((x \wedge y) \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x \vee y}) = x \wedge y \wedge \overline{z} \vee \overline{x \vee y}$$

Расставить скобки с учетом приоритета операций

$$((x \wedge y) \rightarrow ((y \vee z) \rightarrow (x \rightarrow y)))$$

- *Формула называется* ***выполнимой (опровержимой)****, если существует такой набор значений переменных, при которых эта формула принимает значение 1 (0).*
- *Формула называется* ***тождественно-истинной****, или* ***тавтологией (тождественно-ложной*** *или* ***противоречием****), если эта формула принимает значение 1 (0) при всех наборах значений переменных.*

*Пусть А и В – две формулы, зависящие от одного и того же списка переменных. Будем называть их **равносильными**, если для любого набора значений переменных они принимают одинаковые значения*

свойства логических операций

1. Идемпотентность	
$A \wedge A = A$	$A \vee A = A$
2. Коммутативность	
$A \wedge B = B \wedge A$	$A \vee B = B \vee A$
3. Ассоциативность	
$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
4. Правила поглощения	
$A \wedge (A \vee B) = A$	$A \vee (A \wedge B) = A$
5. Дистрибутивность	
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

6. Правила де Моргана	
$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$	$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$
7. Свойства констант	
$A \wedge 1 = A$ $A \wedge 0 = 0$	$A \vee 0 = A$ $A \vee 1 = 1$
8. Закон исключения третьего и закон противоречия	
$A \wedge \overline{A} = 0$	$\grave{A} \vee \overline{A} = 1$
9. Снятие двойного отрицания	
$\overline{\overline{A}} = A$	Безымянный - Paint

10. Формулы расщепления (склеивания)	
$(A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) = A$	$(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) = A$
11. Связь дизъюнкции, конъюнкции, отрицания и импликации	
$A \rightarrow B = \overline{A} \vee B = \overline{A \wedge \overline{B}} = \overline{B} \rightarrow \overline{A}$	
12. Выражение эквивалентности	
$A \approx B = (\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee A) = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$	

Любая из равносильностей легко может быть доказана с помощью таблицы истинности

$$A \wedge (A \vee B) = A.$$

A	B	$A \vee B$	$A \wedge (A \vee B)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Строим таблицу истинности для формулы $F = (x \to y)xy.$

№	x	y	$x \to y$	$F=(x \to y) \wedge x \wedge y$
0	0	0	1	0
1	0	1	1	0
2	1	0	0	0
3	1	1	1	1

Однако часто равносильность экономнее доказывать без составления полной таблицы истинности, а с помощью приведенных равносильностей

Доказать равносильность формулы, используя логические законы

$$\overline{a \to b} \equiv a \wedge \bar{b}$$

$$\overline{a \to b} \equiv |11| \equiv \overline{\bar{a} \vee b} \equiv |6| \equiv \bar{\bar{a}} \wedge \bar{b} \equiv |9| \equiv a \wedge \bar{b}$$

$$\left(\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}}\vee\bar{x}\right)\wedge\overline{x\vee\overline{\bar{x}\wedge y}}$$

$$\left(\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}}\vee\bar{x}\right)\wedge\overline{x\vee\overline{\bar{x}\wedge y}}\equiv|6|\equiv\left(\bar{\bar{x}}\vee\bar{\bar{y}}\vee\bar{x}\right)\wedge\left(\bar{x}\wedge\overline{\overline{\bar{x}\wedge y}}\right)\equiv|9|\equiv$$

$$\equiv\left(x\vee y\vee\bar{x}\right)\wedge\left(\bar{x}\wedge\bar{x}\wedge y\right)\equiv|2,1|\equiv$$

$$\equiv\left(\left(x\vee\bar{x}\right)\vee y\right)\wedge\left(\bar{x}\wedge y\right)\equiv|8,3|\equiv\left(1\vee y\right)\wedge\bar{x}\wedge y\equiv|7|\equiv 1\wedge\bar{x}\wedge y\equiv|7|\equiv\bar{x}\wedge y.$$

$$\bar{a} \to (a \to b) \equiv |11, 3| \equiv \bar{\bar{a}} \vee \bar{a} \vee b \equiv |9| \equiv a \vee \bar{a} \vee b \equiv |8, 7| \equiv 1$$

Нормальные формы

Элементарной конъюнкцией *называется конъюнкция, составленная из попарно различных переменных или отрицаний переменных.*

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) *называется дизъюнкция попарно различных элементарных конъюнкций.*

$$x \wedge y;\ \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3};\ ab \vee a\bar{b}c \vee \bar{a}c;\ x \vee xy.$$

Элементарной дизъюнкцией *называется дизъюнкция, составленная из попарно различных переменных или отрицаний переменных.*

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) *называется конъюнкция попарно различных элементарных дизъюнкций.*

$$x\vee\bar{y};\ (x\vee y)(x\vee\bar{y}\vee z)(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})$$

Совершенные нормальные формы

Совершенной ДНФ называется ДНФ, в которой

- нет одинаковых элементарных конъюнкций и

- все конъюнкции состоят из одного и того же набора переменных, в который каждая переменная входит только один раз (возможно с отрицанием) X&Y&¬Z V X&Y& Z

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{F(c_1, ..., c_n)=1} x_1^{c_1} ... x_n^{c_n}$$

по всем наборам c=(c1, c2, ..., cn) из 0 и 1

Совершенные нормальные формы

Совершенной КНФ называется КНФ, в которой

- нет одинаковых элементарных дизъюнкций и
- все дизъюнкции состоят из одного и того же набора переменных, в который каждая переменная входит только один раз (возможно с отрицанием)
  (¬ X VY V Z) & (X V¬Y V Z).

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigwedge_{F(c_1, ..., c_n)=0} (x_1^{\overline{\tilde{n}_1}} \vee ... \vee x_n^{\overline{c_n}})$$

по всем наборам c=(c1, c2, ..., cn) из 0 и 1

Алгоритм получения СДНФ по таблице истинности

- Отметить те строки ТИ, в последнем столбце которых стоят 1:
- Выписать для каждой отмеченной строки конъюнкцию всех переменных следующим образом:
  - если значение некоторой переменной в данной строке =1, то в конъюнкцию включают саму эту переменную,
  - если =0, то ее отрицание:
- Все полученные конъюнкции связать в дизъюнкцию:

Алгоритм получения СДНФ по таблице истинности

$$F = x\left(\overline{y} \vee z\right)$$

№	x	y	z	$\overline{y}$	$\overline{y} \vee z$	$F = x\left(\overline{y} \vee z\right)$
0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	1	1
5	1	0	1	1	1	1
6	1	1	0	0	0	0
7	1	1	1	0	1	1

$$F = \boxed{x\overline{y}\,\overline{z}} \vee \boxed{x\overline{y}z} \vee \boxed{xyz}.$$

Алгоритм получения СКНФ по таблице истинности

- Отметить те строки ТИ, в последнем столбце которых стоят 0:
- Выписать для каждой отмеченной строки дизъюнкцию всех переменных следующим образом:
  - если значение некоторой переменной в данной строке =0, то в дизъюнкцию включают саму эту переменную,
  - если =1, то ее отрицание:
- Все полученные дизъюнкции связать в конъюнкцию:

Алгоритм получения СКНФ по таблице истинности

$$F = x\left(\overline{y} \vee z\right)$$

№	x	y	z	$F = x\left(\overline{y} \vee z\right)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

$$F = \boxed{(x \vee y \vee z)}\boxed{(x \vee y \vee \overline{z})}\boxed{(x \vee \overline{y} \vee z)}\boxed{(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})}\boxed{(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)}.$$