Энтропия объединенной ВС. Условная энтропия и её свойства.

1. Понятие энтропии объединенной ВС;
2. Условная энтропия;
3. Теорема о связи энтропии объединенной ВС и энтропии составляющих её частных схем.

Понятие энтропии объединенной ВС

$$A = \begin{pmatrix} a_1,\dots,a_m \\ p_1,\dots,p_m \end{pmatrix} p_i \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1,\dots,b_n \\ q_1,\dots,q_n \end{pmatrix} q_j \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{n} q_j = 1.$$

Назовем схему C – *объединённой вероятностной схемой с множеством исходов* $c_{ij} = a_i b_j$ *и вероятностным распределением*

$$C = \begin{pmatrix} c_{11},\dots,c_{mn} \\ p(11),\dots,p(mn) \end{pmatrix},$$

если для вероятностей p(ij) *выполняются следующие соотношения:*

$$\sum_{i=1}^{m} p(ij) = q_j; \quad \sum_{j=1}^{n} p(ij) = p_i; \quad \sum_{(ij)} p(ij) = 1.$$

	b_1	b_2	…	b_n	
a_1	c_{11} p_{11}	c_{12} p_{12}		c_{1n} p_{1n}	p_1
a_2	c_{21} p_{21}	c_{22} p_{22}	…	c_{2n} p_{2n}	p_2
…			…		
a_m	c_{m1} p_{m1}	c_{m2} p_{m2}		c_{mn} p_{mn}	p_m
	q_1	q_2	…	q_n	

$$p(a_i b_j) \ne p_i q_j$$

$$p(ij) = p_i p(b_j / a_i) = p_i p_{ij} = q_j p(a_i / b_j) = q_j p_{ji}$$

Пример объединенной ВС

Пусть заданы д. с. в. X_1, X_2 и Y. X_1 и X_2 — количества очков, выпавших соответственно на 1-й и 2-й игральной кости, а $Y = X_1 + X_2$. Найти $I(Y, X_1)$, $I(X_1, X_1)$, $I(Y, Y)$.

$$p_{ij} = P(Y = i, X_1 = j) = \begin{cases} 1/36, & \text{при } 1 \leqslant i - j \leqslant 6, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$X_1 \backslash Y$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	0	0	0	0	0
2	0	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	0	0	0	0
3	0	0	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	0	0	0
4	0	0	0	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	0	0
5	0	0	0	0	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	0
6	0	0	0	0	0	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$

энтропия объединенной ВС

$$H(AB) = -\sum_{(ij)} p(ij)\log p(ij)$$

Условная энтропия

$$H(B/A) = -\sum_{(ij)} p_{ij} \log p_{ij}$$

$$H_i = H(B/a_i) = -\sum_{(j)} p(b_j/a_i) \log p(b_j/a_i) = -\sum_{(j)} p_{ij} \log p_{ij}$$

$$H(AB) - H(A) = H(B/A)$$

Если $p(a_i b_j) = p_i q_j$, то $H(B/A) = H(B)$

Теорема о связи энтропии объединенной ВС и энтропии составляющих её частных схем

Для любых двух конечных ВС

$H(AB) \leq H(A)+H(B)$.

Если A и B независимы, то

$H(AB) = H(A)+H(B)$.

Следствия

1. $H(B/A) \le H(B)$
2. $H(B/A) \le H(B),\ A=(A_1,\ldots,A_r)$

3. $H(A_1,\ldots,A_r) \le \sum_{k=1}^{r} H(A_k)$

4. $H(C/\,AB) \le H(C/B)$
5. $H(A_r\,/\,A_1,\ldots,A_{r-1}) \le H(A_r\,/\,A_2,\ldots,A_{r-1})$