

# Энтропия объединенной ВС. Условная энтропия и её свойства.

1. Понятие энтропии объединенной ВС;
2. Условная энтропия;
3. Теорема о связи энтропии объединенной ВС и энтропии составляющих её частных схем.

# Понятие энтропии объединенной ВС

$$A = \begin{pmatrix} a_1, \dots, a_m \\ p_1, \dots, p_m \end{pmatrix} p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1.$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1, \dots, b_n \\ q_1, \dots, q_n \end{pmatrix} q_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n q_j = 1.$$

Назовем схему  $C$  – объединённой вероятностной схемой с множеством исходов  $c_{ij} = a_i b_j$  и вероятностным распределением

$$C = \begin{pmatrix} c_{11}, \dots, c_{mn} \\ p(11), \dots, p(mn) \end{pmatrix},$$

если для вероятностей  $p(ij)$  выполняются следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^m p(ij) = q_j; \quad \sum_{j=1}^n p(ij) = p_i; \quad \sum_{(ij)} p(ij) = 1.$$

	$b_1$	$b_2$	...	$b_n$	
$a_1$	$c_{11}$ $p_{11}$	$c_{12}$ $p_{12}$		$c_{1n}$ $p_{1n}$	$p_1$
$a_2$	$c_{21}$ $p_{21}$	$c_{22}$ $p_{22}$	...	$c_{2n}$ $p_{2n}$	$p_2$
...			...		
$a_m$	$c_{m1}$ $p_{m1}$	$c_{m2}$ $p_{m2}$		$c_{mn}$ $p_{mn}$	$p_m$
	$q_1$	$q_2$	...	$q_n$	

$$p(a_i b_j) \neq p_i q_j$$

$$p(ij) = p_i p(b_j / a_i) = p_i p_{ij} = q_j p(a_i / b_j) = q_j p_{ji}.$$

# Пример объединенной ВС

Пусть заданы д.с.в.  $X_1$ ,  $X_2$  и  $Y$ .  $X_1$  и  $X_2$  — количества очков, выпавших соответственно на 1-й и 2-й игральной кости, а  $Y = X_1 + X_2$ . Найти  $I(Y, X_1)$ ,  $I(X_1, X_1)$ ,  $I(Y, Y)$ .

$$p_{ij} = P(Y = i, X_1 = j) = \begin{cases} 1/36, & \text{при } 1 \leq i - j \leq 6, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$X_1 \setminus Y$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	0	0
2	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	0
3	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0
4	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0
5	0	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0
6	0	0	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

# энтропия объединенной ВС

$$H(AB) = - \sum_{(ij)} p(ij) \log p(ij)$$

# Условная энтропия

$$H(B/A) = - \sum_{(ij)} p_{ij} \log p_{ij}$$

$$H_i = H(B/a_i) = - \sum_{(j)} p(b_j/a_i) \log p(b_j/a_i) = - \sum_{(j)} p_{ij} \log p_{ij}$$

$$H(AB) - H(A) = H(B/A)$$

Если  $p(a_i b_j) = p_i q_j$ , то  $H(B/A) = H(B)$

# Теорема о связи энтропии объединенной ВС и энтропии составляющих её частных схем

Для любых двух конечных ВС

$$H(AB) \leq H(A) + H(B).$$

Если  $A$  и  $B$  независимы, то

$$H(AB) = H(A) + H(B).$$

# Следствия

1.  $H(B/A) \leq H(B)$

2.  $H(B/A) \leq H(B), A=(A_1, \dots, A_r)$

3.  $H(A_1, \dots, A_r) \leq \sum_{k=1}^r H(A_k)$

4.  $H(C/AB) \leq H(C/B)$

5.  $H(A_r / A_1, \dots, A_{r-1}) \leq H(A_r / A_2, \dots, A_{r-1})$