Лекция 14.

Производная и ее применение.

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры ПМиИТ
Журавлева Ирина Викторовна.

ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ. ПРАВИЛА ЛОПИТАЛЯ.

Теоремы о среднем

Теорема 7.1 (Ролля). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и принимает на концах отрезка равные значения (т. е. $f(a) = f(b)$). Тогда существует по крайней мере одна точка c на интервале $(a; b)$, для которой $f'(c) = 0$.

Теорема 7.2 (Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда на интервале $(a; b)$ найдется такая точка c, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Теорема 7.3 (Коши). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы на интервале $(a; b)$, причем $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a; b)$. Тогда найдется такая точка c на этом интервале, что

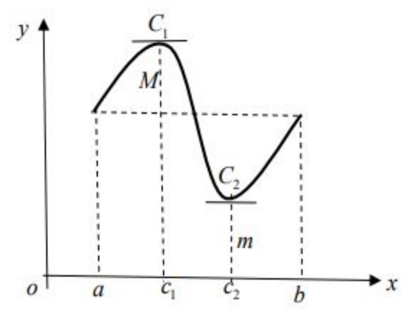
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Теорема Ролля. Пусть функция $f(x)$

1) непрерывна на отрезке $[a,b]$, 2) дифференцируема на интервале (a,b),

3) на концах отрезка принимает равные значения $f(a)=f(b)$.

Тогда найдется хотя бы одна точка $c\in(a,b)$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т.е. $f'(c)=0$.



Доказательство. По свойству функций, непрерывных на отрезке, функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ принимает наибольшее значение M и наименьшее значение m.

Возможны два случая. а). Если $M=m$, то функция $f(x)$ постоянна на $[a,b]$ и, значит, ее производная $f'(x)=0$ в любой точке отрезка $[a,b]$.

б). Если $M\neq m$, а по условию $f(a)=f(b)$, то функция $f(x)$ хотя бы одно из значений M или m принимает внутри отрезка $[a,b]$ в точке $c\in(a,b)$. Пусть , например, $f(c)=m$. Тогда $f(c)\le f(c+\Delta x)$ для любых достаточно малых Δx. Поэтому $\Delta f(c)=f(c+\Delta x)-f(c)\ge 0$ и, значит,

$$\frac{\Delta f(c)}{\Delta x}\ge 0 \text{ при } \Delta x>0, \qquad \frac{\Delta f(c)}{\Delta x}\le 0 \text{ при } \Delta x<0.$$

Так как функция $f(x)$ дифференцируема в точке c, то существует производная $f'(c)$, причем $f'(c)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(c)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta f(c)}{\Delta x}\ge 0$. С другой стороны,

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(c)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta f(c)}{\Delta x}\le 0.$$

Отсюда следует, что $f'(c)=0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля

Если выполнены условия теоремы, то на графике функции $y=f(x)$ найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции параллельна оси OX. На рис.19 таких точек две : это точки C_1 и C_2.

Теорема Лагранжа. Пусть функция $f(x)$

1) непрерывна на отрезке $[a,b]$, 2) дифференцируема на интервале (a,b).

Тогда найдется хотя бы одна точка $c \in (a,b)$, такая, что

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{или} \quad f(b)-f(a) = f'(c)(b-a). \tag{7.1}$$

Формулу (7.1) называют ***формулой конечных приращений Лагранжа.***

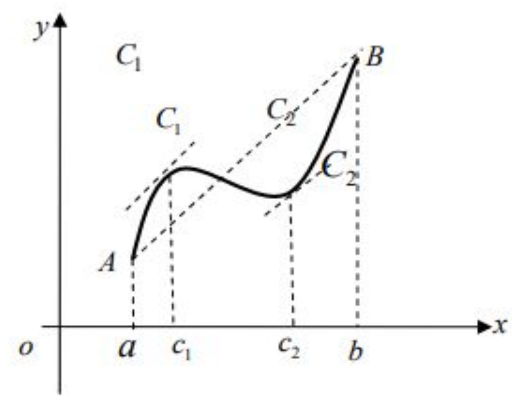
Доказательство. Введем вспомогательную функцию $\Phi(x) = f(x) - \lambda x$. Подберем λ так, чтобы $\Phi(a) = \Phi(b)$. Тогда

$$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b, \quad \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Вспомогательная функция $\Phi(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: $\Phi(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и $\Phi(a) = \Phi(b)$. Поэтому по теореме Ролля найдется точка $c \in (a,b)$ такая, что $\Phi'(c) = 0$. Тогда $\Phi'(c) = f'(c) - \lambda = 0$, $\quad f'(c) = \lambda = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Отношение $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ равно угловому коэффициенту секущей AB (рис.20), а $f'(c)$ равна угловому коэффициенту касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой c. Поэтому из теоремы следует, что на кривой $y = f(x)$ найдется хотя бы одна точка C, в которой касательная к кривой параллельна секущей AB. На рис. 20 таких точек две: это точки C_1, C_2.



Правила Лопиталя

Первое правило Лопиталя. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, кроме, быть может, самой этой точки, и $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$. Тогда если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ (в этом случае говорят, что в точке x_0 имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$) и существует $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Второе правило Лопиталя. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, кроме, быть может, самой этой точки, и $g'(x) \neq 0$ для $\forall\, x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$. Тогда если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \infty$ (т. е. в точке x_0 имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$) и существует $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Если отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ в свою очередь представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то правило Лопиталя (при условии выполнения соответствующих ограничений на функции $f'(x)$ и $g'(x)$) можно применять второй раз и т. д.

Проверить, справедлива ли теорема Ролля для функции $f(x) = x^2 - 2x$ на отрезке $[-1; 3]$, найти соответствующее значение c (если оно существует).

❍ Функция непрерывна на отрезке $[-1; 3]$ и дифференцируема на интервале $(-1; 3)$. Кроме того, $f(-1) = f(3) = 3$, поэтому теорема Ролля на данном отрезке для данной функции справедлива. Найдем значение $c \in (-1; 3)$, для которого $f'(c) = 0$, из равенства $(x^2 - 2x)' = 0$, т.е. $2x - 2 = 0$, откуда $x = 1$. Поскольку $1 \in (-1; 3)$, то $c = 1$ — искомое значение. ●

Найти пределы, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x-\sin x}$.

● 1) Поскольку $\ln\sin 3x$ и $\ln x$ стремятся к бесконечности при $x\to 0$, то в данном случае имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\sin 3x)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot\cos 3x}{\sin 3x}=$$

$$=3\lim_{x\to 0}\cos 3x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)}=3\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}}=1.$$

В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом.

2) $\lim\limits_{x\to 0}x^3=\lim\limits_{x\to 0}(x-\sin x)=0$, поэтому имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^3)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(3x^2)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{\sin x}=6\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=6.$$

Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

1) Здесь имеет место неопределенность вида $0\cdot\infty$, которую мы раскроем, предварительно сведя ее к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$; а далее воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0+0} x\cdot\ln x=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=-\lim_{x\to 0+0} x=0.$$

2) Имеем неопределенность $\infty-\infty$. Сведем ее к неопределенности $\frac{0}{0}$, приведя дроби к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)'}{\left(\ln x+1-\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

◐ 1) В этом случае имеем неопределенность вида 0^0. Неопределенности этого вида, также как и неопределенности вида 1^∞, ∞^0, можно найти, предварительно вычислив предел от логарифма функции.

Итак, обозначим $y = x^x$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \ln(x^x) = \lim_{x\to 0} x \ln x = 0$$

$$\ln \lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \ln y = 0,$$

откуда $\lim\limits_{x\to 0} y = 1$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$.

2) Здесь неопределенность вида 1^∞. Обозначив $y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$, найдем $\lim\limits_{x\to 0} \ln y$:

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \ln(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(\cos x))'}{x'} = \lim_{x\to 0} (-\operatorname{tg} x) = 0.$$

Отсюда $\ln \lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} \ln y = 0$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1$. ●

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Условия монотонности функции

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$[1] и для любого x из интервала $(a;b)$ выполнено неравенство $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) то $f(x)$ возрастает (соответственно убывает) на этом интервале.

Условие же $\forall\, x \in (a;b)$: $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) равносильно тому, что функция $f(x)$ не убывает (соответственно, не возрастает) на интервале $(a;b)$, т. е. $\forall\, x_1, x_2 \in (a;b)$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) \geqslant f(x_2)$).

Экстремумы функции

$\Rrightarrow$ Точка x_0 называется *точкой локального максимума* (*локального минимума*), если существует такая окрестность $U(x_0)$ этой окрестности, что

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \forall\, x \in U(x_0),\ x \neq x_0$$

(соответственно, $f(x) \geqslant f(x_0)$, $\forall\, x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$).

$\Rrightarrow$ Точки локального максимума и минимума называются *точками локального экстремума*, а значения функции в этих точках — *экстремумами* функции.

Теорема 7.4 (Ферма — необходимое условие экстремума). Если x_0 — точка локального экстремума для функции $f(x)$, то в этой точке производная функции либо равна нулю ($f'(x_0) = 0$), либо не существует.

⇛ Точки области определения непрерывной функции $f(x)$, в которых ее производная не существует или равна нулю, называются *критическими точками* функции.

В силу теоремы Ферма экстремумы функции находятся среди ее критических точек.

Первое достаточное условие экстремума. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и дифференцируема в некоторой ее окрестности (кроме, быть может, самой точки x_0). Тогда, если $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 — точка локального экстремума (если с «+» на «−» — локальный максимум, если же с «−» на «+» — локальный минимум).

Второе достаточное условие экстремума. Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные первого и второго порядков. Тогда, если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 — точка локального экстремума. В частности, если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума, а если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума.

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — критические точки непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$, то наибольшее и наименьшее значения этой функции есть соответственно наибольшее и наименьшее из чисел $f(a)$, $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots, f(x_n)$, $f(b)$.

Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба

⇒ Функция $f(x)$, определенная на интервале $(a; b)$, называется *выпуклой вверх* (*выпуклой вниз*) на этом интервале, если точки любой дуги графика функции расположены выше (соответственно, ниже) хорды, стягивающей эту дугу (рис. 83,*а* и *б*).

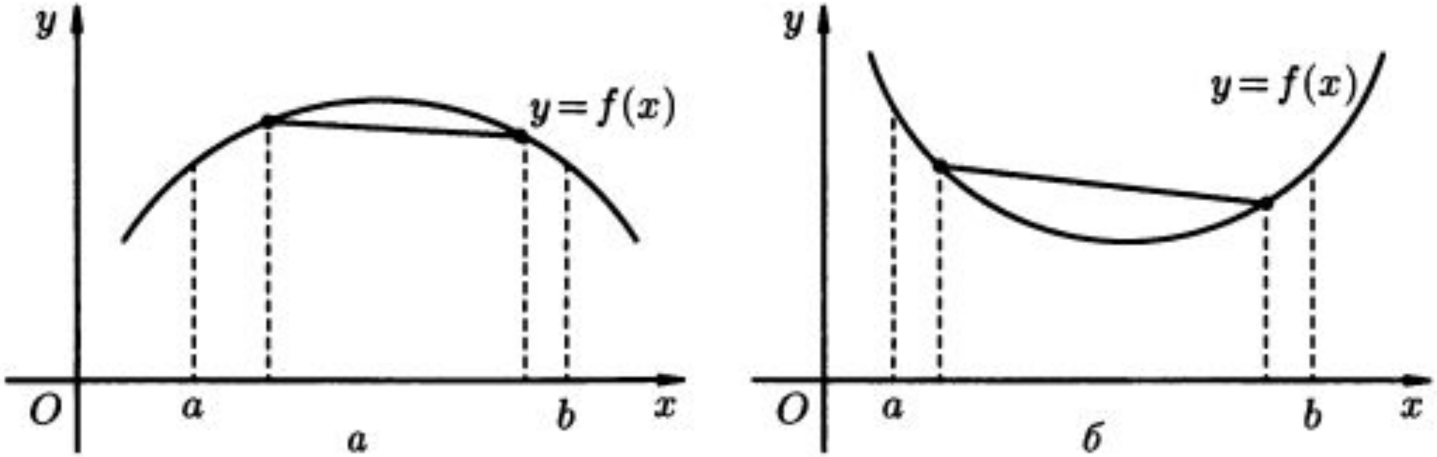


Рис. 83

Иногда выпуклость вверх (соответственно, выпуклость вниз) называют просто *выпуклостью* (соответственно, *вогнутостью*).

График выпуклой вверх (выпуклой вниз) на интервале $(a; b)$ функции также называют выпуклым вверх (соответственно, выпуклым вниз).

Можно дать другое, эквивалентное, определение выпуклости вверх (выпуклости вниз): функция $f(x)$ называется выпуклой вверх (выпуклой вниз) на интервале $(a;b)$, если график этой функции при $x \in (a;b)$ расположен ниже (соответственно, выше) касательной, проведенной в любой его точке (рис. 84,*а* и *б*).

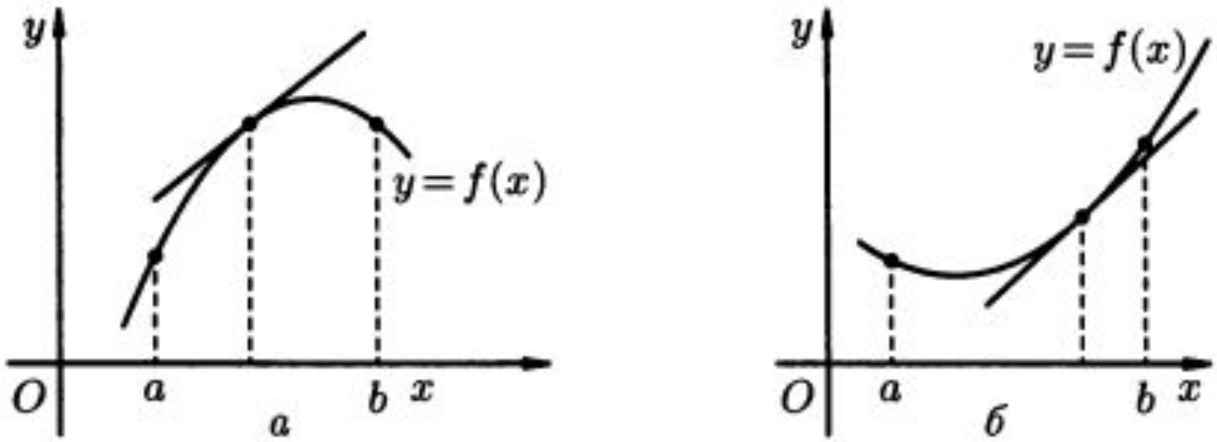


Рис. 84

Достаточное условие выпуклости вверх (вниз). Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную на интервале $(a;b)$. Тогда, если $f''(x) \leqslant 0$ (соответственно, $f''(x) \geqslant 0$) на этом интервале, то функция $f(x)$ выпукла вверх (соответственно, выпукла вниз) на нем.

$\Rightarrow$ Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Тогда если при переходе через точку x_0 функция меняет направление выпуклости, то эта точка называется *точкой перегиба функции* $f(x)$. Точка $(x_0, f(x_0))$ при этом называется *точкой перегиба графика функции* $f(x)$ (рис. 85,*а* и *б*).

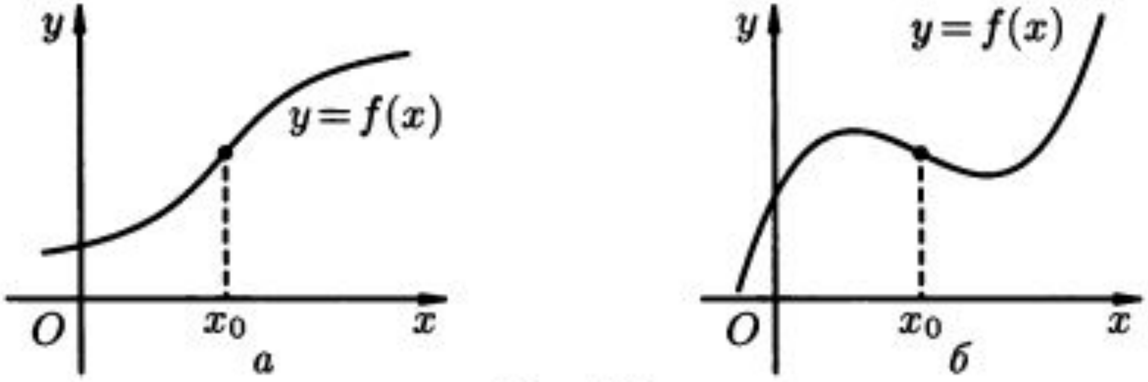


Рис. 85

Необходимое условие точки перегиба. Если x_0 — точка перегиба функции $f(x)$, то в этой точке вторая производная функции либо равна нулю ($f''(x_0) = 0$), либо не существует.

$\Rrightarrow$ Точки, в которых вторая производная функции равна нулю или не существует, называются *критическими точками 2-го рода.*

Точки перегиба следует искать среди критических точек 2-го рода.

Первое достаточное условие точки перегиба. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет вторую производную в некоторой окрестности этой точки (кроме, быть может, самой точки x_0). Тогда если при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак, то x_0 — точка перегиба.

Второе достаточное условие точки перегиба. Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ имеет производные до третьего порядка включительно. Тогда если $f''(x_0) = 0$, а $f'''(x_0) \neq 0$, то x_0 — точка перегиба этой функции.

Асимптоты

Прямая линия m называется *аси́мптотой* графика функции $y = f(x)$, если расстояние d от точки M, лежащей на этом графике, до прямой m стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по графику от начала координат в бесконечность (рис. 86 а), б), в))[2].

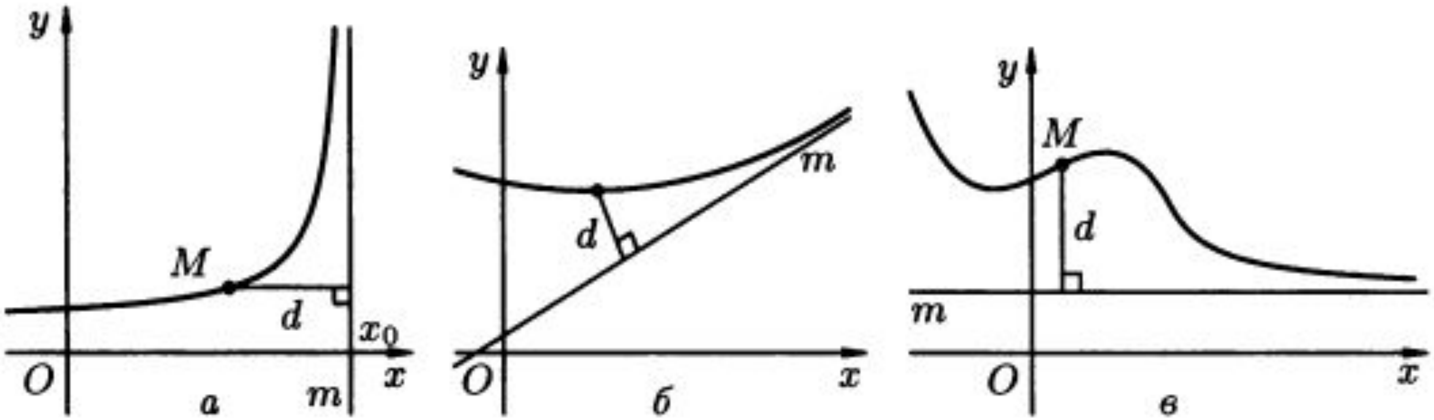


Рис. 86

Асимптоты бывают трех видов: вертикальные, наклонные и горизонтальные.

⇛ Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ равен бесконечности (рис. 86 а)).

⇛ Прямая $y = kx+b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$), если $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (kx + b)\big) = 0$ (соответственно, $\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x) - (kx + b)\big) = 0$) (рис. 86 б)).

Прямая $y = kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$) тогда и только тогда, когда существуют пределы

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ и } \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b$$

(соответственно,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx] = b).$$

Частным случаем наклонной асимптоты (при $k = 0$) является *горизонтальная асимптота* (рис. 86 в)).

Прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$) тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

(соответственно, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$).

Построение графиков функций

При построении графика данной функции целесообразно пользоваться следующей схемой:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность, нечетность и периодичность;

3) найти участки непрерывности функции, а так же точки разрыва с указанием вида разрыва;

4) найти точки пересечения графика с осями координат;

5) найти интервалы знакопостоянства функции;

6) найти асимптоты;

7) найти интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции;

8) найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$.

◐ Функция определена на всей числовой оси, а ее производная равна $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3(x-2)(x+2)$. Функция $f(x)$ возрастает тогда и только тогда, когда $f'(x)) > 0$, т. е. $(x-2)(x+2) > 0$, откуда $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. Аналогично, данная функция убывает в точности когда $f'(x) < 0$, т. е. $(x-2)(x+2) < 0$, откуда $x \in (-2; 2)$.

Таким образом, функция $f(x)$ возрастает на интервалах $(-\infty; -2)$ и $(2; +\infty)$, а убывает на интервале $(-2; 2)$. ●

Найти экстремумы функции $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$.

❍ Функция определена и дифференцируема на всей числовой прямой, причем $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 3(x-1)(x-5)$. Критические точки $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. Воспользуемся вторым достаточным

условием экстремума, для чего найдем $f''(1)$ и $f''(5)$:

$$f''(x) = 6x - 18 \Longrightarrow f''(1) = -12, \ f''(5) = 12.$$

Поскольку $f'(1) = 0$, а $f''(1) < 0$, то $x = 1$ — точка локального максимума, причем $f(1) = 7$. Аналогично, так как $f'(5) = 0$, а $f''(5) > 0$, то $x = 5$ — точка локального минимума, а $f(5) = -25$. ●

Найти асимптоты графика функции $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

Функция непрерывна всюду, кроме точки $x = 1$, в которой она терпит разрыв второго рода, причем $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$. Отсюда следует, что прямая $x = 1$ — вертикальная асимптота и других вертикальных асимптот нет.

Проверим, есть ли у графика функции наклонные асимптоты. Находим

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = 1, \text{ откуда}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = 0.$$

Таким образом, прямая $y = x$ — наклонная асимптота графика функции при $x \to +\infty$. Аналогично получим, что эта прямая является наклонной асимптотой и при $x \to -\infty$.

Поскольку угловой коэффициент k наклонной асимптоты не равен нулю, то график функции не имеет горизонтальных асимптот. ●

Провести полное исследование функции $y = \dfrac{x^3}{4-x^2}$ и построить ее график.

Область определения $D(f)$ функции — вся числовая ось, за исключением точек $x=-2$ и $x=2$, т. е.

$$D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty).$$

Функция непериодическая; исследуем ее на четность и нечетность:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{4-(-x)^2} = -\frac{x^3}{4-x^2} = -f(x).$$

Следовательно, данная функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат. Поэтому далее исследуем функцию только при $x \geqslant 0$.

Найдем точки пересечения графика с осями координат:

с осью Oy график пересекается при $x=0$, откуда

$$y = f(0) = 0,$$

т. е. $M(0;0)$ — точка пересечения с осью Oy;

с осью Ox график пересекается, если $f(x)=0$, т. е. $\dfrac{x^3}{4-x^2} = 0$, откуда $x=0$. Таким образом, $M(0;0)$ — единственная точка пересечения графика с осями координат.

Находим интервалы знакопостоянства функции:

$$f(x) > 0 \iff \frac{x^3}{4 - x^2} > 0 \iff x(4 - x^2) > 0,$$

и так как мы рассматриваем только случай $x \geqslant 0$, то получаем $0 < x < 2$.

Аналогично $f(x) < 0$ при $x > 2$.

Далее,

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x^3}{4 - x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \to 2+0} \frac{x^3}{4 - x^2} = -\infty,$$

т. е. прямая $x = 2$ — вертикальная асимптота. Отсюда, в силу симметрии, следует, что прямая $x = -2$ — также вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{4 - x^2} = -1,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{4 - x^2} + x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{4 - x^2} = 0,$$

т. е. прямая $y = -x$ — наклонная асимптота при $x \to +\infty$ (то же и при $x \to -\infty$). Горизонтальных асимптот график не имеет.

Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции, исследуя первую производную:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{4-x^2}\right)' = \frac{x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2} = \frac{x^2(2\sqrt{3}-x)(2\sqrt{3}+x)}{(4-x^2)^2}.$$

Отсюда видно, что при $x \geqslant 0$ (см. рис. 87) функция имеет максимум в точке $x = 2\sqrt{3}$ (причем $f(2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} \approx -5{,}2$), возрастает на $(0;2)$ и $(2;2\sqrt{3})$ и убывает на $(2\sqrt{3};+\infty)$.

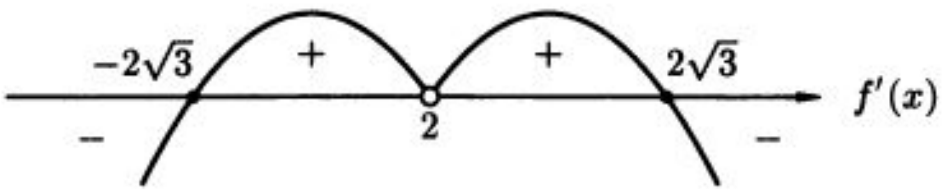


Рис. 87

Чтобы определить интервалы выпуклости и точки перегиба, вычислим вторую производную:

$$f''(x) = \frac{8x(12+x^2)}{(4-x^2)^3}.$$

Отсюда ясно, что при $x \geqslant 0$ функция выпукла вверх (т. е. $f'' < 0$) на $(2;+\infty)$ и выпукла вниз (т. е. $f'' > 0$) на $(0;2)$, $x = 0$ — точка перегиба.

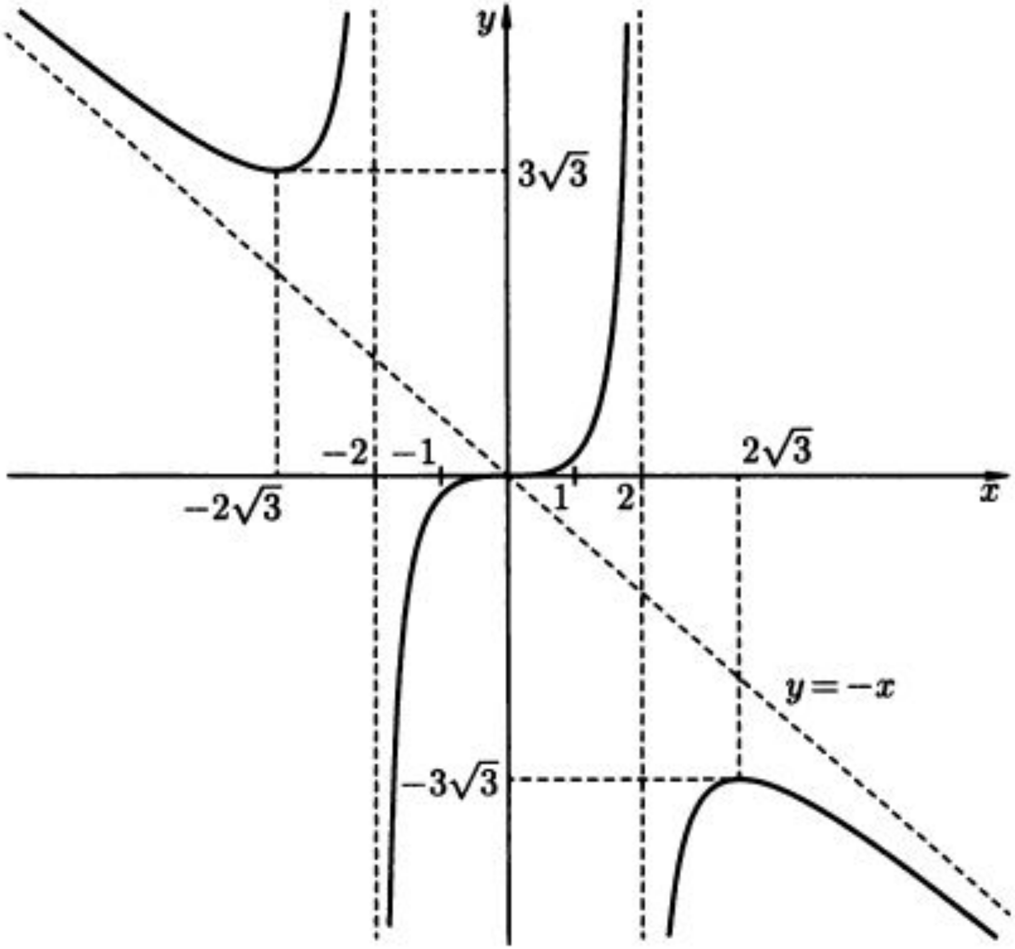


Рис. 88

Учитывая накопленную информацию, строим график функции при $x \geqslant 0$, а затем симметрично отражаем его относительно начала координат (рис. 88). ●

1. Найти производную функции

$$y = \operatorname{arctg}^3 \ln \frac{\sqrt{x}}{x+2}.$$

2. Найти производную функции $y = (\sqrt{x})^{\arcsin x}$.

3. Найти производную $y'(x)$ неявной функции

$$\sin(x - 2y) + \frac{x^3}{y} = 7x.$$

4. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $x = e^{-t} \cdot \cos t$, $y = e^{t} \cdot \cos t$.

5. Найти предел, используя правило Лопиталя

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x}.$$

6. Провести полное исследование функции $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ и построить ее график.