О числе минимальных вершинных покрытий Цепочки

Авторы работы:
Листопадов Матвей Викторович,
учащийся 10 класса СШ №30 г.Гомеля,
Калугин Павел Дмитриевич,
учащийся 8 класса СШ №30 г.Гомеля,
Пасмурцев Егор Сергеевич,
учащийся 10 класса СШ №30 г.Гомеля.

Руководитель:
Довженок Татьяна Степановна,
кандидат физико-математических наук,
учитель математики СШ № 30 г.Гомеля

Аннотация

Объектом исследования в данной работе является особый класс графов – Цепочки.
Вводятся в рассмотрение 2 новых подкласса Цепочек:
граф Гусеница и **Цепочка Петерсена**, звеньями которых служат цикл с концами в смежных вершинах и Граф Петерсена с концами в несмежных вершинах соответственно.
Находится число минимальных вершинных покрытий указанных классов графов.

Основные понятия

Пусть $G = (V, E)$ – произвольный граф без петель и кратных ребер с множеством вершин V и множеством рёбер E.

Множество вершин $D \subseteq V(G)$ будем называть **вершинным покрытием** графа G, если для каждого ребра $AB \in E(G)$ либо $A \in D$, либо $B \in D$.

Вершинное покрытие D графа G назовём **минимальным**, если при удалении из этого множества любой вершины оно перестаёт быть вершинным покрытием.

Цель работы

– Найти вершинные характеристики Звеньев, основой которых служат цикл с концами в смежных вершинах и Граф Петерсена с концами в несмежных вершинах

– Определить число минимальных вершинных покрытий Графа Гусеницы и Цепочки Петерсена.

Глава 1. Звенья и раскраски

Раскраски графов

Определение 1.1 Раскраску вершин графа в белый и черный цвета будем называть **хорошей**, если она удовлетворяет двум условиям:

1) *хотя бы один из концов любого ребра графа покрашен в чёрный цвет*;
2) *любая черная вершина смежна хотя бы с одной белой*.

Определение 1.2 Обозначим число хороших раскрасок графа G через $\mu(G)$.

Теорема 1.2
Число минимальных вершинных покрытий графа G *равно* $\mu(G)$.

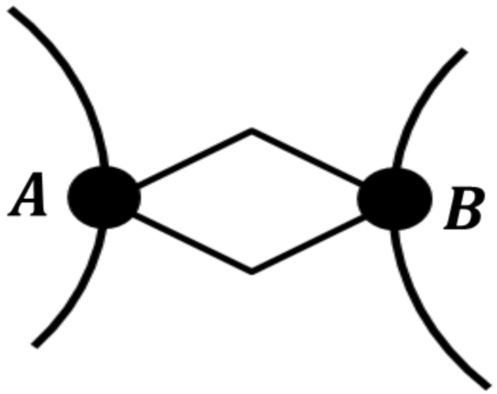
Определение 1.3 Пусть $O \in V(G)$. Раскраску вершин графа G в белый и чёрный цвета назовём ***O-почти хорошей***, если она удовлетворяет следующим трём условиям:

1) *хотя бы один из концов любого ребра окрашен в чёрный цвет;*
2) *вершина O окрашена в чёрный цвет и не смежна ни с одной белой вершиной;*
3) *любая чёрная вершина графа G, отличная от O, смежна хотя бы с одной белой вершиной.*

Определение 1.4 Пусть $A, B \in V(G)$. Раскраску вершин графа G в белый и чёрный цвета назовём ***AB-почти хорошей***, если выполнены 3 условия:

1) *хотя бы один из концов любого ребра окрашен в чёрный цвет;*
2) *вершины A, B окрашены в чёрный цвет и не смежны ни с одной белой вершиной;*
3) *любая чёрная вершина графа G, отличная от A и B, смежна хотя бы с одной белой вершиной.*

Звено графа



Определение 1.5

Пусть H – подграф графа G, порождённый множеством вершин $X \in V(G)$, $A, B \in V(H)$, $A \neq B$ при этом существует автоморфизм графа H, переводящий вершину A в вершину B.

Упорядоченную тройку (H, A, B) будем называть **Звеном** графа G с концами A, B, если выполняется следующее условие: для любого ребра $MN \in E(G)$ такого, что M, N отличны от A, B, либо $M, N \in V(H)$, либо $M, N \notin V(H)$.

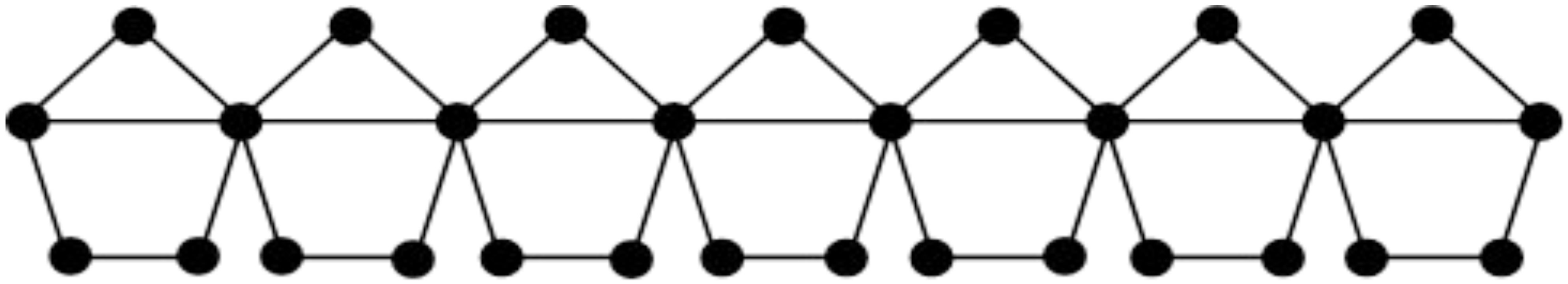
Вершинные характеристики Звена

Определение 1.6 Для Звена $(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ определим следующие параметры:

$\boldsymbol{a}$ – число хороших раскрасок H, при которых вершины A и B – белые;
$\boldsymbol{b}$ – число хороших раскрасок H, при которых A – белая, B – черная;
$\boldsymbol{c}$ – число хороших раскрасок H, при которых вершины A и B – черные;
$\boldsymbol{d}$ – число A-почти хороших раскрасок H таких, что B – белая;
$\boldsymbol{e}$ – число A-почти хороших раскрасок H таких, что B – черная;
$\boldsymbol{f}$ – число AB-почти хороших раскрасок H.

Упорядоченную шестерку чисел $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$ будем называть **вершинными характеристиками Звена $(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.**

Глава 2. Цепочки.
Основной результат



Пусть $n \in N$, H – граф без петель и кратных ребер. $A, B \in V(H)$, $A \neq B$, при этом существует автоморфизм графа H, переводящий вершину A в вершину B.

Определение 2.1 Граф G назовём **Цепочкой**, если его можно представить в виде $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$, где

1) для любого $i \in \{1,2,\dots,n\}$ существует изоморфизм H на G_i, при котором вершины A, B переходят в вершины O_{i-1} и O_i соответственно;

2) (G_1, O_0, O_1), $(G_2, O_1, O_2), \dots, (G_n, O_{n-1}, O_n)$ – Звенья графа G.

Граф Цепочку будем обозначать $\boldsymbol{Ch(n, H, A, B)}$ (*англ.* Chainlet).

Определение 2.2 Пусть a, b, c, d, e, f – вершинные характеристики Звена (H, A, B). Определим величины $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{p} = ab + be + bc + cd,\ \boldsymbol{q} = b^2 d - abe + (b+d)(b^2 - ac), \qquad (2.1)$$
$$\boldsymbol{r} = b^2 f - bde + (b+d)(be - cd).$$

Теорема 2.1 (О числе хороших раскрасок Цепочки)

Число $\boldsymbol{S_n}$ *минимальных вершинных покрытий Цепочки* $\boldsymbol{Ch(n, H, A, B)}$ *определяется следующим образом:*

1) если $\boldsymbol{b \neq 0}$, *то*

$$\boldsymbol{S_n = \frac{p+be-cd}{b} S_{n-1} + \frac{bq+cr+pcd-pbe}{b^2} S_{n-2} + \frac{b^2r-acr+cqd-bqe}{b^2} S_{n-3},\ n \geq 3,}$$

$$\boldsymbol{S_0 = 1, S_1 = a + 2b + c,\ S_2 = a^2 + 2b^2 + c^2 + 2bd + 2ce + 2p;}$$

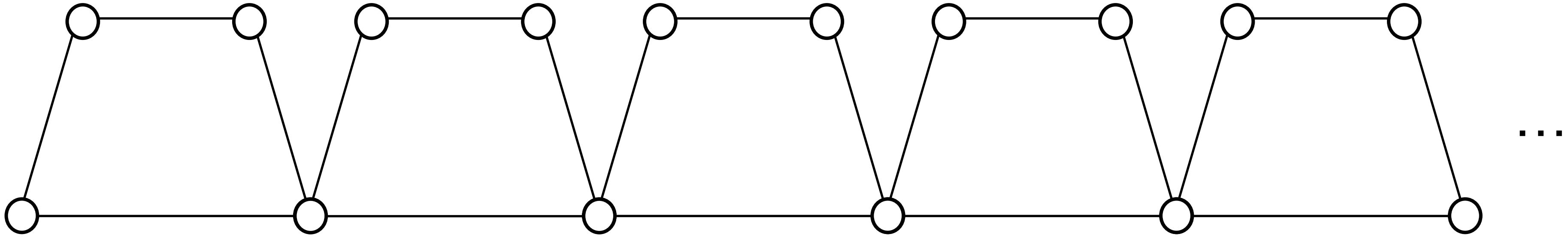
2) если $\boldsymbol{b = 0}$, *то*

$$\boldsymbol{S_n = (a+c)S_{n-1} + c(f-a)S_{n-2} + c\left(d^2 - af\right)S_{n-3}, n \geq 3,}$$

$$\boldsymbol{S_0 = 1, S_1 = a + c,\ S_2 = a^2 + c^2 + 2cd,}$$

где $\boldsymbol{a, b, c, d, e, f}$ *– вершинные характеристики Звена* $\boldsymbol{(H, A, B)}$, $\boldsymbol{p, q, r}$ *определяются из соотношений* (2.1).

Глава 3. Граф Гусеница



Полезное соотношение

Определение 3.1 Пусть $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{P_m}$ – простая цепь с последовательными вершинами $\mathbf{1, 2, \ldots, \boldsymbol{m}}$.
Обозначим через $\boldsymbol{X_m}$ число хороших раскрасок цепи $\boldsymbol{P_m}$ при условии, что вершина **1** – белая.

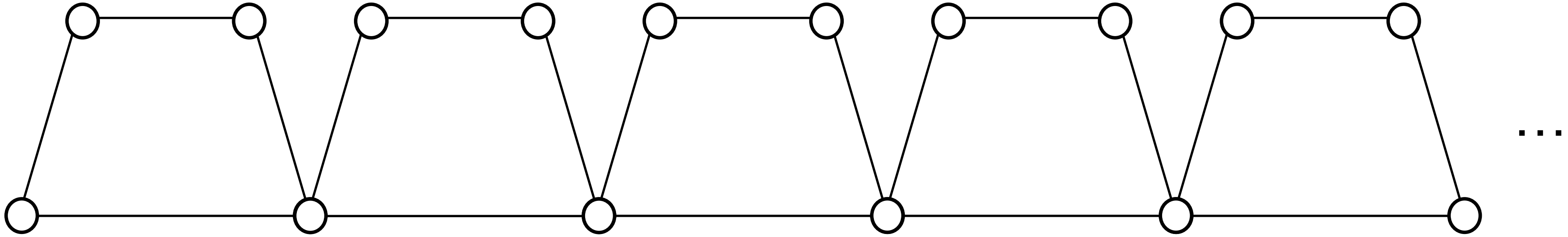
Теорема 3.1
Пусть $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\boldsymbol{X_m}$ *определяется рекуррентно по формуле:*

$$\boldsymbol{X_m = X_{m-2} + X_{m-3}, m \geq 3, X_0 = 0, X_1 = X_2 = 1.} \qquad (3.1)$$

Граф Гусеница

Определение 3.2 Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$.

Цепочку $Ch(n, C_m, A, B)$, где A, B – смежные вершины цикла C_m, назовём **Гусеницей** и будем обозначать $\boldsymbol{CP(n,m)}$ (*англ.* Caterpillar – гусеница).



Вершинные характеристики Гусеницы

Теорема 3.2

Пусть $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{m} \geq \mathbf{3}$, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{C_m})$, $\boldsymbol{AB} \in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{C_m})$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$ – *вершинные характеристики Звена* $(\boldsymbol{C_m}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.
Тогда

$$\boldsymbol{a} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{X_{m-1}},$$

$$\boldsymbol{c} = \begin{cases} \mathbf{1}, \boldsymbol{m} = \mathbf{3}, \\ \boldsymbol{X_{m-4}}, \boldsymbol{m} \geq \mathbf{4} \end{cases}, \quad \boldsymbol{d} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{e} = \begin{cases} \mathbf{0}, \boldsymbol{m} = \mathbf{3}, \\ \mathbf{1}, \boldsymbol{m} = \mathbf{4}, \\ \boldsymbol{e} = \boldsymbol{X_{m-5}}, \boldsymbol{m} \geq \mathbf{5} \end{cases}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{cases} \mathbf{0}, \boldsymbol{m} \in \{\mathbf{3}; \mathbf{4}\}, \\ \mathbf{1}, \boldsymbol{m} = \mathbf{5}, \\ \boldsymbol{X_{m-6}}, \boldsymbol{m} \geq \mathbf{6} \end{cases},$$

где $\boldsymbol{X_i}$ *удовлетворяет* (3.1).

Теорема 3.3

Пусть $\boldsymbol{n, m} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{m \geq 3}$. *Тогда число* $\boldsymbol{S_n}$ *минимальных вершинных покрытий Гусеницы* $\boldsymbol{CP(n, m)}$ *определяется рекуррентно*:

$$\boldsymbol{S_n = (X_{m-2} + X_{m-5})S_{n-1} +}$$

$$\boldsymbol{+\left(X_{m-1}^2 + X_{m-3}X_{m-4} - X_{m-2}X_{m-5}\right)S_{n-2} +}$$

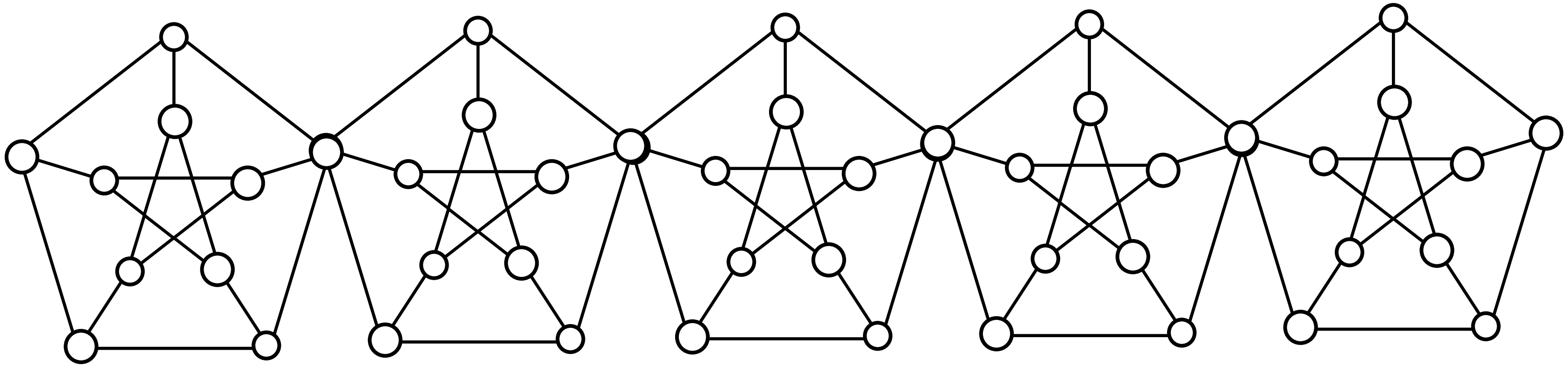
$$\boldsymbol{+X_{m-1}^2 X_{m-6} \cdot S_{n-3}, n \geq 3,}$$

$$\boldsymbol{S_0 = 1, S_1 = 2X_{m-1} + X_{m-4},}$$

$$\boldsymbol{S_2 = 2X_{m-1}^2 + X_{m-4}^2 + 2X_{m-4}X_{m-5} + 2X_{m-1}X_{m-2},}$$

где $\boldsymbol{X_i}$ *удовлетворяет* (3.1).

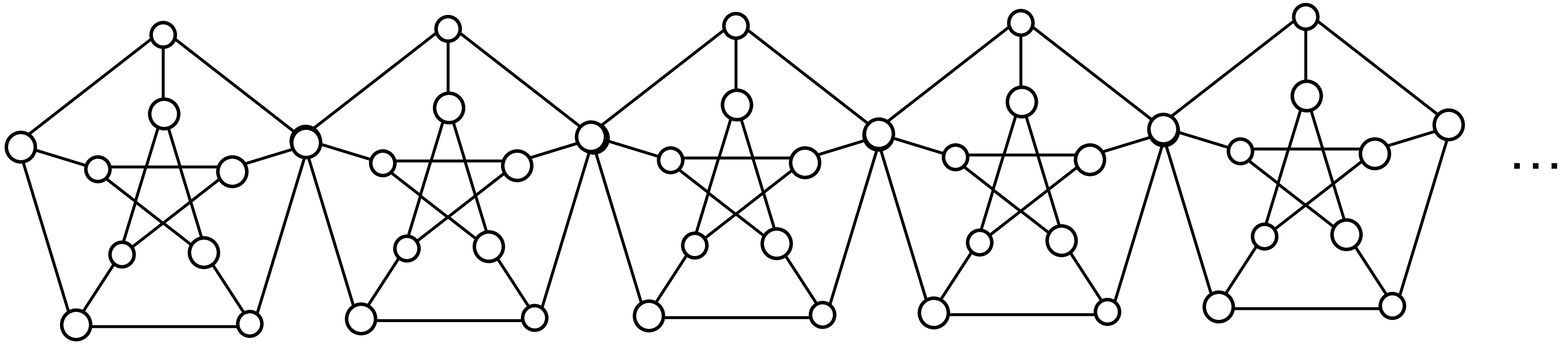
Глава 4. Цепочки Петерсена



…

Цепочка Петерсена

Определение 4.1 Пусть $G(5,2)$ – граф Петерсена.
Цепочку $Ch(n,\ G(5,2),\ A,B)$, где A,B – несмежные вершины $G(5,2)$, назовём **Цепочкой Петерсена** и будем обозначать $\boldsymbol{Ch(n,\ G(5,2))}$.



Вершинные характеристики графа Петерсена

Теорема 4.1

Пусть $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$ *– вершинные характеристики Звена* $(\boldsymbol{G}(\mathbf{5}, \mathbf{2}), \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$*, при этом* $\boldsymbol{AB} \notin \boldsymbol{E}(\boldsymbol{G}(\mathbf{5}, \mathbf{2}))$**.**

Тогда $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{3}$, $\boldsymbol{c} = \mathbf{7}$, $\boldsymbol{d} = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{e} = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$.

О числе миниальных вершинных покрытий Цепочки Петерсена

Теорема 4.2

Пусть $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. *Тогда число* $\boldsymbol{S_n}$ *минимальных вершинных покрытий Цепочки Петерсена* $Ch(n, G(5,2))$ *определяется рекуррентно:*

$$\boldsymbol{S_n = 11S_{n-1} - 4S_{n-2} + 3S_{n-3},\ n \geq 3.}$$

$$\boldsymbol{S_0 = 1, S_1 = 15, S_2 = 165}.$$

Заключение

В данной работе нами были исследованы два ярких представителя Цепочек: **Граф Гусеница** и **Цепочка Петерсена**.

В Главе 1 приведены понятия Звена графа и его вершинных характеристик, а также даны определения хорошей, *O*-почти хорошей и *AB*-почти хорошей раскрасок графа. Ключевым является утверждение, доказанное в Теореме 1.2: **количество хороших раскрасок графа в точности совпадает с числом его минимальных вершинных покрытий.**

В Главе 2 содержится основной результат по Цепочкам –
формула для нахождения числа минимальных вершинных покрытий Цепочки (Теорема 2.1).

Коэффициенты данной формулы зависят от вершинных характеристик Звеньев. Указанный результат был получен ранее в [2].

Заключение

В Главах 3-4 найдены точные значения вершинных характеристик Звеньев, основой которых выступает

цикл с концами в смежных вершинах (Теорема 3.2) и

граф Петерсена с концами в несмежных вершинах (Теорема 4.1).

В Главах 3-4 также установлены рекуррентные формулы для нахождения числа минимальных вершинных покрытий

графа Гусеницы (Теорема 3.3) и

Цепочки Петерсена (Теорема 4.2).

Замечание

Если граф не содержит циклов C_3 и изолированных вершин, то каждое минимальное вершинное покрытие этого графа является минимальным окрестностным множеством, и наоборот.

Поэтому результаты нашей работы для Цепочки Петерсена и графа $CP(n, m)$ при $m \geq 4$ могут быть перенесены на минимальные окрестностные множества.

Направления исследования

1. Нахождение числа минимальных вершинных покрытий Цепочек второго рода, получаемых путём замыкания Цепочек в цикл;

2. Расширение подклассов Цепочек за счёт изучения новых видов Звеньев.

Источники

1. Задача 13 «Окрестностные множества в графах» // РТЮМ-2018.

2. Листопадов М.В., Пасмурцев Е.С., Калугин П.Д. Вершинные покрытия графов // Доклад на XXV республиканском конкурсе работ исследовательского характера учащихся.

3.https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B0%D1%84_%D0%9F%D0%B5%D1%82%D0%B5%D1%80%D1%81%D0%B5%D0%BD%D0%B0

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!

О числе минимальных вершинных покрытий Цепочки

Авторы работы:

Листопадов Матвей Викторович,

учащийся 10 класса СШ №30 г.Гомеля,

Калугин Павел Дмитриевич,

учащийся 8 класса СШ №30 г.Гомеля,

Пасмурцев Егор Сергеевич,

учащийся 10 класса СШ №30 г.Гомеля.

Руководитель:

Довженок Татьяна Степановна,

кандидат физико-математических наук,

учитель математики СШ № 30 г.Гомеля