

§ 12. Функцияның нүктедегі шегі туралы ұғым және функцияның үзіліссіздігі

Тақырыпты оқытудың мақсаты:

- оқушыларға функцияның шегі, оның үзіліссіздігі ұғымдарын менгерту;
- оқушылардың бойында функцияның шегін табу және оны үзіліссіздікке зерттеу білік, дағдыларын қалыптастыру.

МЫСАЛ

1. $y = f(x)$ функциясының x нүктесі 2-ге үмтүлғандағы ($x \rightarrow 2$) шегін анықтайық: а) $f(x) = 1 + x^2$; ə) $f(x) = \frac{x+2}{x}$.

Шешуі. $x = 2$ нүктесі функцияның анықталу облысына тиісті болғандықтан, оның $x = 2$ нүктесіндегі шегін табу үшін функцияның осы нүктедегі мәнін есептейміз: а) $f(2) = 1 + 2^2 = 5$; ə) $f(2) = \frac{2+2}{2} = 2$.

Сонымен, x аргументі үмтүллатын сан $f(x)$ функциясының анықталу облысына тиісті болса, онда оның сол нүктедегі мәні функцияның шектік мәні болып табылады.

Осы тұжырымды былай жазуға болады:

егер $x \rightarrow x_0$ болса, онда $f(x) \rightarrow f(x_0)$.

Функцияның шегін оның анықталу облысына тиісті емес нүктелерде табу қажет болатын жағдайлар да кездеседі. Бұл жағдайда $x \rightarrow x_0$, $f(x) \rightarrow a$, мұндағы a — нақты сан.

a саны табылмауда мүмкін, онда функцияның $x = x_0$ нүктесінде шегі жоқ дейді.

$f(x_0)$ және a мәндері x_0 нүктедегі функцияның шектік мәндері деп айтылады.

МЫСАЛ

2. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ функциясының $x \rightarrow 2$ нүктесіне үмтүлғандағы шектік мәнін табайық.

Шешуі. $x = 2$ нүктесі функциялардың анықталу облыстарына тиісті емес. Сондықтан $x \rightarrow 2$ үмтүлғандағы функциялардың шегін табу үшін оларды түрлендіреміз:

$$a) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2, \text{ осыдан } f(2) = 2 + 2 = 4.$$

ТУСІНДІРІҢДЕР

$x \rightarrow 2$ үмтүлғанда функцияның шегі қалай табылған?

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x + 3}{x + 2}, \quad f(2) = \frac{2 + 3}{2 + 2} = \frac{5}{4}.$$

Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде анықталған және $x \rightarrow x_0$ үмтүлғанда функцияның шектік мәні x_0 нүктесіндегі мәніне тең болса, онда функция x_0 нүктесінде ціліссіз функция деп аталады.

Анықтамадағы x_0 нүктесін функцияның ціліссіздік нүктесі деп атайды.

Үзіліссіз функцияның анықтамасынан шығатын үш жағдайға тоқталаібыз:

- 1) $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде анықталған болады;
- 2) x_0 нүктесінде функцияның шегі болуы керек;
- 3) функцияның шектік мәні x_0 нүктесіндегі мәніне тең, яғни $x \rightarrow x_0$ үмтүлғанда $f(x) \rightarrow f(x_0)$.

Егер $y = f(x)$ функциясы үзіліссіз болса, онда оның графигі тұтас қисық болады.

Нүктедегі үзіліссіз функциялардың қасиеттері:

егер $f(x)$ және $\phi(x)$ функциялары x_0 нүктесінде үзіліссіз функциялар болса, онда олардың қосындысы $f(x) + \phi(x)$, көбейтіндіci $f(x) \cdot \phi(x)$ және бөліндіci $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ ($\phi(x_0) \neq 0$) x_0 нүктесінде үзіліссіз функциялар болады.

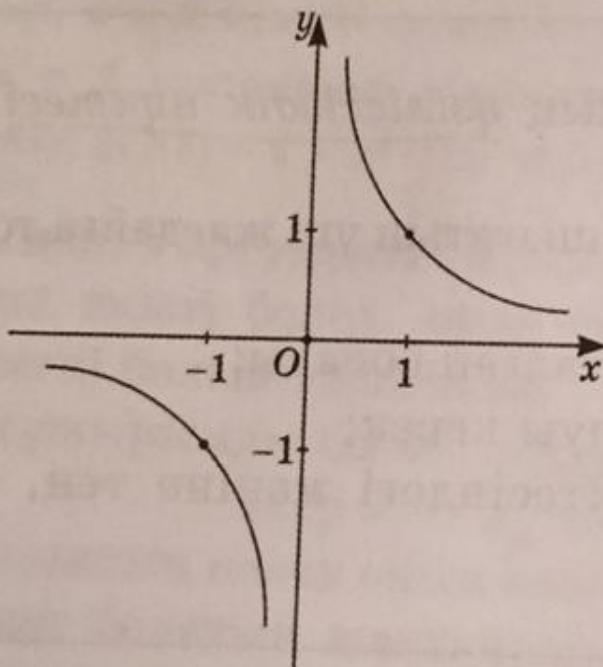
Егер $f(x)$ функциясы X жиынының кез келген нүктесінде үзіліссіз болса, онда оны осы X жиынында (кесіндіде) үзіліссіз функция деп атайды.

Кесіндідегі үзіліссіз функциялардың қасиеттері:

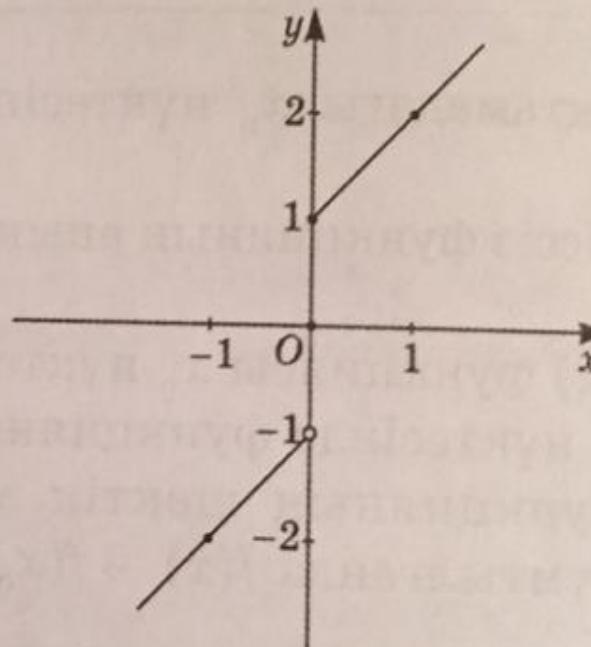
- 1) егер $[a; b]$ кесіндісінде функция үзіліссіз және нөлге айналмайтын болса, онда осы интервалда тұрақты таңбасын сақтайды;
- 2) егер $y = f(x)$ функциясы $x \in [a; b]$ кесіндісінде үзіліссіз функция болса, онда: а) осы кесіндіде шектелген функция болады; ә) осы кесіндіде функция өзінің ең үлкен және ең кіші мәндерін қабылдайды, яғни $t \leq f(x) \leq M$, мұндағы t — функцияның ең кіші, ал M — функцияның ең үлкен мәні;
- 3) егер $y = f(x)$ функциясы $x \in [a; b]$ кесіндісінде үзіліссіз функция болса және оның шеткі нүктелерінде әртүрлі таңбалы мәндер қабылдаса, онда $[a; b]$ кесіндісінің ішінде функция ең болмаганда бір нүктеде нөлге айналады.

МЫСАЛ

3. $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясын алайық. Бұл функция сендерге белгілі кері пропорционалдық төуелділік. Функцияның анықталу облысы нөлден басқа барлық нақты сандар жиыны. Демек, $x = 0$ нүктесі функцияның үзіліс нүктесі, яғни функция — үзілісті функция. Оны функцияның графигінен көруге болады (48-сурет).



48-сурет



49-сурет

МЫСАЛ

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{егер } x \geq 0, \\ x - 1, & \text{егер } x < 0 \end{cases} \quad \text{функцияның графигін салып,}$$

$x = 0$ нүктесінде функцияның үзіліссіз болмайтынын анықтайык.

Шешуі. Функция екі формуламен берілген: $g(x) = x + 1$, $x \geq 0$ және $\phi(x) = x - 1$, $x < 0$. Бұл екі функцияның графигі де түзу болады. Сондықтан $g(x) = x + 1$ функциясы үшін $x \geq 0$, ал $\phi(x) = x - 1$, $x < 0$ болғанда екі нүктенің координатасын анықтайдыз. Сонда бірінші жағдайда $(0; 1)$, $(1; 2)$ және екінші жағдайда $(-1; -2)$, $(-0,5; -1,5)$ нүктелері арқылы өтетін түзулерді саламыз (49-сурет). Суреттен көріп отырғанымыздай, берілген функцияның графигі тұтас қисық емес. Демек, $x = 0$ нүктесінде функция үзілісті болады.

$$x \rightarrow -2, f(x) = \frac{4x - x^3}{2x^2 + 3x - 2} \text{ функциясының шекті мәнін табындар.}$$

Шешуі. Берілген функцияның анықталу облысын табайық. Ол үшін $2x^2 + 3x - 2 = 0$ теңдеуін шешіп, оның түбірлерін нақты сандар жиынтынан алыш тастаймыз. Теңдеудің түбірлері $-2; -\frac{1}{2}$. Сонда

$$D(f) = (-\infty; -2) \cup \left(-2; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right). \quad x = -2 \text{ анықталу}$$

облысына кірмейді. Сондықтан функцияның шектік мәнін табу үшін бөлшек-рационал өрнектің алымы мен бөлімін түрлендіреміз:

$$\frac{4x - x^3}{2x^2 + 3x - 2} = \frac{x(2-x)(2+x)}{2 \cdot (x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \frac{x(2-x)}{2x-1}.$$

$x \rightarrow -2$ кезіндегі функцияның шектік мәнін табамыз:

$$f(-2) = \frac{-2(2+2)}{2 \cdot (-2) - 1} = \frac{8}{5}.$$

$$y = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$$

төндөр.

Шешуі. Функция бөлшек-рационал өрнегі түрінде берілген. Бөлшектің бөлімін нөлге айналдыратын x -тің мәнін табайық: $x^2 + 2x + 1 = 0$ немесе $(x + 1)^2 = 0$, $x = -1$.

Функцияның анықталу облысы $x = -1$ санынан басқа нақты сандар жиыны. Функция $x = -1$ нүктесінде анықталмаған, сондықтан осы нүктеде оның мәні жоқ. Олай болса, осы нүктеде функция үзіліссіздігінің бірінші белгісі орындалмайды. Осыдан функция үзілісті деген корытынды шығады.

A-ның қандай мәнінде

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x - 2}{9x^2 - 4}, & \text{егер } x \neq \frac{2}{3}, \\ A, & \text{егер } x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

функциясы үзіліссіз болады?

Шешуі. Берілген функцияның $x \rightarrow \frac{2}{3}$ кезіндегі шектік мәнін табайық:

$$f(x) = \frac{3x - 2}{9x^2 - 4} = \frac{3x - 2}{(3x - 2)(3x + 2)} = \frac{1}{3x + 2}, \text{ сонда } x \rightarrow \frac{2}{3} \text{ кезінде}$$

$$\frac{1}{3 \cdot \frac{2}{3} + 2} = \frac{1}{4} \text{ аламыз.}$$

Осыдан $A = \frac{1}{4}$ болғанда берілген функцияның $x = \frac{2}{3}$ нүктесіндегі үзіліссіздігі шығады.