§ 12. Функцияның нүктедегі шегі туралы ұғым және функцияның үзіліссіздігі

Тақырыпты оқытудың мақсаты:

— оқушыларға функцияның *шегі, оның үзіліссіздігі* ұғымдарын меңгерту;

— оқушылардың бойында функцияның шегін табу және оны үзіліссіздікке зерттеу білік, дағдыларын қалыптастыру.

МЫСАЛ **1.** $y = f(x)$ функциясының x нүктесі 2-ге ұмтылғандағы ($x \to 2$) шегін анықтайық: а) $f(x) = 1 + x^2$; ә) $f(x) = \frac{x+2}{x}$.

Шешуі. $x = 2$ нүктесі функцияның анықталу облысына тиісті болғандықтан, оның $x = 2$ нүктесіндегі шегін табу үшін функцияның осы нүктедегі мәнін есептейміз: а) $f(2) = 1 + 2^2 = 5$; ә) $f(2) = \frac{2+2}{2} = 2$.

Сонымен, x аргументі ұмтылатын сан $f(x)$ функциясының анықталу облысына тиісті болса, онда оның сол нүктедегі мәні функцияның шектік мәні болып табылады.

Осы тұжырымды былай жазуға болады:

$$\text{егер } x \to x_0 \text{ болса, онда } f(x) \to f(x_0).$$

Функцияның шегін оның анықталу облысына тиісті емес нүктелерде табу қажет болатын жағдайлар да кездеседі. Бұл жағдайда $x \to x_0$, $f(x) \to a$, мұндағы a — нақты сан.

a саны табылмауы да мүмкін, онда функцияның $x = x_0$ нүктесінде шегі жоқ дейді.

$f(x_0)$ және a мәндері x_0 нүктедегі *функцияның шектік мәндері* деп айтылады.

МЫСАЛ 2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ функциясының $x \to 2$ нүктесіне ұмтылғандағы шектік мәнін табайық.

Шешуі. $x = 2$ нүктесі функциялардың анықталу облыстарына тиісті емес. Сондықтан $x \to 2$ ұмтылғандағы функциялардың шегін табу үшін оларды түрлендіреміз:

а) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$, осыдан $f(2) = 2 + 2 = 4$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$x \to 2$ ұмтылғанда функцияның шегі қалай табылған?

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x + 3}{x + 2}, \quad f(2) = \frac{2 + 3}{2 + 2} = \frac{5}{4}.$$

*Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде анықталған және $x \to x_0$ ұмтылғанда функцияның шектік мәні x_0 нүктесіндегі мәніне тең болса, онда функция **x_0 нүктесінде үзіліссіз функция** деп аталады.*

Анықтамадағы x_0 нүктесін функцияның *үзіліссіздік нүктесі* деп атайды.

Үзіліссіз функцияның анықтамасынан шығатын үш жағдайға тоқталайық:

1) $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде анықталған болады;

2) x_0 нүктесінде функцияның шегі болуы керек;

3) функцияның шектік мәні x_0 нүктесіндегі мәніне тең, яғни $x \to x_0$ ұмтылғанда $f(x) \to f(x_0)$.

Егер $y = f(x)$ функциясы үзіліссіз болса, онда оның графигі тұтас қисық болады.

Нүктедегі үзіліссіз функциялардың қасиеттері:

егер $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары x_0 нүктесінде үзіліссіз функциялар болса, онда олардың қосындысы $f(x) + \varphi(x)$, көбейтіндісі $f(x) \cdot \varphi(x)$ және бөліндісі $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ $(\varphi(x_0) \neq 0)$ x_0 нүктесінде үзіліссіз функциялар болады.

Егер $f(x)$ функциясы X жиынының кез келген нүктесінде үзіліссіз болса, онда оны осы X жиынында (кесіндіде) ***үзіліссіз функция*** *деп атайды.*

Кесіндідегі үзіліссіз функциялардың қасиеттері:

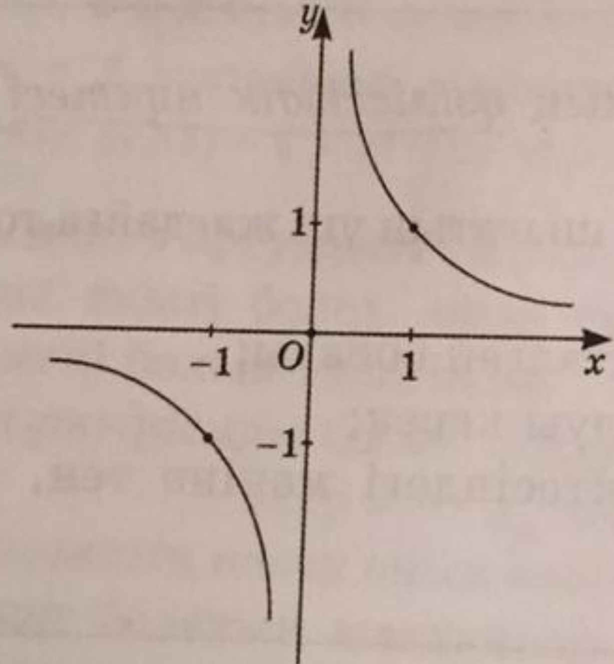
1) *егер* $[a; b]$ *кесіндісінде функция үзіліссіз және нөлге айналмайтын болса, онда ол осы интервалда тұрақты таңбасын сақтайды;*

2) *егер* $y = f(x)$ *функциясы* $x \in [a; b]$ *кесіндісінде үзіліссіз функция болса, онда: а) осы кесіндіде шектелген функция болады; ә) осы кесіндіде функция өзінің ең үлкен және ең кіші мәндерін қабылдайды, яғни* $m \leqslant f(x) \leqslant M$, *мұндағы* m *— функцияның ең кіші, ал* M *— функцияның ең үлкен мәні;*

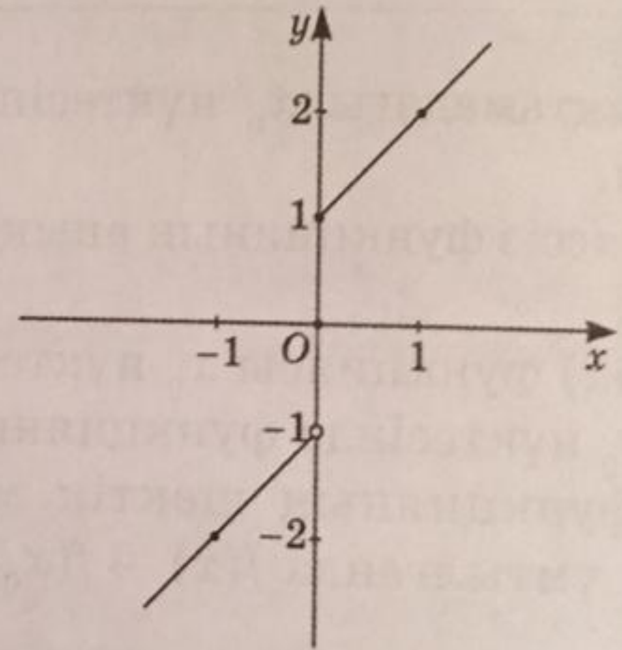
3) *егер* $y = f(x)$ *функциясы* $x \in [a; b]$ *кесіндісінде үзіліссіз функция болса және оның шеткі нүктелерінде әртүрлі таңбалы мәндер қабылдаса, онда* $[a; b]$ *кесіндісінің ішінде функция ең болмағанда бір нүктеде нөлге айналады.*

МЫСАЛ

3. $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясын алайық. Бұл функция сендерге белгілі кері пропорционалдық тәуелділік. Функцияның анықталу облысы нөлден басқа барлық нақты сандар жиыны. Демек, $x = 0$ нүктесі функцияның үзіліс нүктесі, яғни функция — үзілісті функция. Оны функцияның графигінен көруге болады (48-сурет).



48-сурет



49-сурет

МЫСАЛ

4. $f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ егер } x \geqslant 0, \\ x - 1, \text{ егер } x < 0 \end{cases}$ функциясының графигін салып, $x = 0$ нүктесінде функцияның үзіліссіз болмайтынын анықтайық.

Шешуі. Функция екі формуламен берілген: $g(x) = x + 1$, $x \geqslant 0$ және $\varphi(x) = x - 1$, $x < 0$. Бұл екі функцияның графигі де түзу болады. Сондықтан $g(x) = x + 1$ функциясы үшін $x \geqslant 0$, ал $\varphi(x) = x - 1$, $x < 0$ болғанда екі нүктенің координатасын анықтаймыз. Сонда бірінші жағдайда $(0; 1)$, $(1; 2)$ және екінші жағдайда $(-1; -2)$, $(-0,5; -1,5)$ нүктелері арқылы өтетін түзулерді саламыз (49-сурет). Суреттен көріп отырғанымыздай, берілген функцияның графигі тұтас қисық емес. Демек, $x = 0$ нүктесінде функция үзілісті болады.

[redacted] $x \to -2,\ f(x) = \dfrac{4x - x^3}{2x^2 + 3x - 2}$ функциясының шекті мәнін табыңдар.

Шешуі. Берілген функцияның анықталу облысын табайық. Ол үшін $2x^2 + 3x - 2 = 0$ теңдеуін шешіп, оның түбірлерін нақты сандар жиынынан алып тастаймыз. Теңдеудің түбірлері $-2;\ -\frac{1}{2}$. Сонда

$D(f) = (-\infty; -2) \cup \left(-2; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. $x = -2$ анықталу облысына кірмейді. Сондықтан функцияның шектік мәнін табу үшін бөлшек-рационал өрнектің алымы мен бөлімін түрлендіреміз:

$$\frac{4x - x^3}{2x^2 + 3x - 2} = \frac{x(2 - x)(2 + x)}{2 \cdot (x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \frac{x(2 - x)}{2x - 1}.$$

$x \to -2$ кезіндегі функцияның шектік мәнін табамыз:

$$f(-2) = \frac{-2(2 + 2)}{2 \cdot (-2) - 1} = \frac{8}{5}.$$

[redacted] $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 1}$ функциясын үзіліссіздікке зерттеңдер.

Шешуі. Функция бөлшек-рационал өрнегі түрінде берілген. Бөлшектің бөлімін нөлге айналдыратын x-тің мөнін табайық: $x^2 + 2x + 1 = 0$ немесе $(x + 1)^2 = 0$, $x = -1$.

Функцияның анықталу облысы $x = -1$ санынан басқа нақты сандар жиыны. Функция $x = -1$ нүктесінде анықталмаған, сондықтан осы нүктеде оның мәні жоқ. Олай болса, осы нүктеде функция үзіліссіздігінің бірінші белгісі орындалмайды. Осыдан *берілген функция үзілісті* деген қорытынды шығады.

[redacted] A-ның қандай мәнінде

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x-2}{9x^2-4}, & \text{егер } x\neq\dfrac{2}{3},\\ A, & \text{егер } x=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$ функциясы үзіліссіз болады?

Шешуі. Берілген функцияның $x\to\dfrac{2}{3}$ кезіндегі шектік мәнін табайық:

$$f(x)=\frac{3x-2}{9x^2-4}=\frac{3x-2}{(3x-2)(3x+2)}=\frac{1}{3x+2},$$ сонда $x\to\dfrac{2}{3}$ кезінде

$$\frac{1}{3\cdot\dfrac{2}{3}+2}=\frac{1}{4}$$ аламыз.

Осыдан $A=\dfrac{1}{4}$ болғанда берілген функцияның $x=\dfrac{2}{3}$ нүктесіндегі үзіліссіздігі шығады.