Линейная алгебра

Матрицы. Основные определения

Определение:

Прямоугольная таблица чисел, заключенная в круглые скобки и содержащая m горизонтальных строк и n вертикальных столбцов, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A = (a_{ij})_{m \times n}$$

называется *матрицей* A, где a_{ij} — *элемент матрицы* (i — номер строки; j — номер столбца), произведение $m \times n$ числа строк на число столбцов называют *размером* *матрицы* A

Замечание:

Матрицы обозначают заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, …, элементы матрицы соответственно строчными буквами с двойной индексацией a_{ij}, где i — номер строки; j — номер столбца.

Пример:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ элемент $a_{12} = 2$, элемент $a_{23} = 6$

Определение:

Две матрицы A и B одинаковой размерности называются *равными между собой* $A = B$, если все соответствующие их элементы равны, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$

Замечание:

Матрицы разных размерностей не сравниваются между собой.

Виды матриц

1. Матрица, у которой одна строка называется *матрицей-строкой*.

Пример: $D = (5 \quad 6 \quad 3 \quad -7)$.

2. Матрица, у которой один столбец называется *матрицей-столбцом*.

Пример: $K = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

3. Матрица, у которой количество строк равно количеству столбцов $(m = n)$ называется *квадратной матрицей n-го порядка*

Пример: $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ — квадратная матрица второго порядка,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ — квадратная матрица третьего порядка.

Определение:

Элементы a_{11}, a_{22}, a_{33}, …, a_{nn} квадратной матрицы образуют ее *главную диагональ*, а элементы a_{1n}, $a_{2(n-1)}$, …, a_{n1} — *побочную диагональ*.

Пример: $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ элементы 1; 5; 9 образуют главную диагональ, элементы 7; 5; 3 — побочную диагональ.

Определение:

Матрица A^T называется *транспонированной матрицей* к матрице A, если в исходной матрице поменять местами строки и столбцы.

Пример: $D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $D^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ -2 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

4. *Нулевой* называется матрица произвольного размера, все элементы которой равны нулю:

Пример: $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ — нулевые матрицы второго и третьего порядка.

5. *Диагональной матрицей* называется квадратная матрица, у которой все элементы, не лежащие на главной диагонали, равны нулю

Пример: $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&9\end{pmatrix}$.

6. *Единичной матрицей* называется диагональная матрица, у которой элементы, лежащие на главной диагонали равны единице

Пример: $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ соответственно второго и третьего порядка.

7. *Симметричной матрицей* называется квадратная матрица, у которой элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны:

Пример: $C=\begin{pmatrix}1&-5&-7\\-5&2&-9\\-7&-9&3\end{pmatrix}$ — симметричная матрица.

8. *Кососимметричной матрицей* называется квадратная матрица, у которой элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, противоположны:

Пример: $K = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 5 & 2 & -9 \\ -7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ — кососимметричная матрица.

Замечание: $\left|\dfrac{\text{Для симметричной матрицы } A^T = A.}{\text{Для кососимметричной матрицы } A^T = -A.}\right.$

9. *Треугольной матрицей* называется квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные «под (или над) главной диагональю» равны нулю

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 3 \\ 0 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ — верхняя треугольная матрица;

$B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 \\ -7 & 6 & 4 & 0 \\ 8 & -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ — нижняя треугольная матрица.

10. *Ступенчатой* называется *матрица*, удовлетворяющая следующим условиям:

1. если эта матрица содержит нулевую строку (т.е. строку, все элементы которой равны нулю), то все строки, расположенные под нею, также нулевые;
2. если первый ненулевой элемент некоторой строки расположен в столбце с номером i, то первый ненулевой элемент следующей строки должен находиться в столбце с номером большим, чем i.

Пример:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -4 & 8 & -20\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 7\\ 0 & 1 & -9 & 3\\ 0 & 0 & 5 & 1\end{pmatrix}\quad N=\begin{pmatrix}-5 & 3 & 6 & 7 & -1\\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 13 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

Арифметические операции над матрицами

Линейные операции над матрицами

1. Сумма (разность) матриц

Замечание:

Сложение (*вычитание*) *матриц* определяется только для матриц *одинаковой размерности.*

Определение:

Суммой (*разностью*) двух матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одинакового размера называется матрица C того же размера, каждый элемент которой равен сумме (*разности*) соответствующих элементов матриц A и B, т.е. $C=(c_{ij})$, где $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$

Пример: Найти сумму матриц $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 5 & -1\end{pmatrix}$.

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 5 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3 & 1+2 & -1+1\\ 3+0 & 1+5 & 2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3 & 0\\ 3 & 6 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Умножение матрицы на число

Определение:

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ на число $\lambda \neq 0$ называется матрица, полученная из матрицы A путём умножения *всех её* элементов на число λ.

Пример: Найти произведение матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = 2$.

$$2\cdot A = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \\ 2\cdot 5 & 2\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Пример: Выполнить действия: $2\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$2\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 4 & 10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-3 & -2-6 & 8-9 \\ 4-6 & 10-3 & 0-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -1 \\ -2 & 7 & -12 \end{pmatrix}$$

Замечание 1:

$-1\cdot A = -A;$

$A - B = A + (-B);$

$A + (-A) = O.$

Замечание 2: Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

Нелинейные операции над матрицами

1. Произведение матриц

Замечание:

Произведение матриц A и B возможно только в том случае, *если число столбцов первой матрицы* A *равно числу строк второй матрицы* B

Определение:

Чтобы получить элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце произведения двух матриц, нужно элементы i-й строки первой матрицы умножить на *соответствующие* элементы j-го столбца второй матрицы и полученные произведения сложить.

Замечание:

$A \cdot B \neq B \cdot A$

$E \cdot A = A \cdot E = A$.

Произведение двух ненулевых матриц может дать нулевую матрицу O, например:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

2. Возведение матрицы в степень

Определение:

Целой положительной степенью A^k $(k>1)$ квадратной матрицы A называется произведение k матриц, равных A, т.е. $A^k = \underbrace{A \cdot A \ldots \cdot A}_{k}$.

Замечание:

В общем случае $A^0 = E$; $A^1 = A$.
Операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц.
Из равенства $A^k = O$ не следует, что $A = O$, где O — нулевая матрица.

Определение:

Многочленом степени k (k — целое неотрицательное число) от квадратной матрицы A (*матричным многочленом*) называется выражение вида $P_k(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \ldots + a_2 A^2 + a_1 A^1 + a_0 A^0$, где a_i — любые числа, причем $a_k \neq 0$, $A^0 = E$.

Замечание:

Для матриц *не определены* операции:

- деления;
- возведение в дробную или отрицательную степень.

Пример:

Вычислить произведение матриц: $A=\begin{pmatrix}2&3&4&-5\\1&2&-3&4\\-1&-2&3&1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3&2&1\\4&1&-1\\1&3&2\\2&0&1\end{pmatrix}$

Определим размерность произведения: $A_{3\times4}\cdot B_{4\times3}=C_{3\times3}$

$$C=\begin{pmatrix}2&3&4&-5\\1&2&-3&4\\-1&-2&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2&1\\4&1&-1\\1&3&2\\2&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot3+3\cdot4+4\cdot1+(-5)\cdot2 & 2\cdot2+3\cdot1+4\cdot3+(-5)\cdot0 & 2\cdot1+3\cdot(-1)+4\cdot2+(-5)\cdot1\\ 1\cdot3+2\cdot4+(-3)\cdot1+4\cdot2 & 1\cdot2+2\cdot1+(-3)\cdot3+4\cdot0 & 1\cdot1+2\cdot(-1)+(-3)\cdot2+4\cdot1\\ (-1)\cdot3+(-2)\cdot4+3\cdot1+1\cdot2 & (-1)\cdot2+(-2)\cdot1+3\cdot3+1\cdot0 & (-1)\cdot1+(-2)\cdot(-1)+3\cdot2+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&19&2\\16&-5&-3\\-6&5&8\end{pmatrix}$$

Пример:

Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x)=-2x^2+5x+9$, $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}$.

$f(A)=-2A^2+5A+9E$.

Вычислим $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot3&1\cdot2+2\cdot0\\3\cdot1+0\cdot3&3\cdot2+0\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&2\\3&6\end{pmatrix}$, тогда

$$f(A)=-2A^2+5A+9E=-2\cdot\begin{pmatrix}7&2\\3&6\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}+9\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14&-4\\-6&-12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&10\\15&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9&0\\0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&6\\9&-3\end{pmatrix}$$

Свойства

Сложение матриц	$A+B=B+A$
	$(A+B)+C=A+(B+C)$
	$A+O=O+A=A$
Умножение матрицы на число	$\lambda_1\cdot(\lambda_2\cdot A)=(\lambda_1\cdot\lambda_2)\cdot A$
	$\lambda(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B$
	$(\lambda_1+\lambda_2)\cdot A=\lambda_1\cdot A+\lambda_2\cdot A$
	$1\cdot A=A$
Умножение матриц	$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$
	$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$
	$C\cdot(A+B)=C\cdot A+C\cdot B$
	$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$
Транспонирование матрицы	$(A+B)^T=A^T+B^T$
	$(\lambda A)^T=\lambda A^T$
	$(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$
	$(A^T)^T=A$
Возведение в степень	$A^m\cdot A^k=A^{m+k}$
	$(A^m)^k=A^{mk}$