

Линейная алгебра

Матрицы. Основные определения

Определение:

Прямоугольная таблица чисел, заключенная в круглые скобки и содержащая m горизонтальных строк и n вертикальных столбцов, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A = (a_{ij})_{m \times n}$$

называется *матрицей* A , где a_{ij} — элемент матрицы (i — номер строки, j — номер столбца), произведение $m \times n$ числа строк на число столбцов называют *размером матрицы* A

Замечание:

Матрицы обозначают заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, \dots , элементы матрицы соответственно строчными буквами с двойной индексацией a_{ij} , где i — номер строки; j — номер столбца.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ элемент } a_{12} = 2, \text{ элемент } a_{23} = 6$$

Определение:

Две матрицы A и B одинаковой размерности называются *равными между собой* $A = B$, если все соответствующие их элементы равны, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$

Замечание:

Матрицы разных размерностей не сравниваются между собой.

Виды матриц

1. Матрица, у которой одна строка называется *матрицей-строкой*.

Пример: $D = (5 \ 6 \ 3 \ -7)$.

2. Матрица, у которой один столбец называется *матрицей-столбцом*.

Пример: $K = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

3. Матрица, у которой количество строк равно количеству столбцов ($m = n$) называется *квадратной матрицей n -го порядка*.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ — квадратная матрица второго порядка,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ — квадратная матрица третьего порядка.

Определение:

Элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы образуют ее *главную диагональ*, а элементы $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$ — *побочную диагональ*.

Пример: $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ элементы 1; 5; 9 образуют главную диагональ,
элементы 7; 5; 3 — побочную диагональ.

Определение:

Матрица A^T называется *транспонированной матрицей* к матрице A , если в исходной матрице поменять местами строки и столбцы.

Пример: $D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ -2 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

4. *Нулевой* называется матрица произвольного размера, все элементы которой равны нулю.

Пример: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — нулевые матрицы второго и третьего порядка.

5. *Диагональной матрицей* называется квадратная матрица, у которой все элементы, не лежащие на главной диагонали, равны нулю

Пример: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

6. *Единичной матрицей* называется диагональная матрица, у которой элементы, лежащие на главной диагонали равны единице

Пример: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ соответственно второго и третьего порядка.

7. *Симметричной матрицей* называется квадратная матрица, у которой элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны

Пример: $C = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ -5 & 2 & -9 \\ -7 & -9 & 3 \end{pmatrix}$ — симметричная матрица.

8. *Кососимметричной матрицей* называется квадратная матрица, у которой элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, противоположны:

Пример: $K = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 5 & 2 & -9 \\ -7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ — кососимметричная матрица.

Замечание: $\frac{\text{Для симметричной матрицы } A^T = A.}{\text{Для кососимметричной матрицы } A^T = -A.}$

9. *Треугольной матрицей* называется квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные «под (или над) главной диагональю» равны нулю

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 3 \\ 0 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ — верхняя треугольная матрица;

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 \\ -7 & 6 & 4 & 0 \\ 8 & -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ — нижняя треугольная матрица.}$$

10. *Ступенчатой* называется *матрица*, удовлетворяющая следующим условиям:

1. если эта матрица содержит нулевую строку (т.е. строку, все элементы которой равны нулю), то все строки, расположенные под нею, также нулевые;
2. если первый ненулевой элемент некоторой строки расположен в столбце с номером i , то первый ненулевой элемент следующей строки должен находиться в столбце с номером большим, чем i .

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 6 & 7 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Арифметические операции над матрицами

Линейные операции над матрицами

1. Сумма (разность) матриц

Замечание:

Сложение (вычитание) матриц определяется только для матриц одинаковой размерности.

Определение:

Суммой (разностью) двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера называется матрица C того же размера, каждый элемент которой равен сумме (разности) соответствующих элементов матриц A и B , т.е. $C = (c_{ij})$, где $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

Пример: Найти сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 1+2 & -1+1 \\ 3+0 & 1+5 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Умножение матрицы на число

Определение:

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число $\lambda \neq 0$ называется матрица, полученная из матрицы A путём умножения всех её элементов на число λ .

Пример: Найти произведение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = 2$.

$$2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Пример: Выполнить действия: $2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 4 & 10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-3 & -2-6 & 8-9 \\ 4-6 & 10-3 & 0-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -1 \\ -2 & 7 & -12 \end{pmatrix}$$

Замечание 1:
$$\begin{array}{l} -1 \cdot A = -A; \\ \hline A - B = A + (-B); \\ \hline A + (-A) = O. \end{array}$$

Замечание 2: Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

Нелинейные операции над матрицами

1. Произведение матриц

Замечание:

Произведение матриц A и B возможно только в том случае, если число столбцов первой матрицы A равно числу строк второй матрицы B

Определение:

Чтобы получить элемент, стоящий в i -й строке и j -м столбце произведения двух матриц, нужно элементы i -й строки первой матрицы умножить на соответствующие элементы j -го столбца второй матрицы и полученные произведения сложить.

Замечание:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

$$E \cdot A = A \cdot E = A.$$

Произведение двух ненулевых матриц может дать нулевую матрицу O , например:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

2. Возведение матрицы в степень

Определение:

Целой положительной степенью A^k ($k > 1$) квадратной матрицы A называется произведение k матриц, равных A , т.е. $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_k$.

Замечание:

В общем случае $A^0 = E$; $A^1 = A$.

Операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц.

Из равенства $A^k = O$ не следует, что $A = O$, где O — нулевая матрица.

Определение:

Многочленом степени k (k — целое неотрицательное число) от квадратной матрицы A (матричным многочленом) называется выражение вида

$P_k(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \dots + a_2 A^2 + a_1 A^1 + a_0 A^0$, где a_i — любые числа, причем $a_k \neq 0$, $A^0 = E$.

Замечание:

Для матриц не определены операции:

- деления;
- возведение в дробную или отрицательную степень.

Пример:

Вычислить произведение матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определим размерность произведения: $A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 3} = C_{3 \times 3}$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + (-5) \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + (-5) \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 3 + (-2) \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 0 & (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 19 & 2 \\ 16 & -5 & -3 \\ -6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Пример:Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x) = -2x^2 + 5x + 9$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$f(A) = -2A^2 + 5A + 9E.$$

$$\text{Вычислим } A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \text{ тогда}$$

$$f(A) = -2A^2 + 5A + 9E = -2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$$

Свойства

Сложение матриц	$A + B = B + A$
	$(A + B) + C = A + (B + C)$
	$A + O = O + A = A$
Умножение матрицы на число	$\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot A) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot A$
	$\lambda(A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
	$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot A = \lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot A$
	$1 \cdot A = A$
Умножение матриц	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
	$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
	$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$
	$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
Транспонирование матрицы	$(A + B)^T = A^T + B^T$
	$(\lambda A)^T = \lambda A^T$
	$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
	$(A^T)^T = A$
Возведение в степень	$A^m \cdot A^k = A^{m+k}$
	$(A^m)^k = A^{mk}$