Решение алгебраических и трансцендентных уравнений

Нелинейные уравнения f(x)=0

Алгебраические уравнения

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

$$4x^3 - 7x + 5 = 0$$

Трансцендентные уравнения

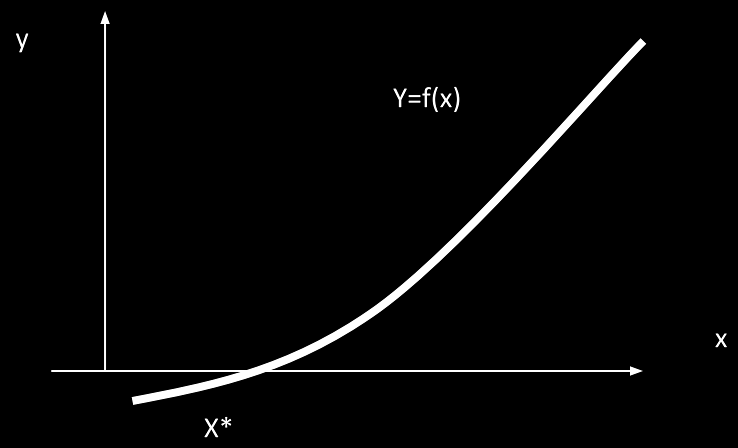
$$x - 10\sin x = 0$$

$$2^x - 2\cos x = 0$$

$$\lg(x+5) = \cos x$$

- корень уравнения $f(x)=0$ – это ....

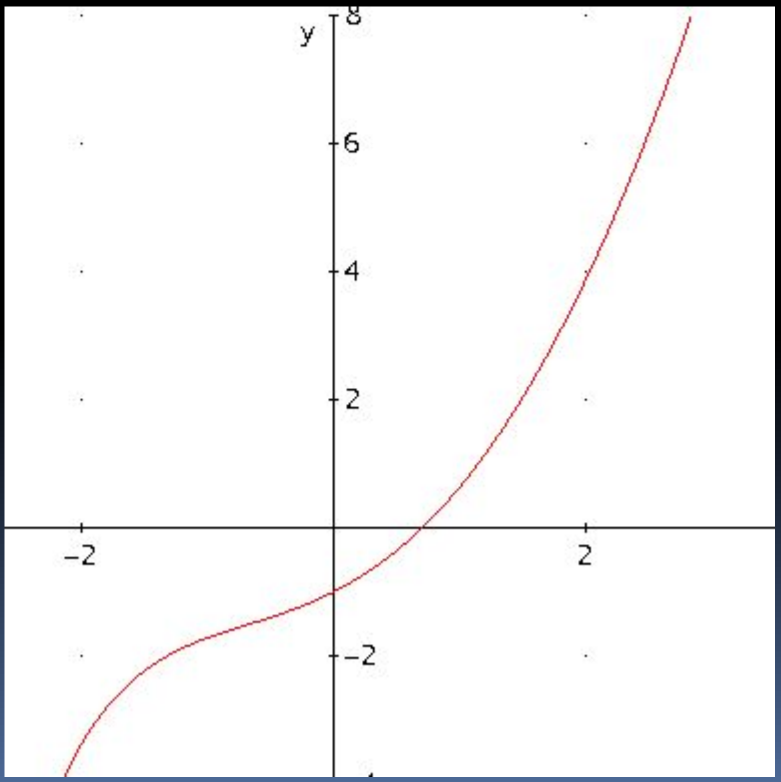
$\boxed{\text{число } x^*, \text{ если } f(x^*)=0}$



<u>Пример</u> $x^2 - e^{-x} = 0$

-

$f(x) = x^2 - e^{-x}$



- корень k-й кратности уравнения f(x)=0 – это

число x*, если при x=x* вместе с функцией f(x) равны нулю ее производные до (k-1) порядка включительно:

$$f(x^*) = f'(x^*) = \ldots = f^{(k-1)}(x^*) = 0$$

k=1 – однократный или *простой* корень уравнения f(x)=0

- приближенное значение корня уравнения $f(x)=0$ с погрешностью *e*

число x , если $|x-x^*|<e$

Этапы решения нелинейного уравнения f(x)=0:

1 Постановка задачи

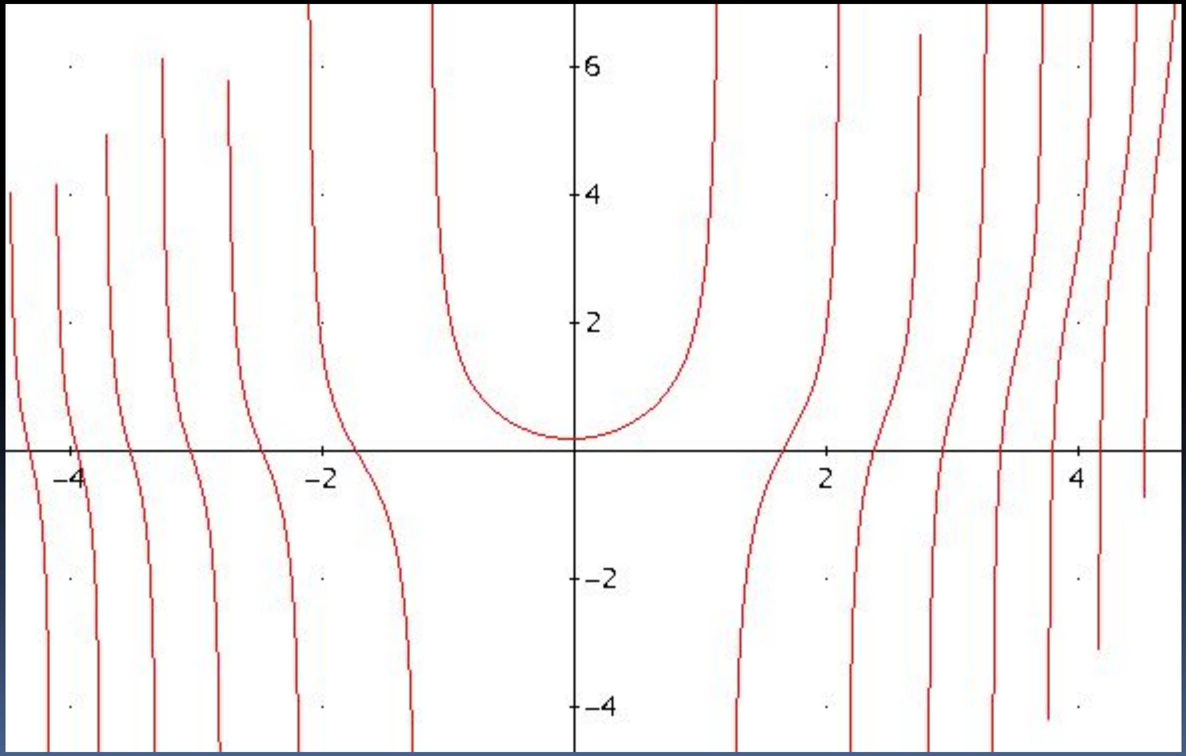
2 Отделение корня

3 Уточнение корня

4 Анализ полученного результата

1 Постановка задачи

Пример. $tg(x^2-3)+e^{x-3}=0$



Определение числа корней алгебраических уравнений

- общее число корней

- число положительных корней

- число отрицательных корней

Пример: $$x^6 - 17x^4 + 12x^3 + 7x^2 - x + 1 = 0$$

Общее число корней : 6 корней

число положительных корней : +, -, +, +, -, + 4 либо 2 либо 0

число отрицательных корней :

$$P_6(-x) = (-x)^6 - 17(-x)^4 + 12(-x)^3 + 7(-x)^2 - (-x) + 1 =$$
$$= x^6 - 17x^4 - 12x^3 + 7x^2 + x + 1$$

+, -, -, +, +, + 2 либо 0

2 Отделение корней

[a, b] – интервал неопределенности

1 Графический метод

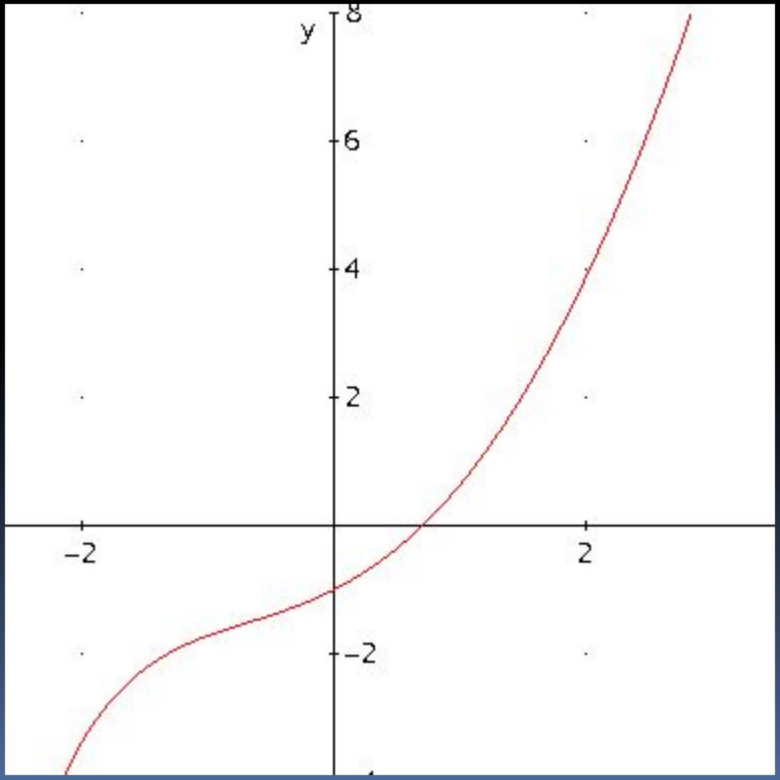
$y=f(x)$

Пример.

$x^2 - e^{-x} = 0$

$f(x) = x^2 - e^{-x}$

[a, b] =[0,2]



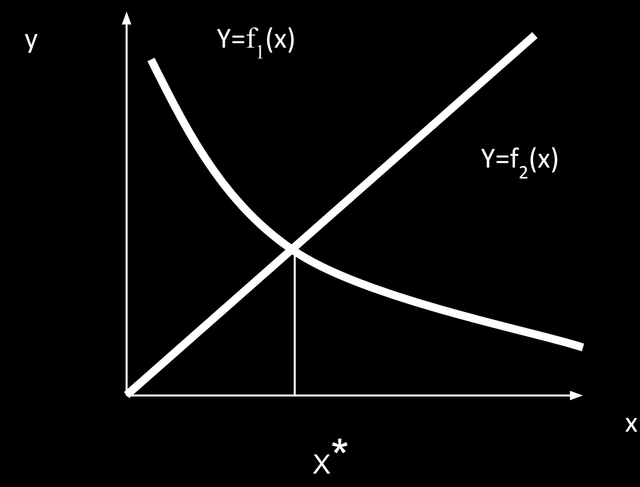
графический метод:

$f(x)=0$

$f_1(x)=f_2(x)$

$y=f_1(x)$

$y=f_2(x)$

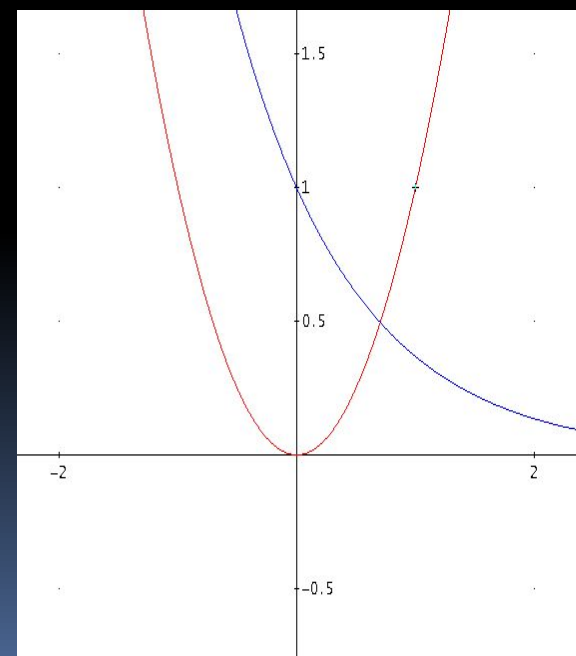


Пример $\quad x^2 - e^{-x} = 0$

•

$y=f1(x)=x^2$

$y=f2(x)=e^{-x}$

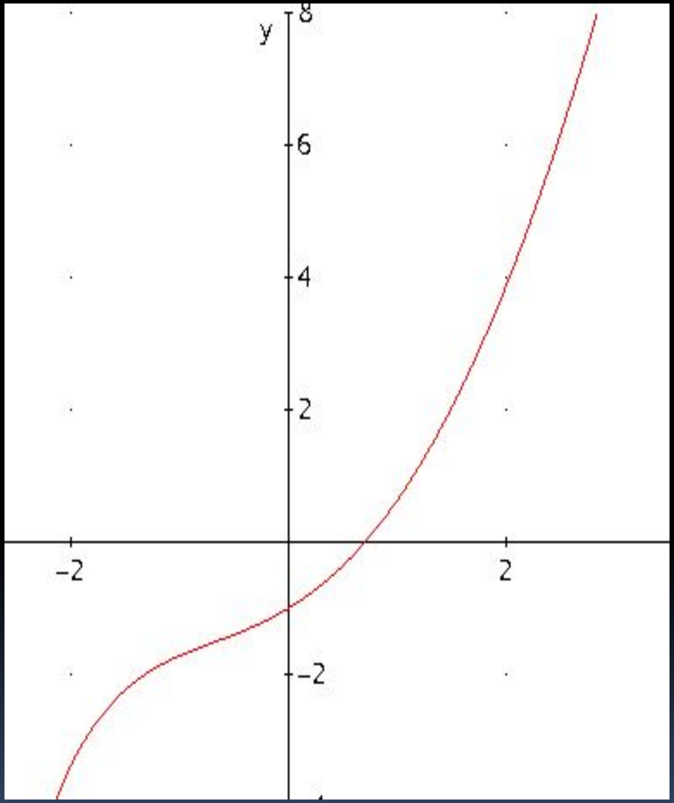


$[a, b] = [0, 2]$

Графический метод ⟶ Свойства непрерывных функций

<u>теорема Больцано-Коши</u> (**необходимое и достаточное условие существования корней**) :

Если непрерывная на отрезке *[a,b]* функция *f(x)* на концах его имеет противоположные знаки, т.е. $f(a)*f(b)<0$, то внутри отрезка *[a,b]* существует точка *c*, в которой значение функции равно 0, т.е. $f(c)=0$.



Если функция *f(x)* к тому же еще и строго монотонна, то корень на отрезке *[a,b]* единственный

2 Отделение корней

2.2 Аналитический → Метод Штурма

- Критические точки функции *f(x)* – это …

точки, в которых производная функции *f(x)* равна нулю или не существует

Пример: $5^x - 6x - 3 = 0$

$f'(x) = 5^x * \ln 5 - 6 \longrightarrow 5^x * \ln 5 - 6 = 0 \longrightarrow x = \frac{\lg 6 - \lg(\ln 5)}{\lg 5} = \frac{0{,}7782 - 0{,}2065}{0{,}6990} \approx 0{,}82 \approx 1$

X	- ∞	1	+ ∞
Знак *f(x)*	+	-	+

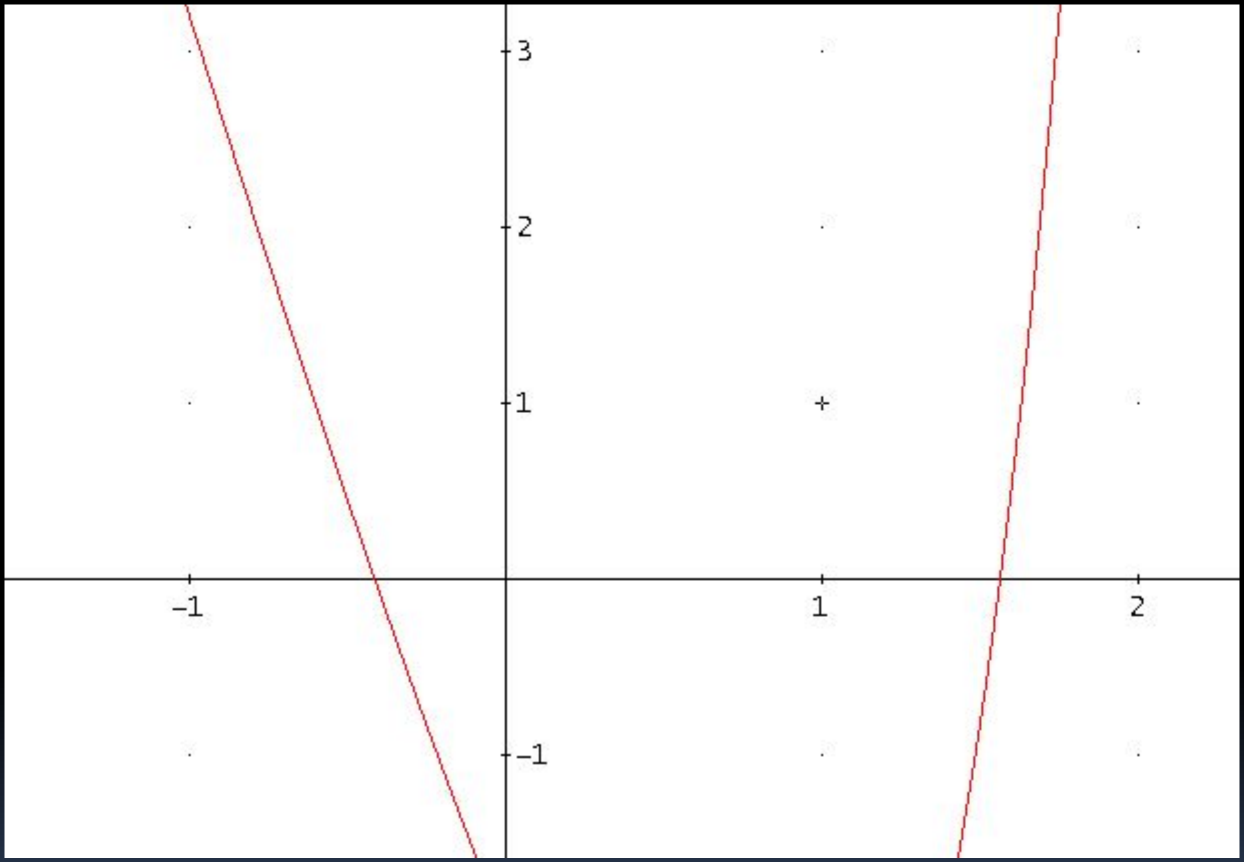
$x_1 \in]-\infty, 1]$ $x_2 \in [1, +\infty[$

График

X	- ∞	-1	0	1	2	+ ∞
Знак *f(x)*	+	+	-	-	+	+

$x_1 \in [-1, 0]$ $x_2 \in [1, 2]$

$f(x)=5^x-6x-3$



3 Уточнение корней

Методы уточнения корней:

прямые методы

итерационные методы

$x^0, x^1, \ldots, x^k \ldots$ Условие окончания итераций: $\left| x^{k+1} - x^k \right| \le \varepsilon$

итерационные методы

одношаговые

многошаговые

3 Методы уточнения корней

1 перебор всех возможных значений функции

2 замена нелинейной функции той или иной более простой функцией (линейной, параболической), близкой к исходной нелинейной и поиск корня этой функции

3 нелинейное уравнение вида $f(x)=0$ сводят к одной из форм вида $g(x)=\phi(x)$ и стремятся обеспечить равенство левой и правой частей

Контрольные вопросы:

1) Как найти общее число корней алгебраического уравнения?

2) Что дает отделение корней?

3) Какие способы отделения корней вы узнали?

4) Для чего нужны критические точки функции f(x)?

5) Сколько корней может быть у функции, если у нее существует только одна критическая точка?

Тест:

***1 Корнем уравнения f(x)=0 называется** значение x*, при котором*

А) производная функции f(x) в этой точке равна нулю
Б) функция f(x) в этой точке равна нулю
В) производная функции f(x) в этой точке не существует
Г) функция f(x) в этой точке не существует

2 Корень уравнения называется простым, если

А) это простое число
Б) он однократный
В) он вычисляется просто
Г) его значение очевидно

3 Уравнение f(x)=0 имеет корень на отрезке [a,b], если функция f(x) на [a,b]

А) непрерывна
Б) монотонно возрастает
В) на концах отрезка имеет значения разных знаков
Г) дифференцируема

4 Критические точки функции f(x) – это точки, в которых

А) функция f(x) равна нулю или не существует
Б) функция f(x) меняет знак с “минуса на “плюс”
В) производная функции f(x) равна нулю или не существует
Г) производная функция f(x) меняет знак с “минуса ” на “плюс”

5 Алгебраическое уравнение будет иметь корней

$$-3x^7+8x^4+8x^3+x^2-2x+5=0$$

А)   2
Б)   3
В)   4
Г)   7

Домашнее задание:

1 Сколько положительных и отрицательных

корней будет иметь уравнение

$$-3x^7+8x^4+8x^3+x^2-2x+5=0$$

2 Подготовиться к тесту