# Векторы и действия над ними. Проекции векторов на координатные оси

# Урок 02. Вектор. Операции с векторами

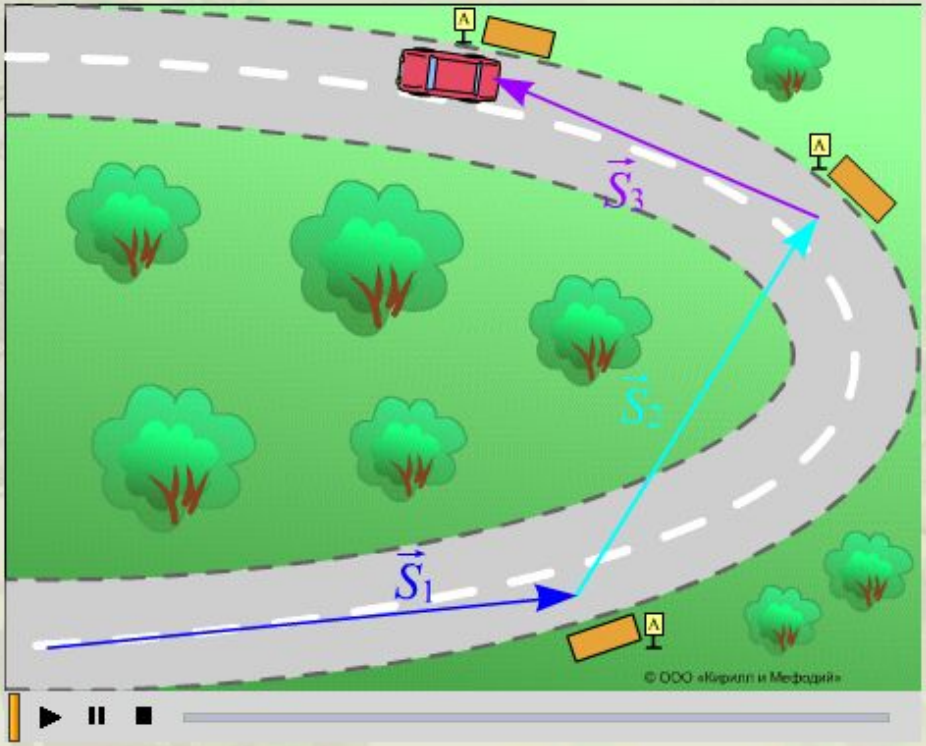
Из курса физики 7 класса вы знаете, что физические величины бывают скалярными и векторными.

На этом уроке вы познакомитесь с операциями сложения и вычитания векторов, а также с определением проекций векторов в выбранной системе отсчёта.

**План урока:**

1. Определение вектора.
2. Модуль и проекции вектора.
3. Сложение и вычитание векторов.
4. Определение координат вектора в выбранной системе отсчёта.
5. Радиус-вектор.
6. Преобразование скоростей.
7. Выводы.

# Значение векторов в механике




Конец вектора перемещения показывает текущее положение тела.

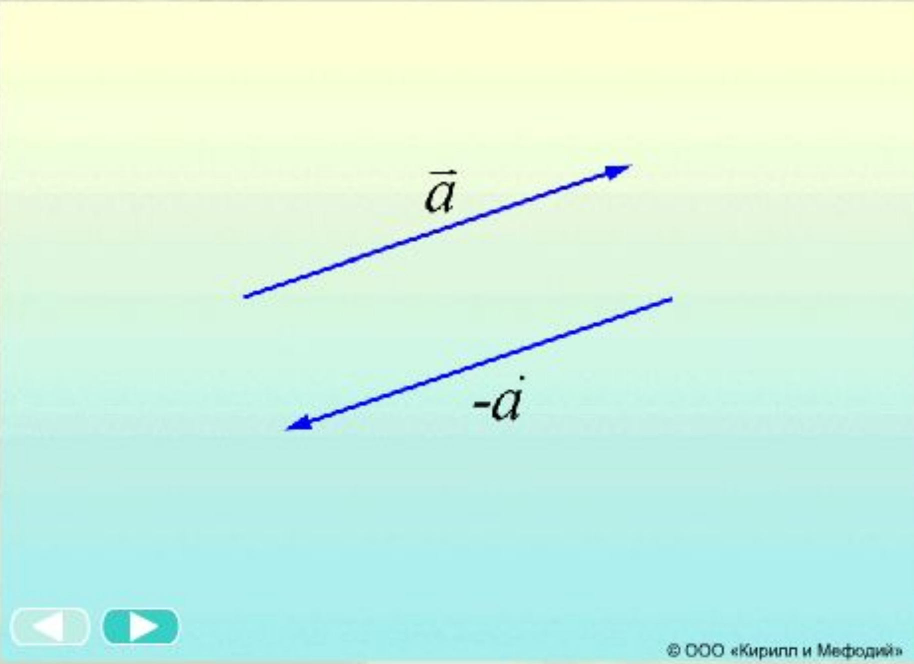
В зависимости от вида траектории движение может быть **прямолинейным** или **криволинейным**.

В реальной жизни прямолинейное и равномерное движение встречается очень редко, приходится сталкиваться с более сложными видами движения. Тела могут двигаться по окружности, вращаться на одном месте вокруг своей оси или совершать колебательные движения. Особый вид движения - **волны**.

Различные части одного и того же объекта могут одновременно описывать различные траектории.

Для описания сложных видов движения необходимо более подробно познакомиться с векторами.

# Определение вектора

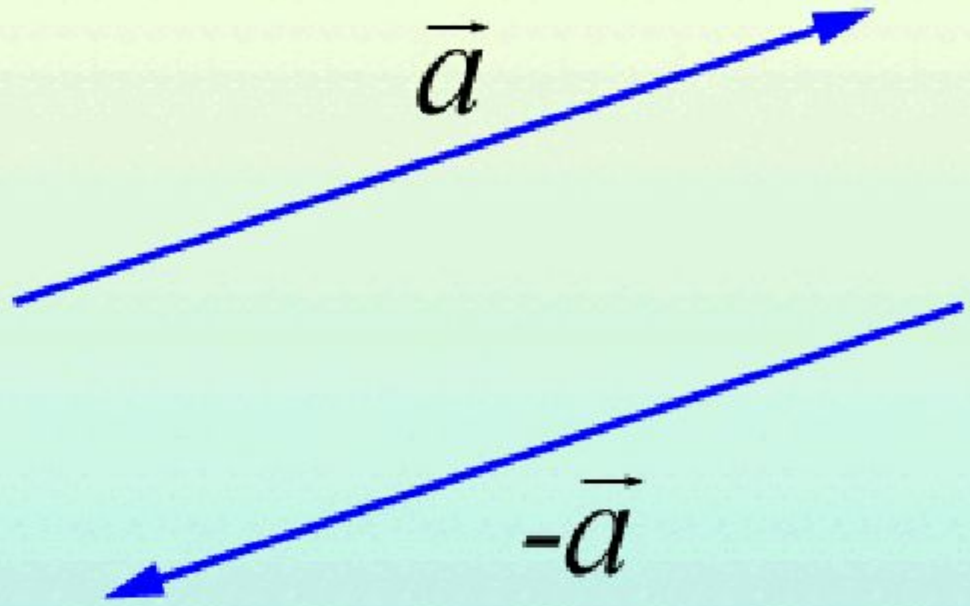



Вектор и его проекции на координатные оси.

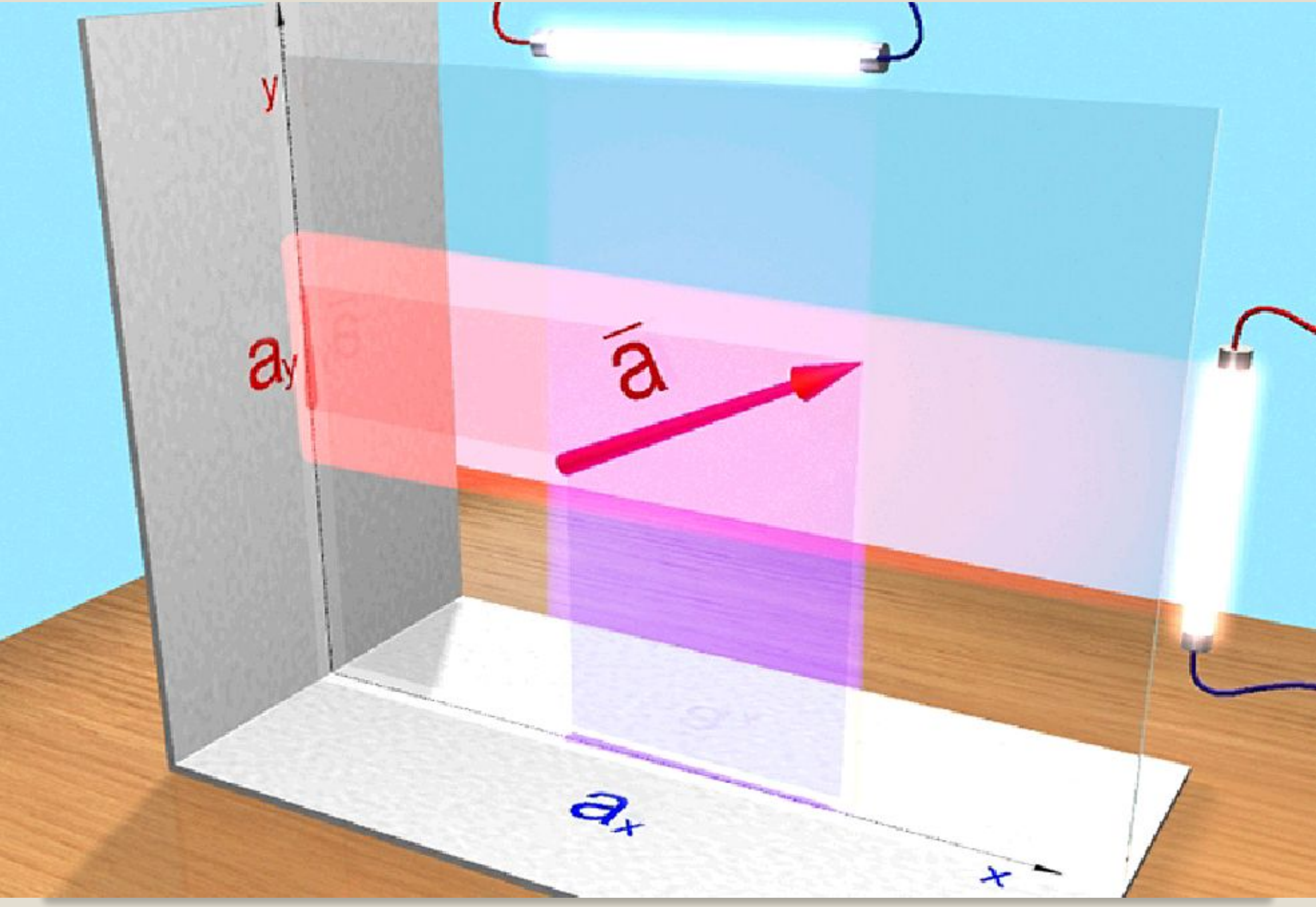
Величины, которые характеризуются своим численным значением и своим направлением в пространстве, называют **векторными величинами или векторами**. Например, **перемещение, скорость, ускорение** - векторные величины.

Векторную величину изображают направленным отрезком прямой и обозначают символом со стрелочкой сверху. Длина отрезка прямой в выбранном масштабе будет отображать численное значение векторной величины (модуль или абсолютное значение векторной величины). **Два вектора считаются равными, если их длины одинаковы, а направления совпадают**.

Противоположным вектору $\vec{a}$ называется вектор $-\vec{a}$, имеющий ту же длину, что и вектор $\vec{a}$, но противоположное направление.

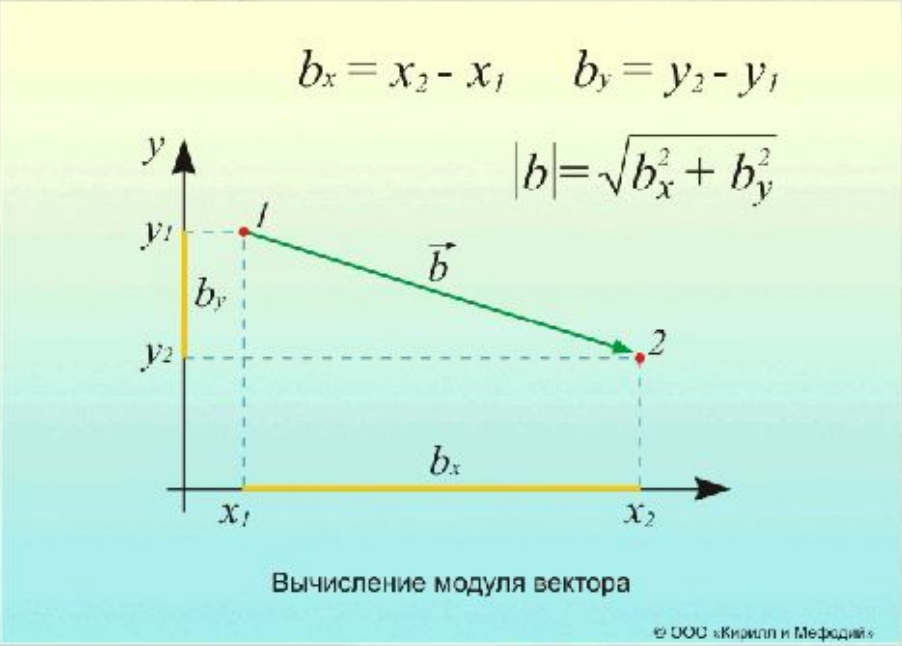


$\vec{a}$
$-\vec{a}$



y
$a_y$
$\bar{a}$
$a_x$
x

# Модуль и проекции вектора




Модуль и проекции вектора.

Исходя из определения, каждому вектору соответствует бесконечное множество равных ему векторов, получаемых всевозможными параллельными переносами.

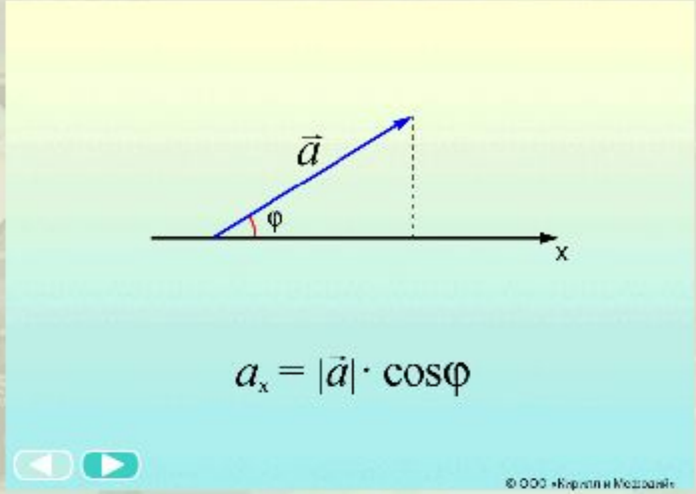
Для определения направления вектора в пространстве его необходимо соотнести с системой координат.

**Проекциями вектора** называют отрезки, ограниченные ортогональными проекциями начала и конца вектора на соответствующие оси координат.

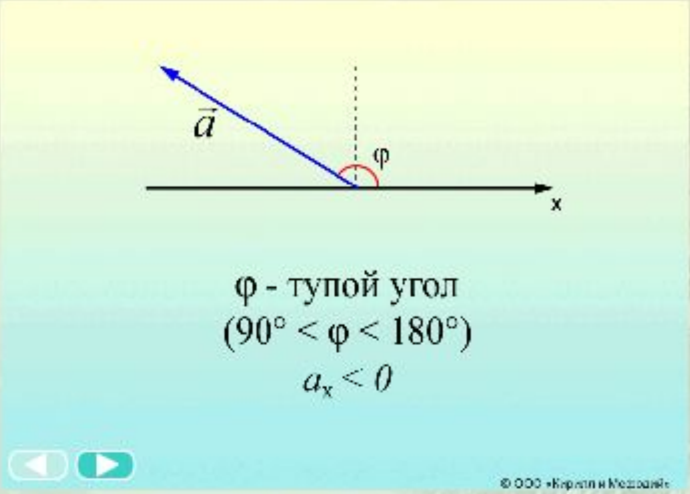
Проекции вектора - это скалярные величины, которые могут иметь положительное или отрицательное значение.

**Модуль вектора** по определению вычисляется как корень квадратный из суммы квадратов его проекций на оси координат.

# Проекции векторов на оси координат




Проекция вектора на ось OX и её значение для острого угла.




Значения проекции вектора на ось OX для тупого и прямого углов.

**Проекцией вектора** на какую-либо ось называется произведение модуля вектора на косинус угла между вектором и положительным направлением выбранной оси.

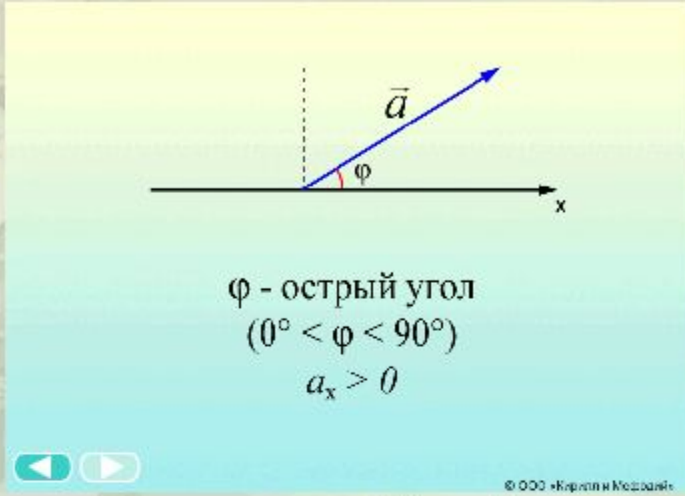
Проекция вектора положительна, если угол острый.

Проекция отрицательна, если угол тупой.

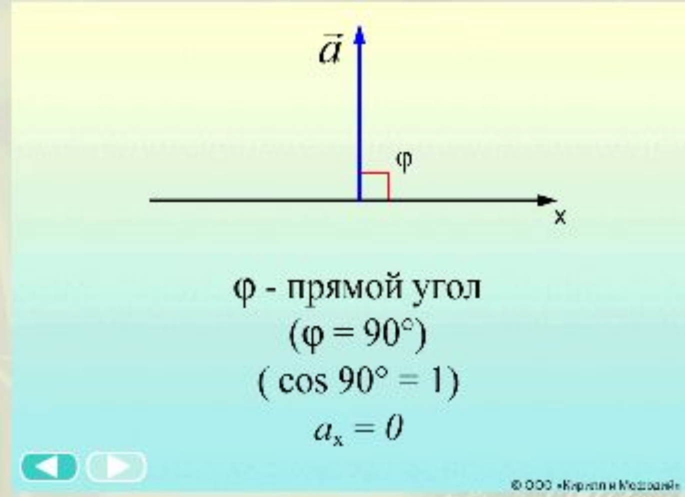
Проекция равна нулю, если угол прямой.

При сложении векторов их соответствующие проекции складываются, а при умножении вектора на действительное число проекции умножаются на это число.

# Проекции векторов на оси координат




Проекция вектора на ось ОХ и её значение для острого угла.




Значения проекции вектора на ось ОХ для тупого и прямого углов.

**Проекцией вектора** на какую-либо ось называется произведение модуля вектора на косинус угла между вектором и положительным направлением выбранной оси.

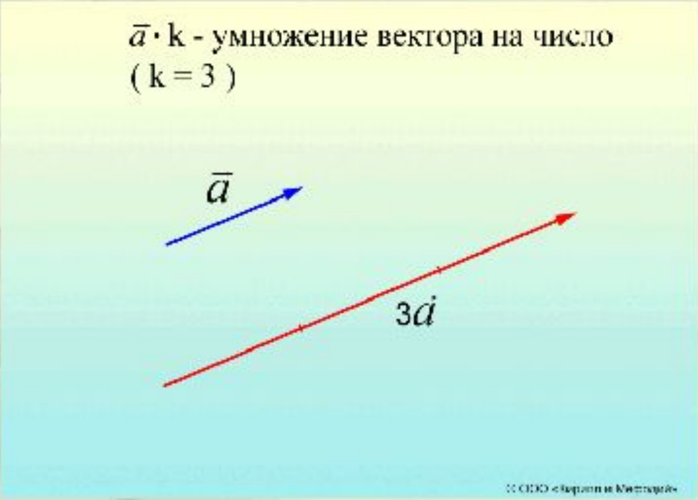
Проекция вектора положительна, если угол острый.

Проекция отрицательна, если угол тупой.

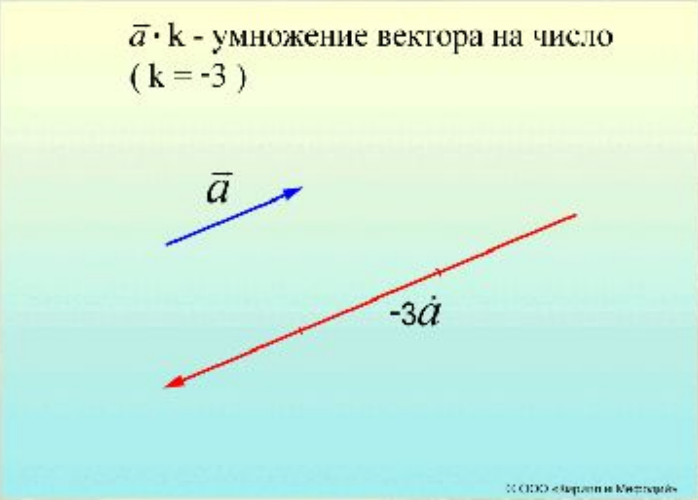
Проекция равна нулю, если угол прямой.

При сложении векторов их соответствующие проекции складываются, а при умножении вектора на действительное число проекции умножаются на это число.

# Действия с векторами




Умножение вектора на число к = 3.



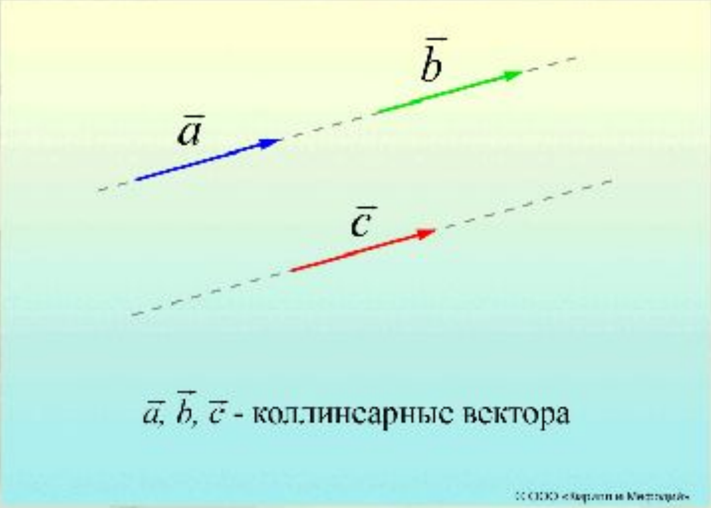

Умножение вектора на число к = -3.

Произведением вектора $\vec{a}$ на некоторое действительное число **к** называется вектор, длина которого в **к** раз больше длины вектора $\vec{a}$.

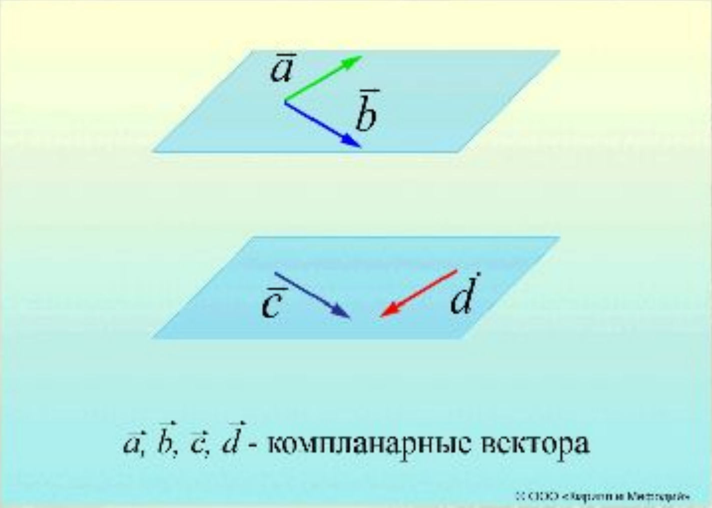
Если **к > 0**, то направление полученного вектора совпадает с направлением вектора $\vec{a}$.

Если **к < 0**, то направление полученного вектора противоположно направлению вектора $\vec{a}$.

# Коллинеарные и компланарные вектора




Коллинеарные вектора.

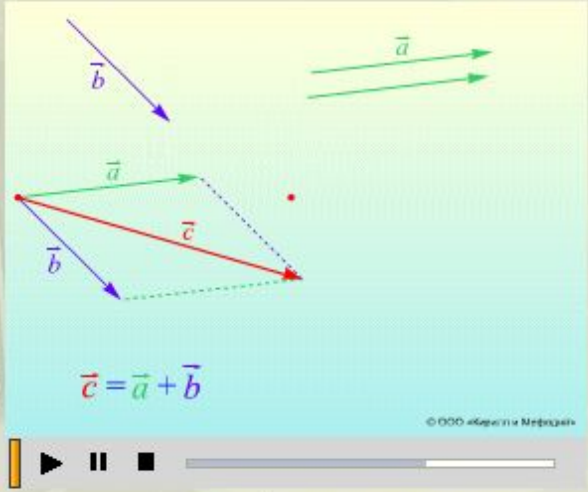



Компланарные вектора.

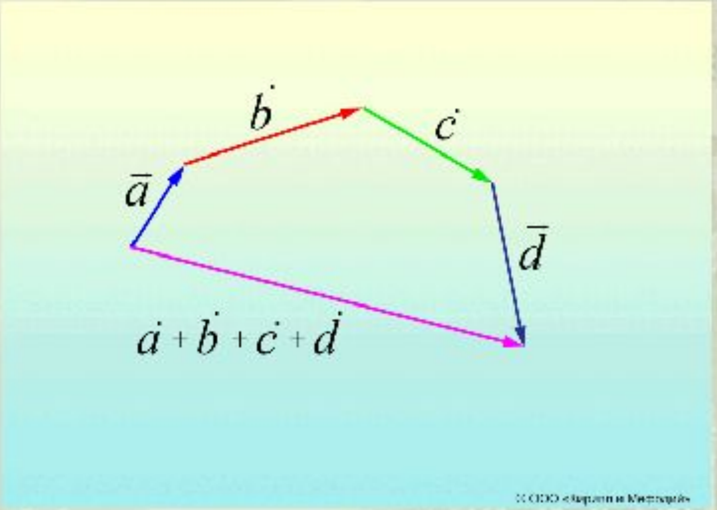
**Коллинеарными** называются вектора, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых. Коллинеарные вектора отличаются друг от друга лишь числовыми множителями.

**Компланарными** называются три и более векторов, лежащих в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

## Сложение и вычитание векторов по правилу параллелограмма




Правило позволяет найти одновременно сумму векторов и их разность.



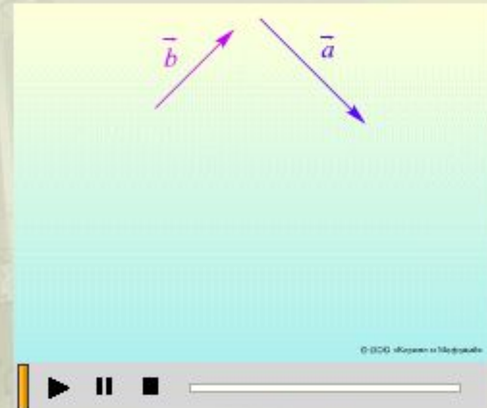

Сложение векторов.

Вектора можно складывать и вычитать по особым правилам.

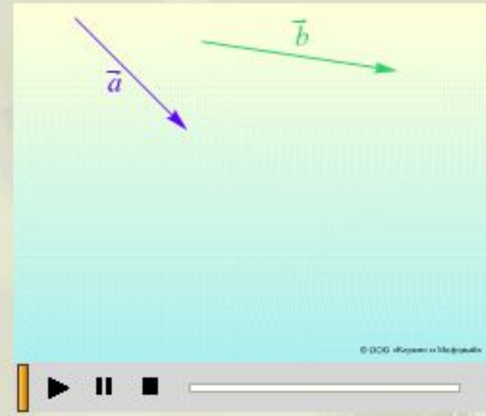
Сложение векторов осуществляется по **правилу параллелограмма.** Суть этого правила состоит в том, что в результате сложения двух векторов мы получаем вектор, который направлен по диагонали параллелограмма, сторонами которого являются складываемые векторы.

Разность двух векторов можно находить по правилу параллелограмма, учитывая определение противоположного (отрицательного) вектора.

# Сложение и вычитание векторов по правилу треугольника




Сложение векторов по правилу треугольника.

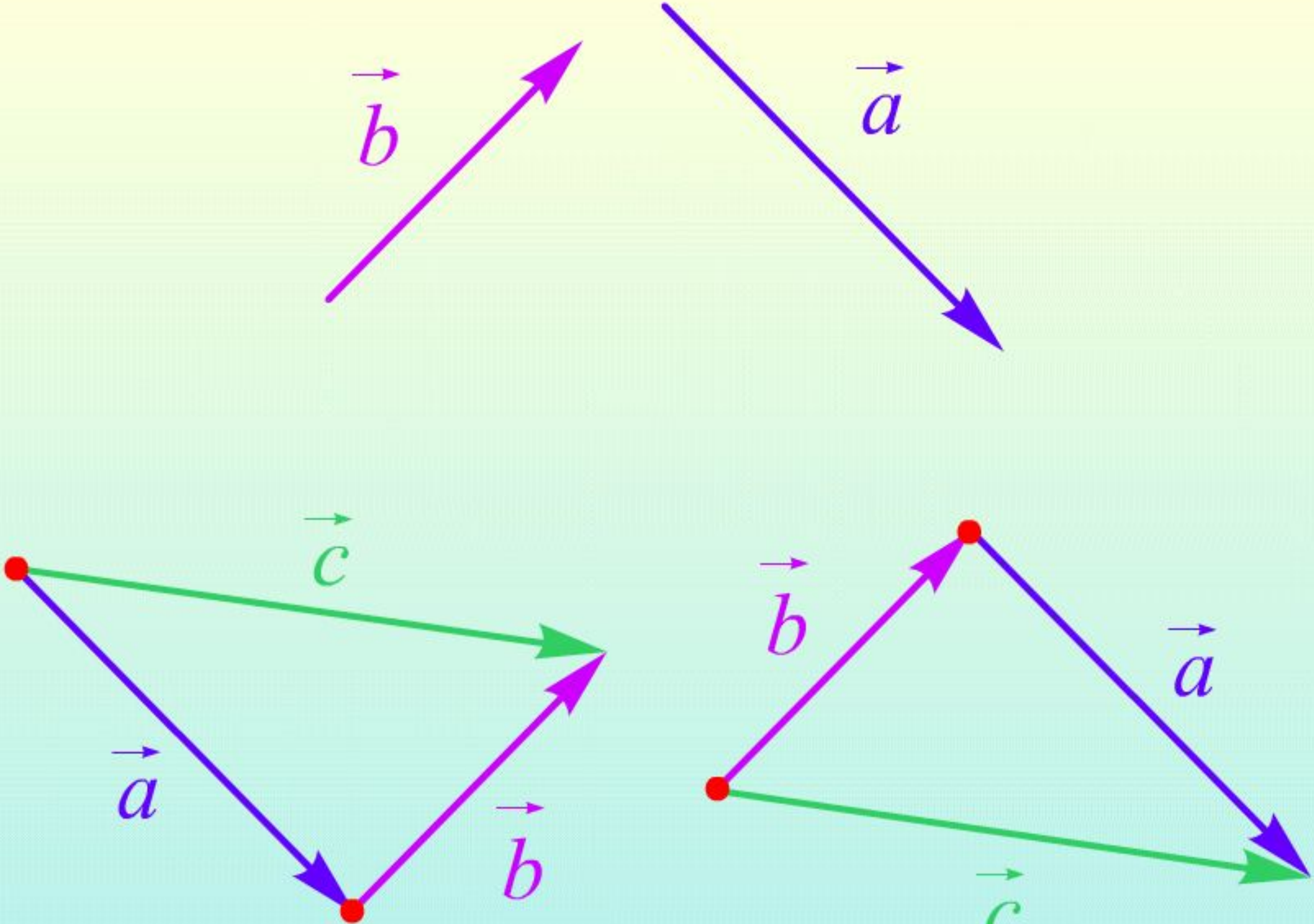



Вычитание векторов по правилу треугольника.

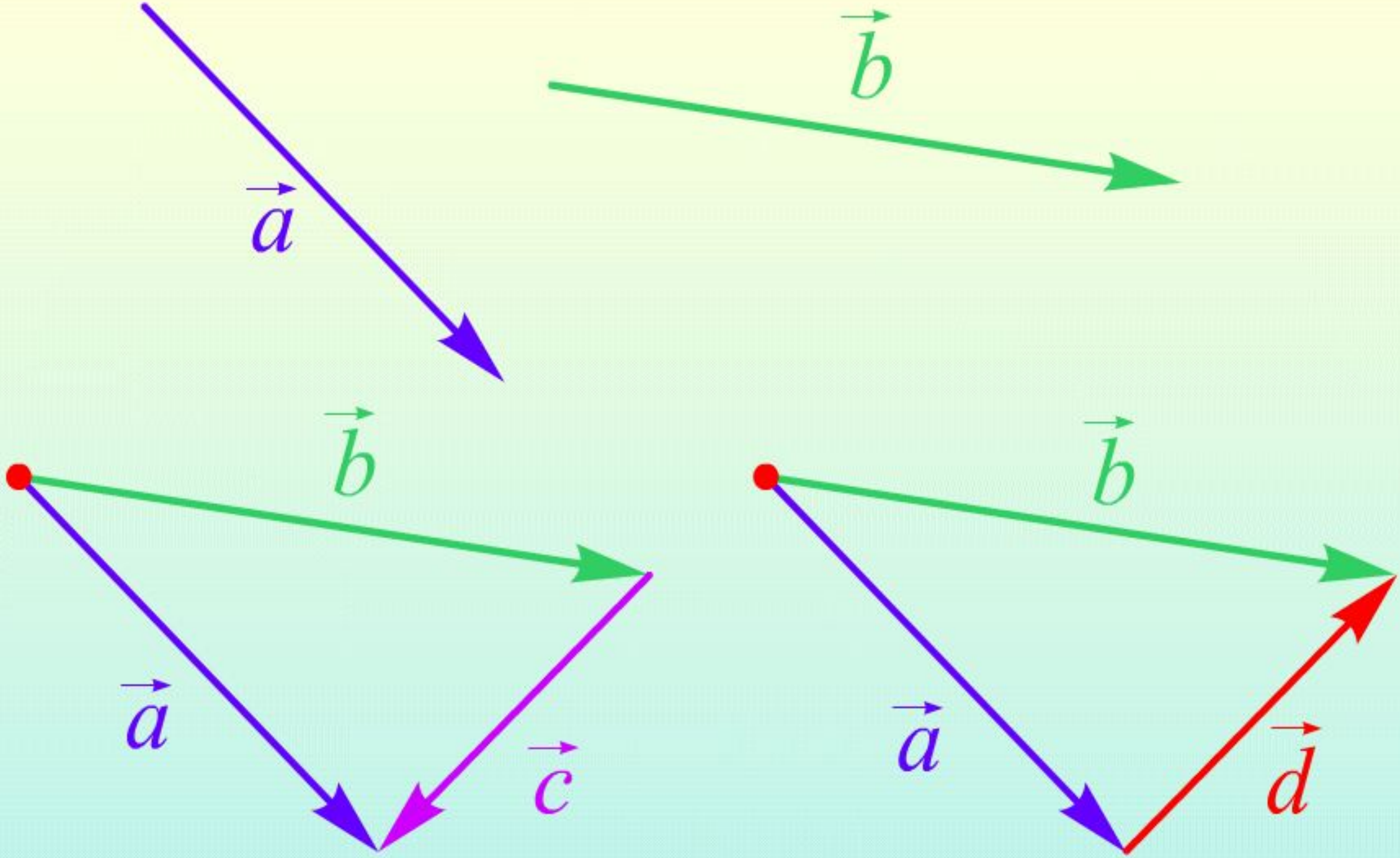
Сумму и разность векторов можно находить по правилу треугольника. Для того чтобы найти сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, необходимо начало вектора $\vec{b}$ параллельным переносом поместить в конец вектора $\vec{a}$. Вектором $\vec{a} + \vec{b}$ будет вектор, проведённый из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$.

Это правило удобно при нахождении суммы нескольких векторов.

Чтобы найти разность двух векторов, надо совместить начала этих векторов (без изменения их направлений), затем провести вектор от конца вычитаемого вектора к концу уменьшаемого вектора. Полученный вектор и будет равен разности векторов.



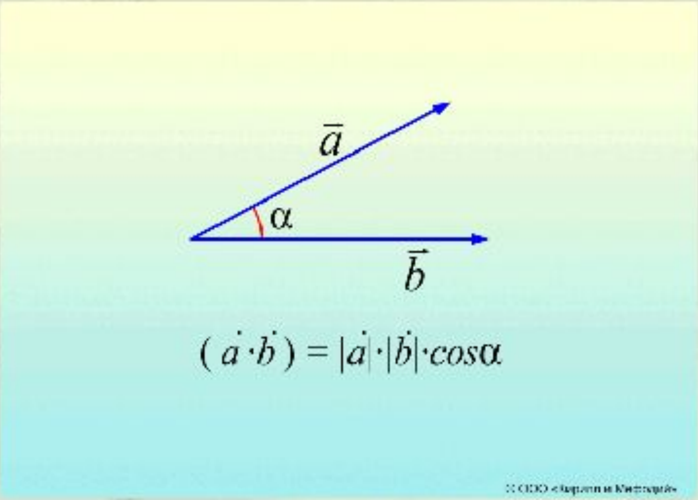

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ $\qquad$ $\vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$




$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$

$\vec{b} - \vec{a} = \vec{d}$

# Скалярное произведение векторов



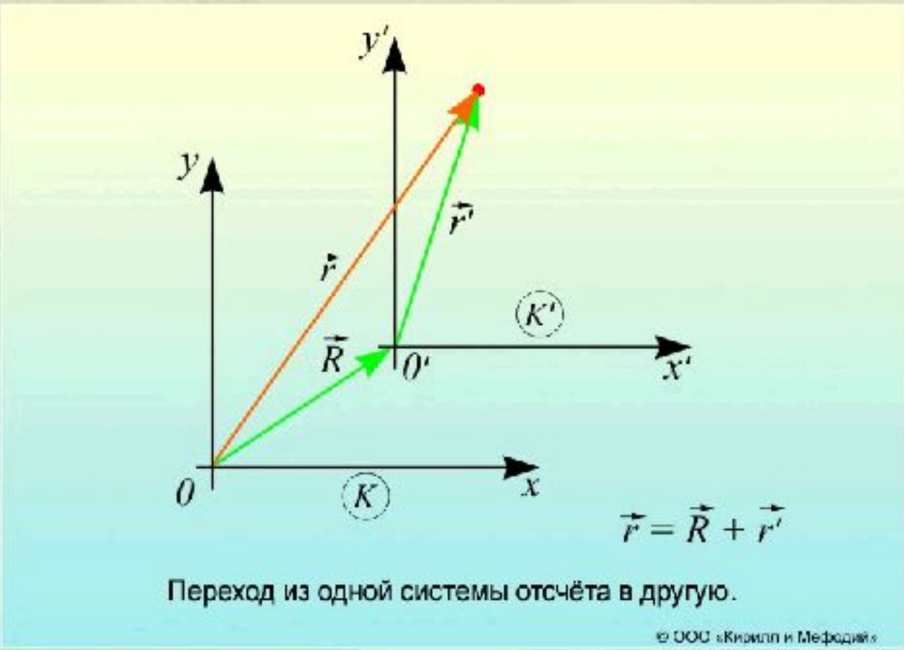
Скалярное произведение двух векторов.

Механическая работа.

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число или скалярная физическая величина, равная произведению модулей векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов обычно обозначают $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ или $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
Если угол между векторами острый, то скалярное произведение векторов положительно.
Если угол между векторами тупой, то скалярное произведение векторов отрицательно.
Если угол между векторами  прямой, то скалярное произведение векторов равно нулю.
Примером скалярного произведения в механике является определение работы.

# Радиус-вектор



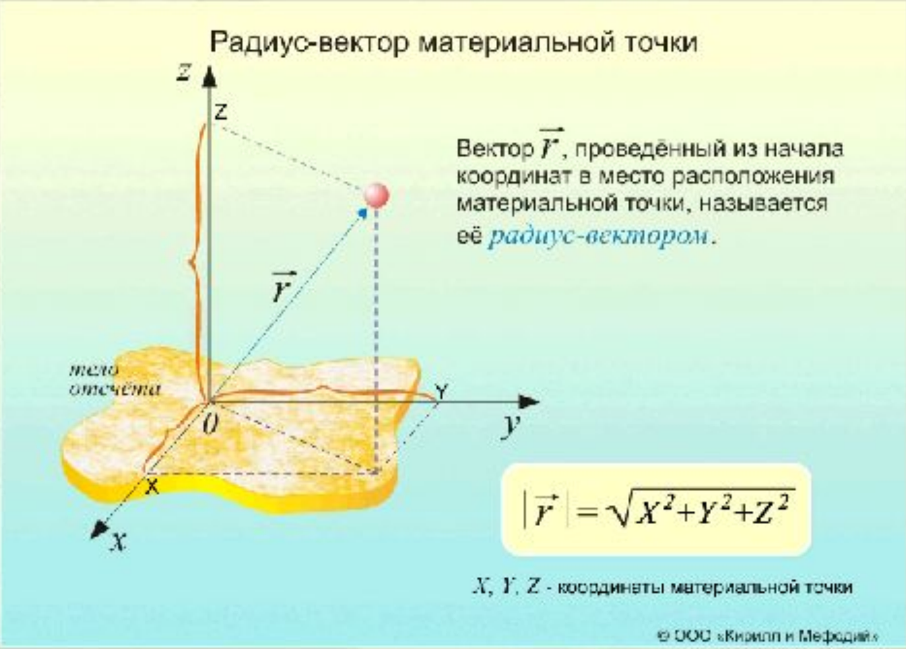

Положение тела в системе отсчёта описывается **радиус-вектором**. Начало радиус-вектора совпадает с началом системы координат, конец - с положением тела в данный момент времени.

Переход из одной системы отсчёта в другую осуществляется по специальным правилам.

При переходе из одной системы отсчёта в другую **результирующий радиус-вектор** определяется как сумма радиус-вектора положения тела в первоначальной системе отсчёта и вектора между началами новой и старой систем координат.

Результирующий радиус-вектор.

# Радиус-вектор и координаты материальной точки




Радиус-вектор материальной точки.

Положение материальной точки в выбранной системе отсчёта можно задавать с помощью радиус-вектора.

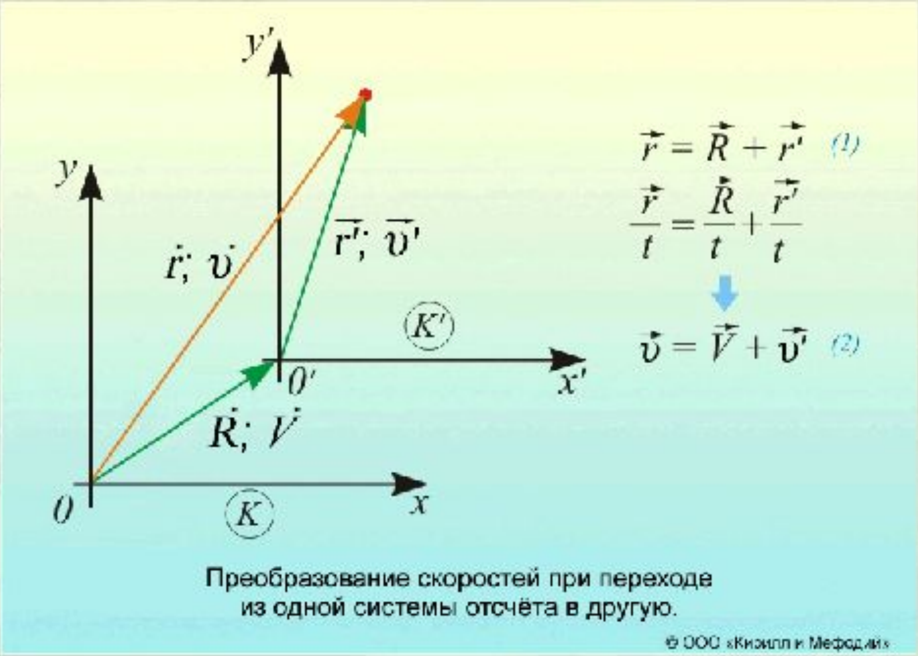
**Радиус-вектор** это вектор, соединяющий начало отсчёта в выбранной системе отсчёта с положением материальной точки в произвольный момент времени.

Уравнение (закон) движения материальной точки в векторной форме - это зависимость радиус-вектора от времени.

Координаты радиус-вектора в произвольный момент времени зависят от выбора системы координат (ортогональной или полярной).

Координатное описание механического движения материальной точки аналогично векторному.

# Преобразование скоростей




Преобразование скоростей.

При переходе из одной системы отсчёта в другую приходится прибегать к **преобразованию скоростей**.

Из уравнения преобразования радиус-вектора вытекает уравнение, которое описывает преобразование скоростей при переходе из одной системы отсчёта в другую.

Изменение положения тела в пространстве характеризуется **перемещением**. В отличие от пути, перемещение - векторная величина. В случае движения тела по замкнутой траектории перемещение может быть равным нулю, тогда как путь всегда будет отличным от нуля. Модуль перемещения всегда меньше либо равен пути, пройденному телом. Положение тела в системе отсчёта характеризуется радиус-вектором.

# Пример решения задачи

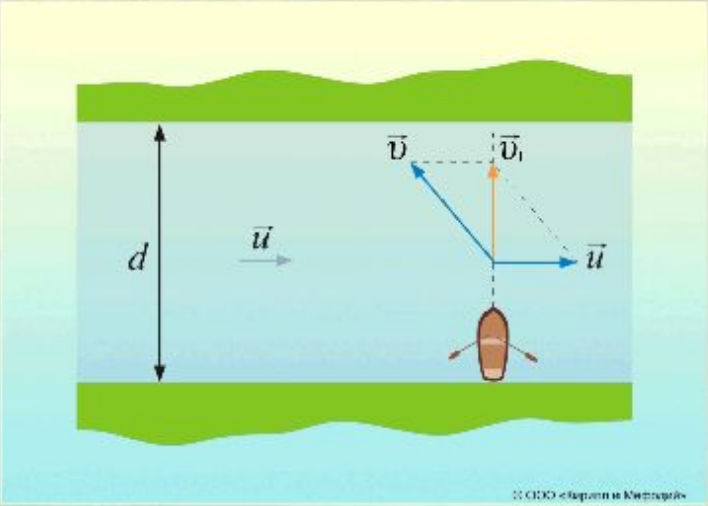



Рисунок к задаче.

Необходимо пересечь реку шириной **500 м**, двигаясь перпендикулярно берегу. Сколько времени на это потребуется, если скорость лодки равна **20 км/ч**, а скорость течения **3 м/с**?
Ответ округлить до целого значения.

***Дано*:**

$d = 500$ **м**

$\upsilon = 20$ **км/ч** $= 5,6$ **м/с**

$u = 3$ **м/с**

***Найти*:** $t = ?$

*Решение:*

$t = \dfrac{d}{\upsilon_\perp}$, где $\upsilon_\perp$ - составляющая скорости лодки, перпендикулярная берегу реки. Лодку надо поставить так, чтоб её не сносило течение.

По теореме Пифагора: $\upsilon_\perp = \sqrt{\upsilon^2 - u^2}$,

$$t = \frac{d}{\sqrt{\upsilon^2 - u^2}},$$

$$t = \frac{500}{\sqrt{5,6^2 - 3^2}} = 106$$

*Ответ:* **106 с**.

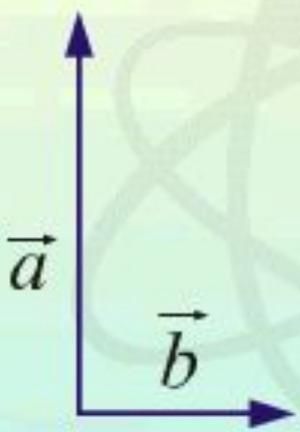
# Векторы. Операции с векторами

Определите вектор, соответствующий разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.


вектор $\vec{a} - \vec{b}$ равен

# Векторы. Операции с векторами

Определите вектор, соответствующий сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.




вектор $\vec{a} + \vec{b}$ равен

*a)*

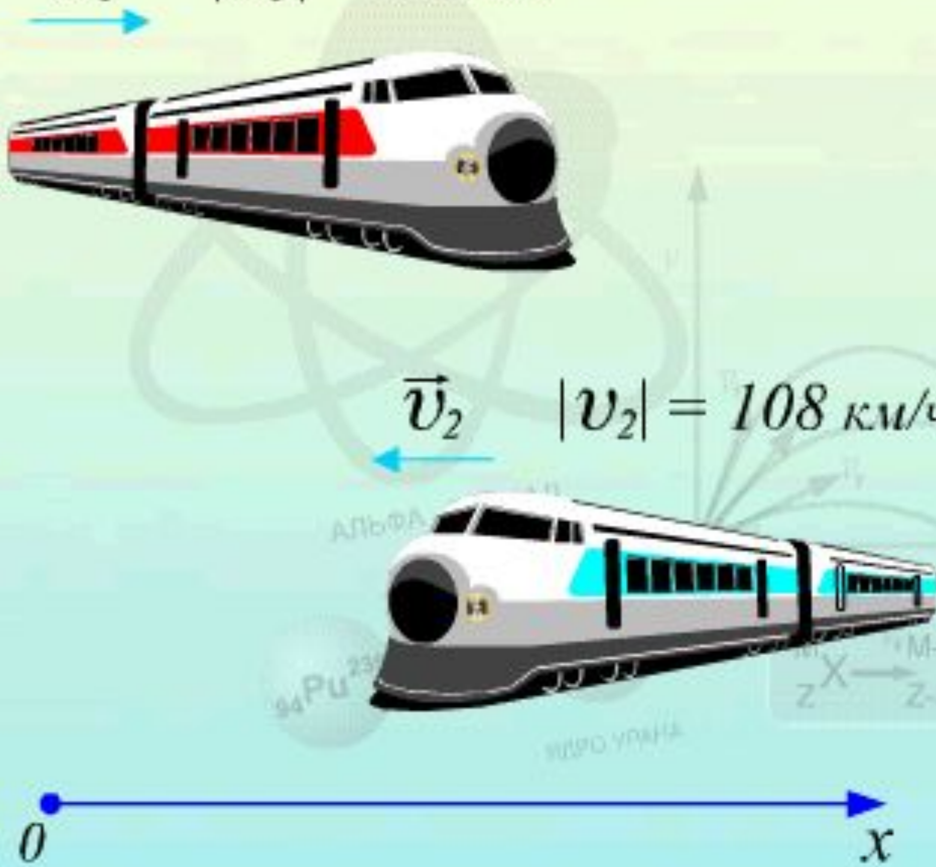
*b)*

# Векторы. Операции с векторами

Определите проекцию скорости первого поезда относительно второго.

$\vec{v}_1$ $|v_1| = 72$ км/ч

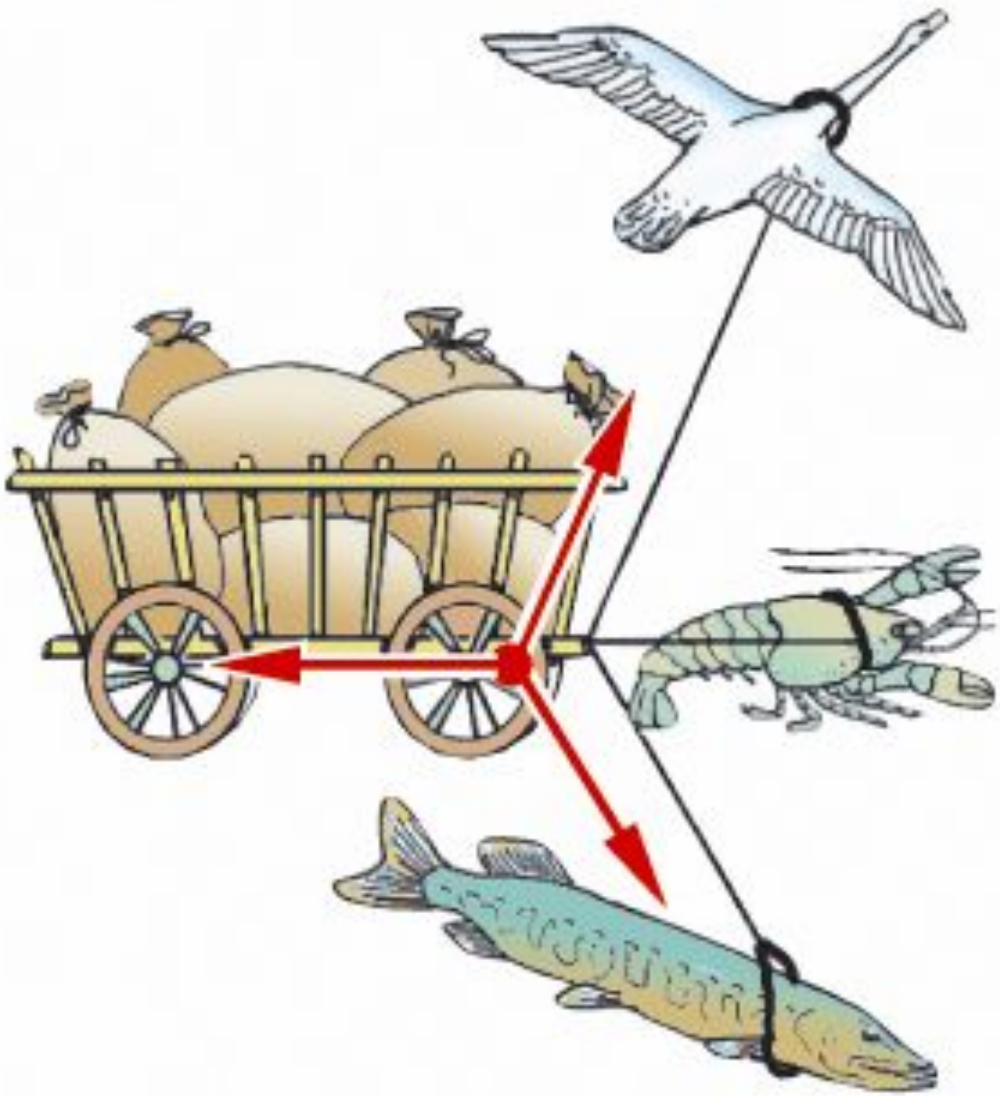
$\vec{v}_2$ $|v_2| = 108$ км/ч




40 м/с

50 м/с

60 м/с



# Выводы

На этом уроке вы узнали, что:

- для определения положения тела в пространстве необходимо использовать систему отсчёта, которая состоит из тела отсчёта, системы координат и часов;
- положение тела в системе отсчёта характеризуется радиус-вектором, изменение положения тела - перемещением;
- перемещение, скорость, радиус-вектор являются векторными величинами. Операции с векторами (сложение, вычитание) производятся по специальным правилам.

# источник

Физика. 9 класс «Уроки Кирилла и Мефодия»