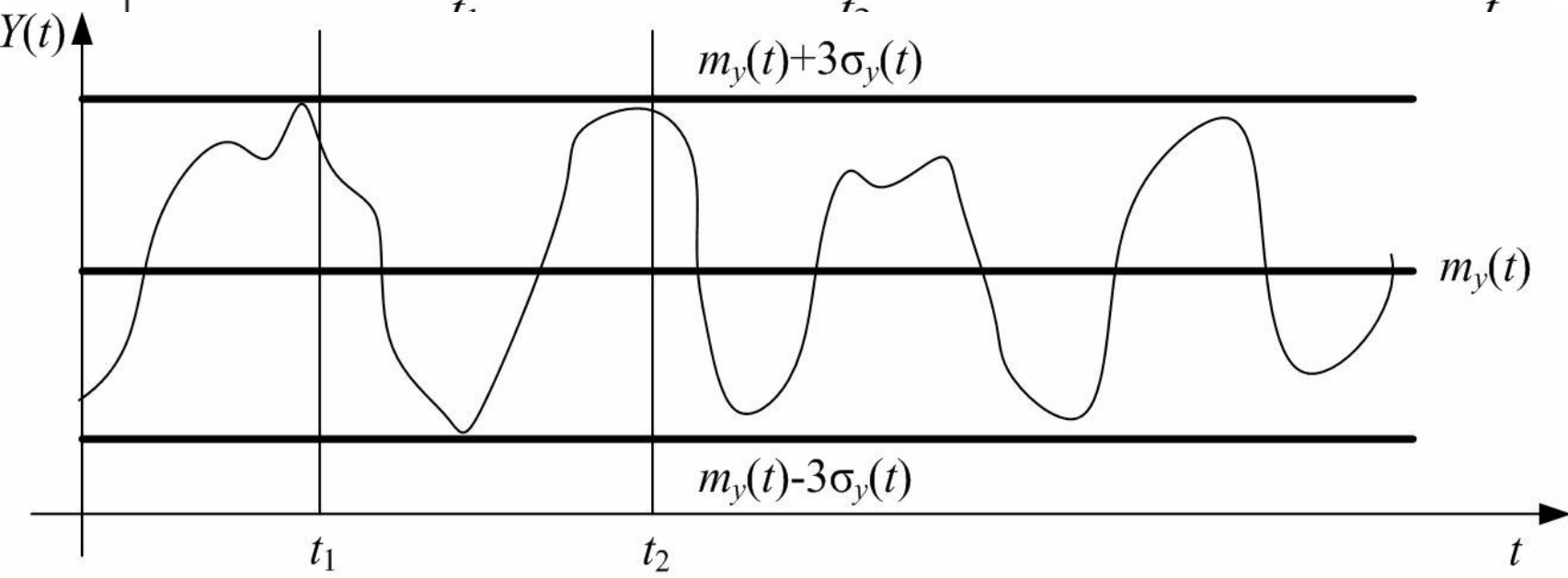
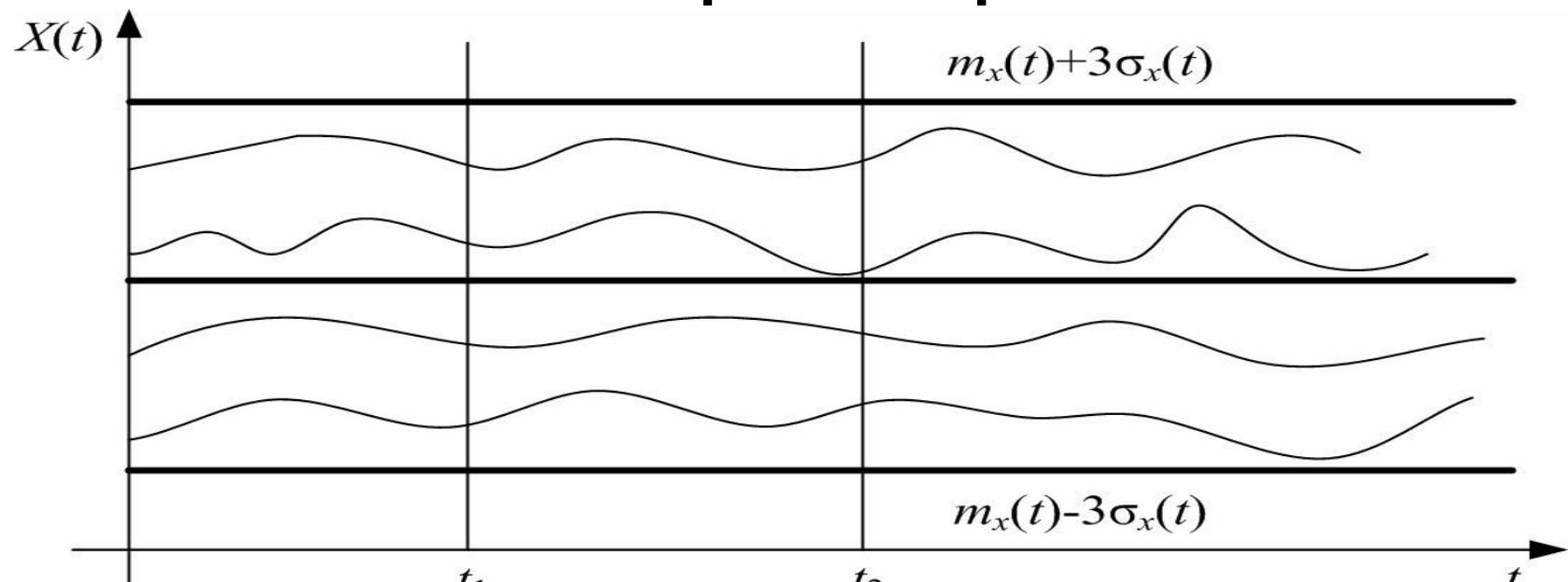


Корреляционный и спектральный анализ случайных процессов

Случайные процессы с одинаковыми параметрами



Корреляционная функция

- **Корреляционная функция** – такая неслучайная функция $R_x(t_1, t_2)$ двух аргументов, которая для любой пары фиксированных значений аргументов t_1 и t_2 равна корреляционному моменту, соответствующих этим сечениям случайных величин $x(t_1)$ и $x(t_2)$.

автокорреляционная функция

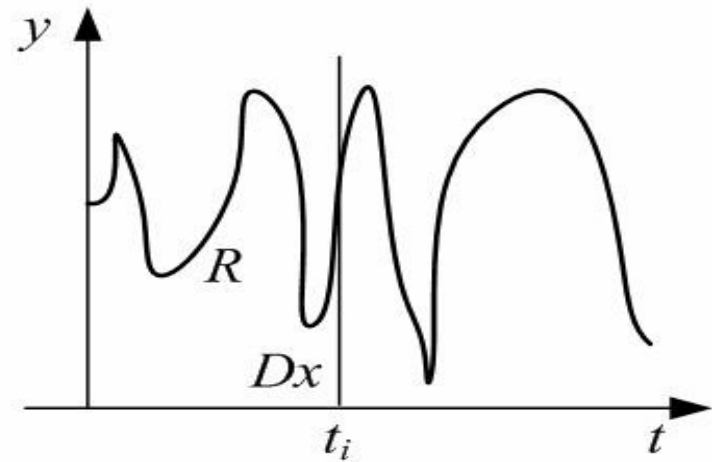
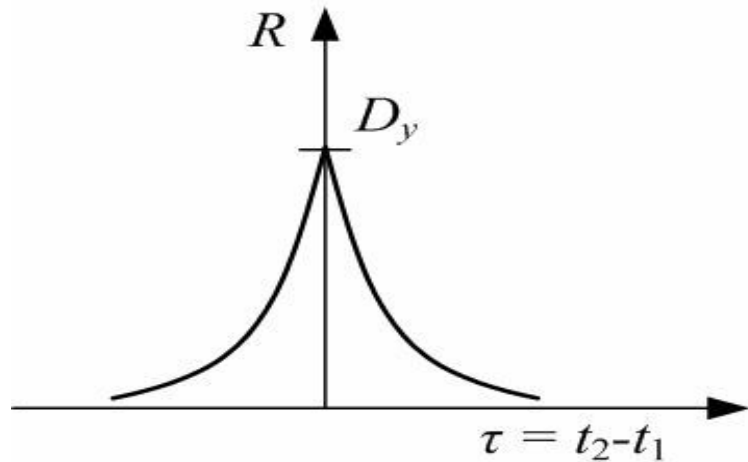
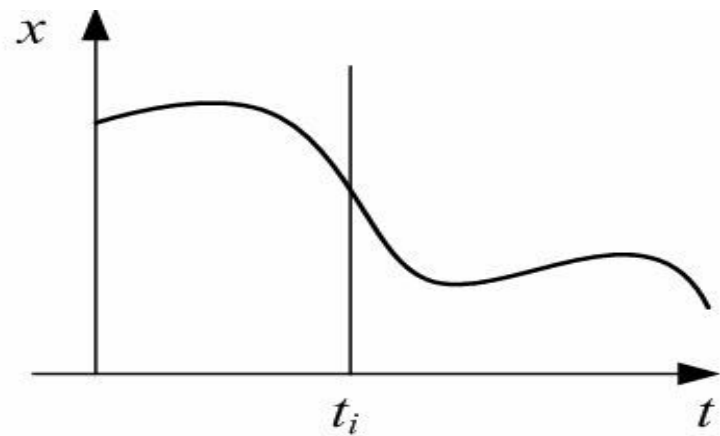
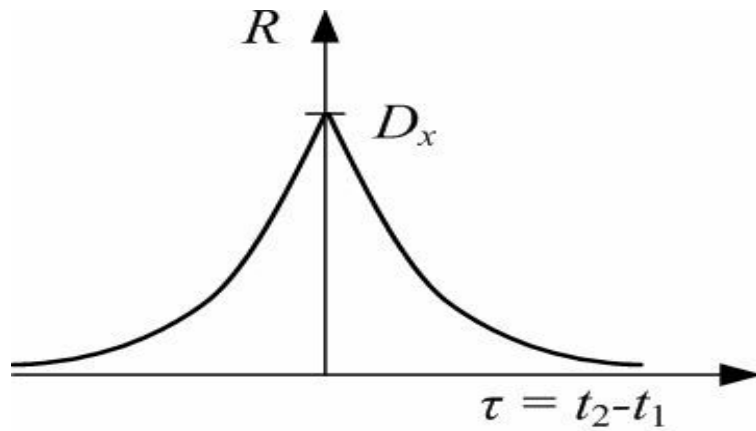
- Корреляционная функция математически выражает корреляцию двух функций или корреляцию функции с самой собой (**автокорреляционная**

фун

$$R_x(t_1, t_2) = M \left[\overset{\circ}{x}(t_1) \cdot \overset{\circ}{x}(t_2) \right],$$

- где t_1 и t_2 – любые моменты времени

Корреляционные функции двух различных процессов



При совпадении моментов t_1 и t_2 корреляционная функция равна дисперсии

Нормированная корреляционная функция

- Нормированная корреляционная функция вычисляется по формуле

$$\rho_x(t_1, t_2) = \frac{R_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)},$$
$$-1 \leq \rho_x(t_1, t_2) \leq 1,$$

$$R_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_x(t_1)][x_2 - m_x(t_2)] \omega_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2.$$

Корреляционная функция

- Знание о случайном процессе будет тем полнее, чем больше сечений будем рассматривать совместно и, следовательно, чем больше размерность плотности вероятности.
- Следовательно рассматривая n сечений нужно знать n - мерную плотность.
- Для полного описания случайного процесса необходимо знать бесконечномерную плотность вероятности. На практике обычно ограничиваются знанием первой и второй плотности вероятности.

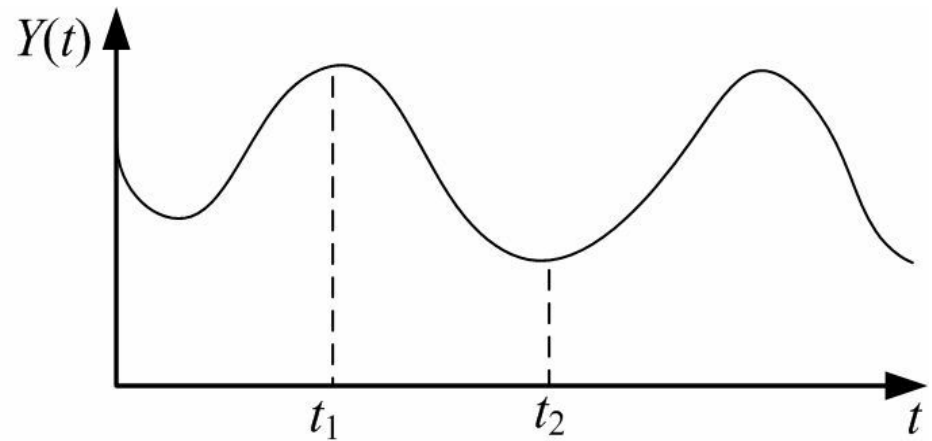
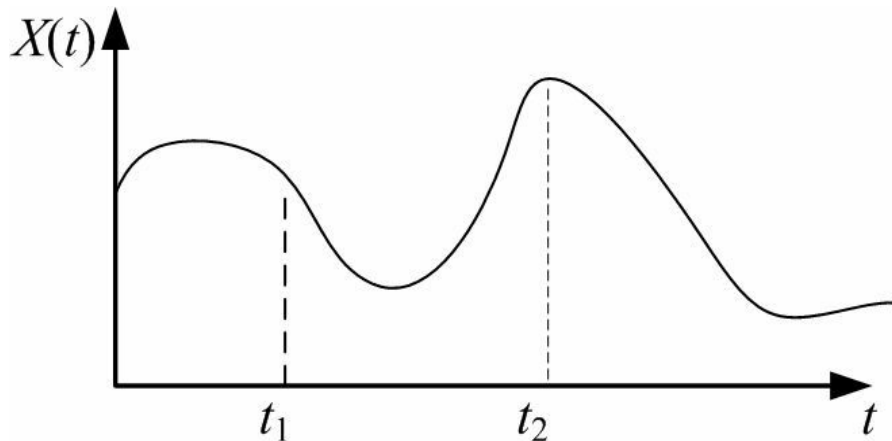
Корреляционная функция

- Чтобы установить связь, между $X(t)$ и $Y(t)$ вводится понятие **взаимной корреляционной функции (корреляционная функция связи)**, показывающая связь двух и более сечений процессов $x(t)$ и $y(t)$

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M[\dot{X}(t_1)\dot{Y}(t_2)],$$

$$R_{xy}(t_1, t_2) \neq R_{yx}(t_1, t_2),$$

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{yx}(t_2, t_1).$$



- корреляционная функция связи

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t_1)][y - m_y(t_2)] \omega_{11}(x, y; t_1, t_2) dx dy.$$

- нормированная корреляционная функция связи

$$\rho_{xy}(t_1, t_2) = \frac{R_{xy}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)},$$

Свойства корреляционных и взаимно корреляционных функций

- Корреляционная функция $R_x(t_1, t_2)$ симметрична относительно своих аргументов.
- Корреляционная функция комплексной случайной функции при перестановке аргументов заменяется комплексной сопряжённой функцией.

Свойства корреляционных и взаимно корреляционных функций

- При добавлении к случайной функции $X(t)$ произвольного неслучайного слагаемого, корреляционная функция случайной величины не изменяется

Свойства корреляционных и взаимно корреляционных функций

- При умножении случайной функции $X(t)$ на произвольный неслучайный множитель $\psi(t)$ корреляционная функция $R_x(t_1, t_2)$ умножается на $\psi(t_1)\psi(t_2)$.

Свойства корреляционных и взаимно корреляционных функций

$$|K_x(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D_x(t_1)D_x(t_2)}.$$

Свойства корреляционных и взаимно корреляционных функций

- Корреляционная функция является положительно определённой функцией
- т.е. дисперсия случайной функции всегда неотрицательна.

Свойства корреляционных и взаимно корреляционных функций

- Взаимная корреляционная функция двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ не изменяется при добавлении к этим случайным функциям произвольных неслучайных функций.

Свойства корреляционных и взаимно корреляционных функций

Если $U(t) = \psi_1(t)X(t)$; $V(t) = \psi_2(t)Y(t)$, то $R_{UV}(t_1, t_2) = \psi_1(t_1)\psi_2(t_2)R_{XY}(t_1, t_2)$.
 $|R_{xy}(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D_x(t_1)D_y(t_2)}$.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

- **Спектр** стационарного случайного процесса характеризует распределение дисперсий случайных амплитуд по частотам.
- Спектральное разложение

$$X(t) = m_x + \sum_{k=1}^{\infty} (Z_k \cdot \sin \omega_k t + U_k \cdot \cos \omega_k t)$$

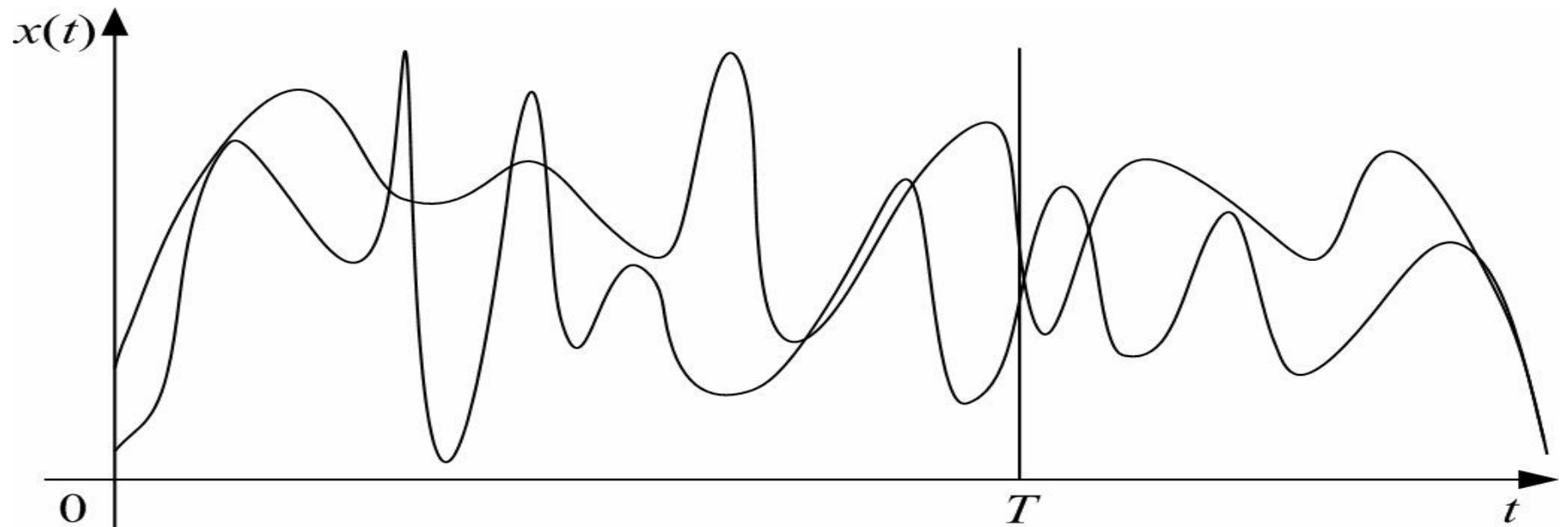
является разложением случайной функции $X(t)$ на конечном интервале наблюдения T

$$X(t) = m_x + \sum_{k=1}^{\infty} (Z_k \cdot \sin \omega_k t + U_k \cdot \cos \omega_k t)$$

- Коэффициенты разложения Z_k , U_k , C_k определяются по формулам Эйлера-Фурье. Z_k , U_k – некоррелированные центрированные случайные величины (амплитуды колебаний) с дисперсиями, одинаковыми для каждой пары случайных величин Z_k и U_k с одним и тем же индексом k .
- Координатными функциями разложения являются функции $\sin \omega_k t$ и $\cos \omega_k t$ при различных частотах ω_k .

Спектральное разложение

- Спектральное разложение представляет собой случайную функцию $X(t)$ в виде гармонических колебаний различных частот со случайными



- Для исследования спектрального разложения удобно представлять его в комплексной форме.

$$\sin \omega_k t = \frac{e^{j\omega_k t} - e^{-j\omega_k t}}{2j} = -j \frac{e^{j\omega_k t} - e^{-j\omega_k t}}{2};$$

$$\cos \omega_k t = \frac{e^{j\omega_k t} + e^{-j\omega_k t}}{2}.$$

$$X_k(t) = V_k \cdot e^{j\omega_k t} + V_{-k} e^{-j\omega_k t}.$$

Корреляционный момент

$$\begin{aligned} R_{V_k V_{-k}} &= M[V_k \bar{V}_{-k}] = M\left[\frac{U_k - jZ_k}{2} \cdot \frac{U_k - jZ_k}{2}\right] = M\left[\frac{(U_k - jZ_k)^2}{4}\right] = \\ &= \frac{1}{4} \{M[U_k^2] - 2jM[U_k Z_k] - M[Z_k^2]\} = \frac{1}{4}(D_k - D_k) = 0. \end{aligned}$$

$$D[V_k] = D[V_{-k}] = \frac{D_k}{2}.$$

корреляционная функция
случайного процесса $X(t)$

$$R_{xk}(t_1, t_2) = M \left[\overset{\circ}{X}_k(t_1) \cdot \overline{\overset{\circ}{X}_k(t_2)} \right],$$

$$\overset{\circ}{X}_k(t_1) = V_k \cdot e^{j\omega_k t} + V_{-k} \cdot e^{-j\omega_k t};$$

$$\overline{\overset{\circ}{X}_k(t_2)} = \overline{V}_k e^{-j\omega_k t} + \overline{V}_{-k} e^{j\omega_k t}.$$

корреляционная функция случайного процесса $X(t)$

$$\begin{aligned} R_{xk}(t_1, t_2) &= M[(V_k \cdot e^{j\omega_k t_1} + V_{-k} \cdot e^{-j\omega_k t_1})(\bar{V}_{-k} \cdot e^{-j\omega_k t_2} + \bar{V}_k \cdot e^{j\omega_k t_2})] = \\ &= M[|V_k|^2] \cdot e^{j\omega_k(t_1-t_2)} + M[|V_{-k}|^2] \cdot e^{-j\omega_k(t_1-t_2)} + M[V_k \cdot \bar{V}_{-k}] \cdot e^{j\omega_k(t_1+t_2)} + M[\bar{V}_k \cdot V_{-k}] e^{-j\omega_k(t_1+t_2)}, \end{aligned}$$

где $t_1 - t_2 = \tau$.

Дисперсия случайной гармоникой $X_k(t)$ при представлении её в комплексной форме делится пополам между гармоникой положительной частоты ω_k и отрицательной частоты $(-\omega_k)$

$$R_{xk}(t_1, t_2) = R_{xk}(\tau) = \frac{D_k}{2} e^{j\omega_k \tau} + \frac{D_k}{2} e^{-j\omega_k \tau}.$$

случайный процесс

- представим случайный процесс $X(t)$ в комплексной форме

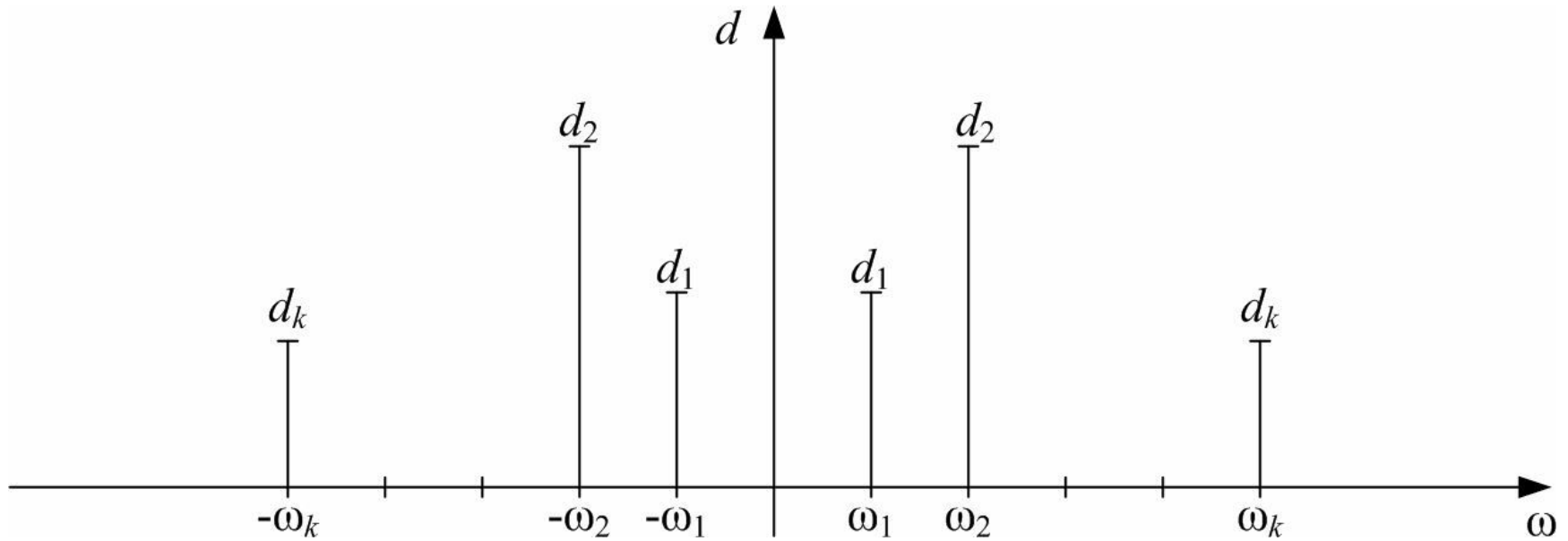
$$X(t) = m_x + \sum_{k=1}^{\infty} (V_k \cdot e^{j\omega_k t} + V_{-k} e^{-j\omega_k t}).$$

- Суммируем отдельно слагаемые, соответствующие положительным и отрицательным частотам.
- Заметим, что сумму отрицательных слагаемых можно выразить таким же образом, как и сумму положительных слагаемых $\sum_{k=1}^{-\infty} V_{-k} \cdot e^{j\omega_{-k} t} = \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cdot e^{j\omega_k t}$

Спектр дисперсий

- Распределение дисперсии по частотам определяет так называемый **спектр дисперсий** стационарной случайной функции.
- Спектр дисперсий можно изобразить на графике в виде линейчатого спектра

Спектр дисперсий



Спектр дисперсий

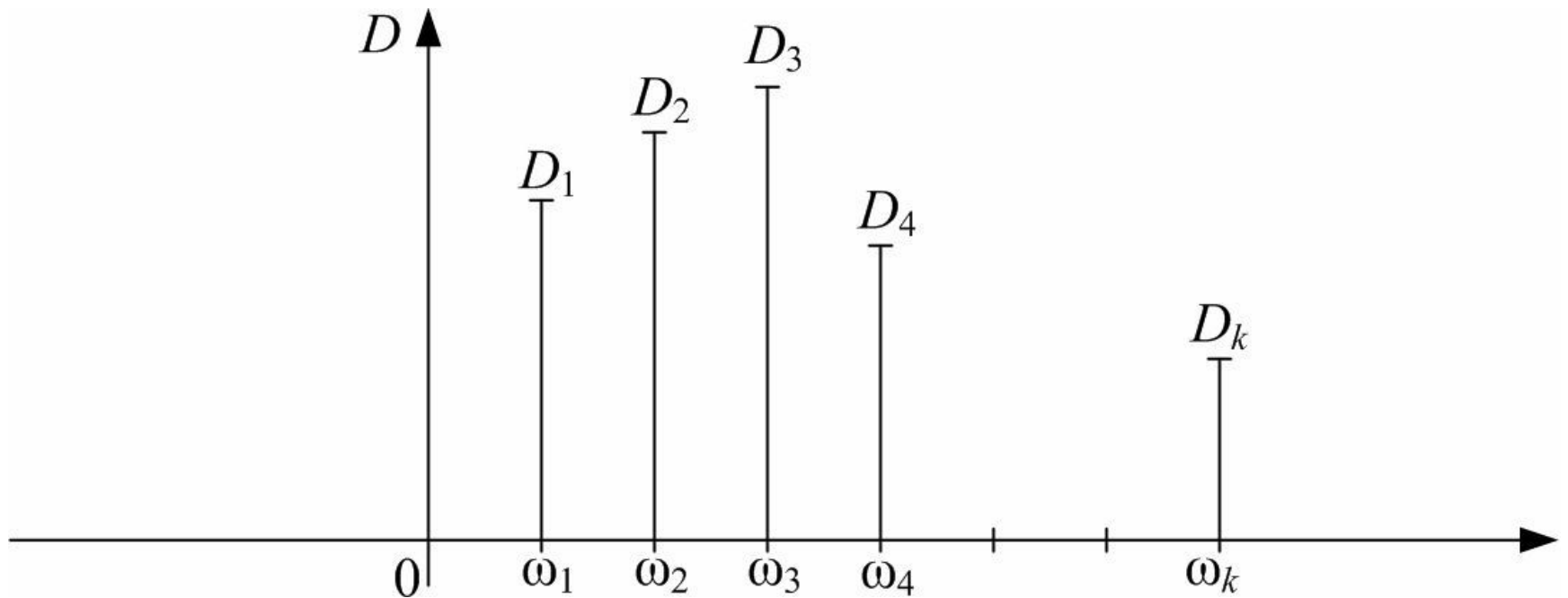
- Так как отрицательные частоты физически не существуют.

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{D_k}{2} e^{j\omega_k \tau} \quad R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} d_k \cdot e^{j\omega_k \tau} .$$

можно переписать только для
положительных частот

- $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$. При этом дисперсии, соответствующие этим частотам, необходимо удвоить.

Спектр дисперсий



$$R_x(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cdot e^{j\omega_k \tau} ;$$

$$D_x = \sum_{k=1}^{\infty} D_k .$$

- показывает, что дисперсия стационарного процесса $X(t)$ равна дисперсий всех гармоник его спектр

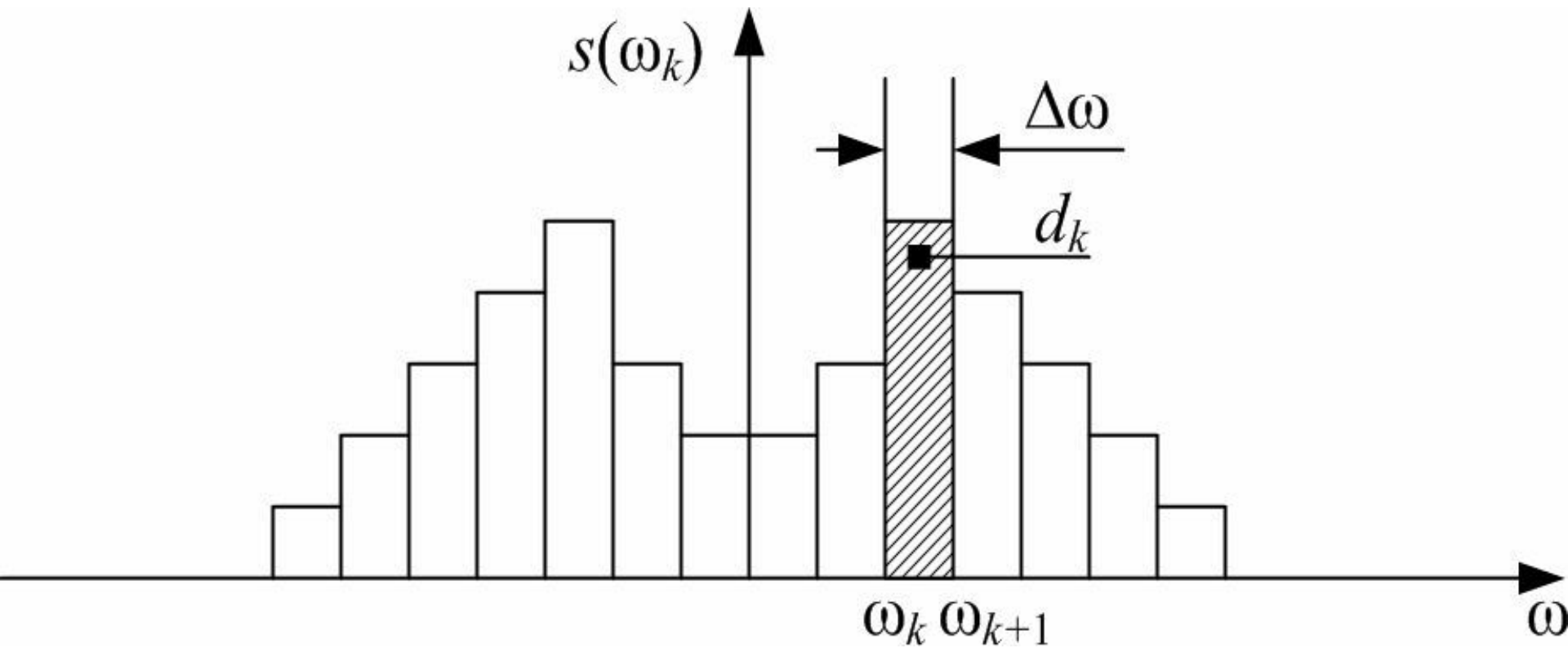
$$R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} d_k \cdot e^{j\omega_k \tau} .$$

- даёт разложение корреляционной функции $R_x(\tau)$ случайного процесса $X(t)$ в ряд Фурье, коэффициентами которого являются дисперсии d_k . А d_k вычисляются как коэффициенты ряда Фурье

Спектральное разложение стационарных случайных функций (процессов) в непрерывный спектр дисперсии

- Для этого будем рассматривать $X(t)$ при T стремящемся к бесконечности. Тогда расстояния между опорными частотами будут неограниченно уменьшаться.
- При этом дискретный спектр дисперсии будет неограниченно приближаться к непрерывному, в котором бесконечно малому интервалу частот $\Delta\omega_k = \omega_k - \omega_{k-1}$ будет соответствовать элементарная дисперсия $d_k(\omega_k)$.

Средняя плотность дисперсий



спектральная плотность

- $d_k/\Delta\omega$ имеет физический смысл **средней плотности дисперсии** и называется **спектральной плотностью**

$$s_x(\omega_k) = \frac{d_k}{\Delta\omega},$$

Переход от дискретного спектра к непрерывному

$$R_x(\tau) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} d_k \cdot e^{j\omega_k t};$$

$$D_x = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} d_k;$$

$$d_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R_x(\tau) \cdot e^{-j\omega_k \tau} \cdot d\tau, k = \pm 1, \pm 2,$$

$$V_k \rightarrow V(\omega_k) \cdot \Delta\omega;$$

$$X(t) = m_x + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} V_k \cdot e^{j\omega_k t};$$

$$X(t) = m_x + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} V(\omega_k) \cdot e^{j\omega_k t} \cdot \Delta\omega.$$

Переход от дискретного спектра к непрерывному

$$R_x(\tau) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} s_x(\omega_k) \cdot e^{j\omega_k \tau} \cdot \Delta\omega;$$

$$D_x = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} S_x(\omega_k) \cdot \Delta\omega.$$

$$\frac{d_k}{\Delta\omega} = S_x(\omega_k), \quad \Delta\omega = \frac{\pi}{T}; \quad \Delta\omega \cdot T = \pi; \quad \frac{1}{\Delta\omega} = \pi, \quad T = \frac{T}{\pi}.$$

$$s_x(\omega_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T R_x(\tau) \cdot \tau^{-j\omega_k \tau} \cdot d\tau.$$

$$T \rightarrow \infty; \quad (-T) \rightarrow -\infty;$$

$$\Delta\omega \rightarrow d\omega; \quad \omega_k \rightarrow \omega$$

Переход от дискретного спектра к непрерывному

$$X(t) = m_x + \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega;$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} \cdot d\omega;$$

$$D_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) \cdot d\omega;$$

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau.$$

- Формула, выражающая корреляционную функцию стационарного случайного процесса через её спектральную плотность, была впервые получена в начале 30-х годов для ограниченного класса случайных процессов американским математиком, «отцом» кибернетики Норбертом Винером (1894- 1964).
- Несколько позже эту формулу для любых стационарных случайных процессов вывел советский математик Александр Яковлевич Хинчин (1894- 1959).
- Поэтому формулы, связывающие $R_x(\tau)$, $S_x(\omega)$ называют **формулами Винера-Хинчина**.

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau. \quad R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} \cdot d\omega$$

плотность распределения дисперсии

- Графический смысл предельного перехода от конечного интервала $[0, T]$ к бесконечному при $T \rightarrow \infty, \Delta\omega \rightarrow 0$ выражается в том, что ступенчатая функция $sx(\omega k)$ будет неограниченно приближаться к непрерывной функции $sx(\omega)$, которая будет изображать **плотность распределения дисперсии случайных амплитуд по частотам непрерывного спектра.**

спектральной плотностью стационарного случайного процесса

- Непрерывная функция $s_x(\omega)$ называется **спектральной плотностью стационарного случайного процесса**. $s_x(\omega)$ характеризует частотный состав стационарного случайного процесса $X(t)$ и полностью определяется его корреляционной функцией $R_x(\tau)$

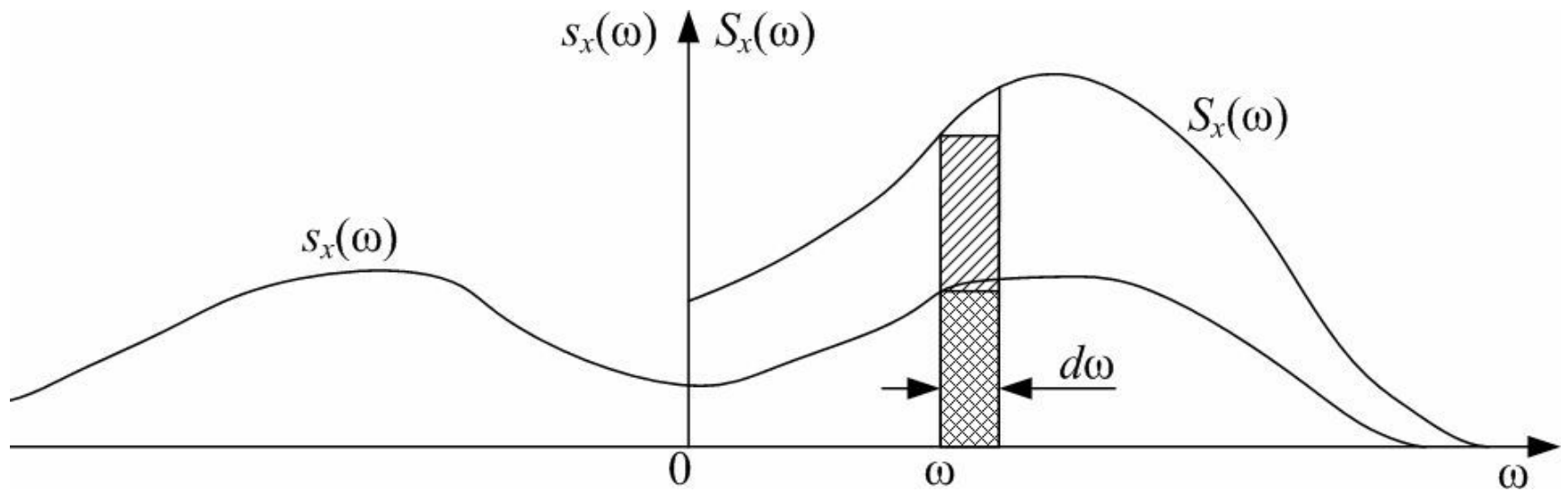
$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} \cdot d\omega$$

Разложение дисперсии

$$D_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) \cdot d\omega ;$$

- представляет собой разложение дисперсии D_x на сумму элементарных слагаемых $s_x(\omega)d\omega$, каждая из которых представляет собой дисперсию, приходящуюся на элементарный бесконечно малый интервал частот $d\omega$, прилежащей к точке ω при $(-\infty < \omega < \infty)$.

Спектральная плотность стационарного случайного процесса



$$D_x = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cdot d\omega,$$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau = 2s_x(\omega),$$

$$R_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} \cdot d\omega.$$

нормированная спектральная плотность

$$S_x^H(\omega) = \frac{\zeta_x(\omega)}{D_x},$$

$$S_x^H(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{D_x}.$$

Свойства спектральной плотности

- Спектральная плотность действительного стационарного случайного процесса является чётной действительной функцией аргумента ω
- Дисперсия действительного стационарного случайного процесса равна интегралу от спектральной плотности этого процесса в бесконечных пределах

$$D_x = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cdot d\omega,$$

- Спектральная плотность стационарного случайного процесса – функция неотрицательная.

Корреляционные функции и спектральные плотности типовых стационарных процессов

- **Белый шум**
- **Формирующий фильтр**
- **Нерегулярная качка**

Белый шум

- Белый шум – это центрированный случайный процесс $X(t)$ с некоррелированными сечениями.
- корреляционная функция белого шума

$$R_x(t_1, t_2) = G(t)\delta(t_1 - t_2) = R_x(\tau).$$

Белый шум

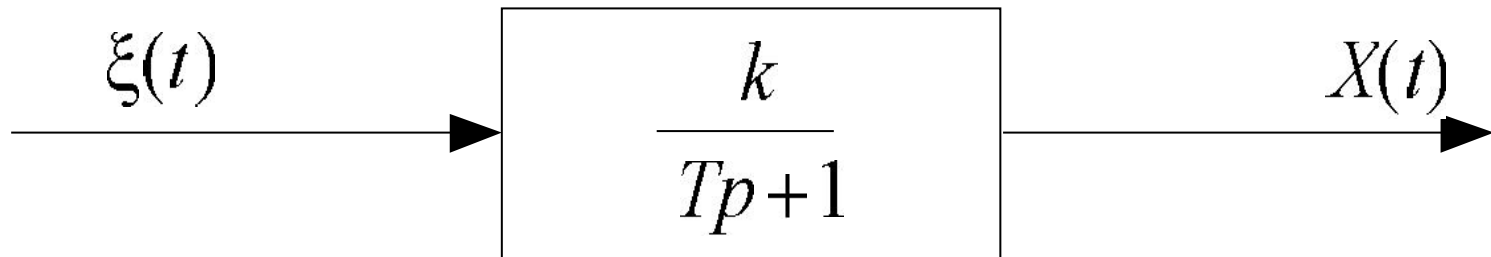
- Множитель $G(t) = G(t_1) = G(t_2)$ называется интенсивностью белого шума.
- Если $G(t) = G$ – белый шум стационарный.
- Белый шум – идеализированная случайная функция, реализовать которую на практике невозможно.

спектральная плотность

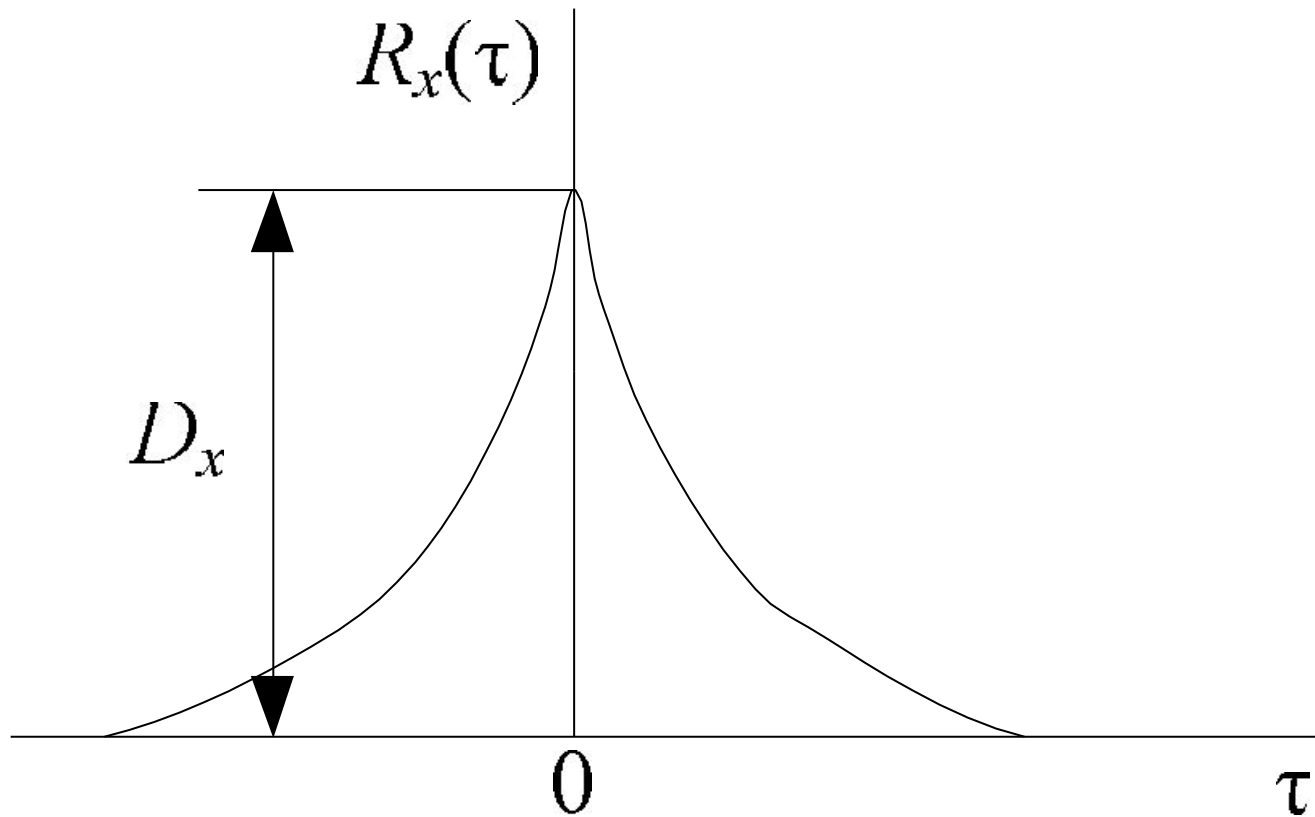
$$\begin{aligned} s_x(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau = \frac{G}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{G}{2\pi} \cdot e^{-j\omega\tau} = \frac{G}{2\pi} = \text{const} \Rightarrow G(t) = 2\pi \cdot S(t), \quad \text{при } \tau = 0 \end{aligned}$$

Формирующий фильтр

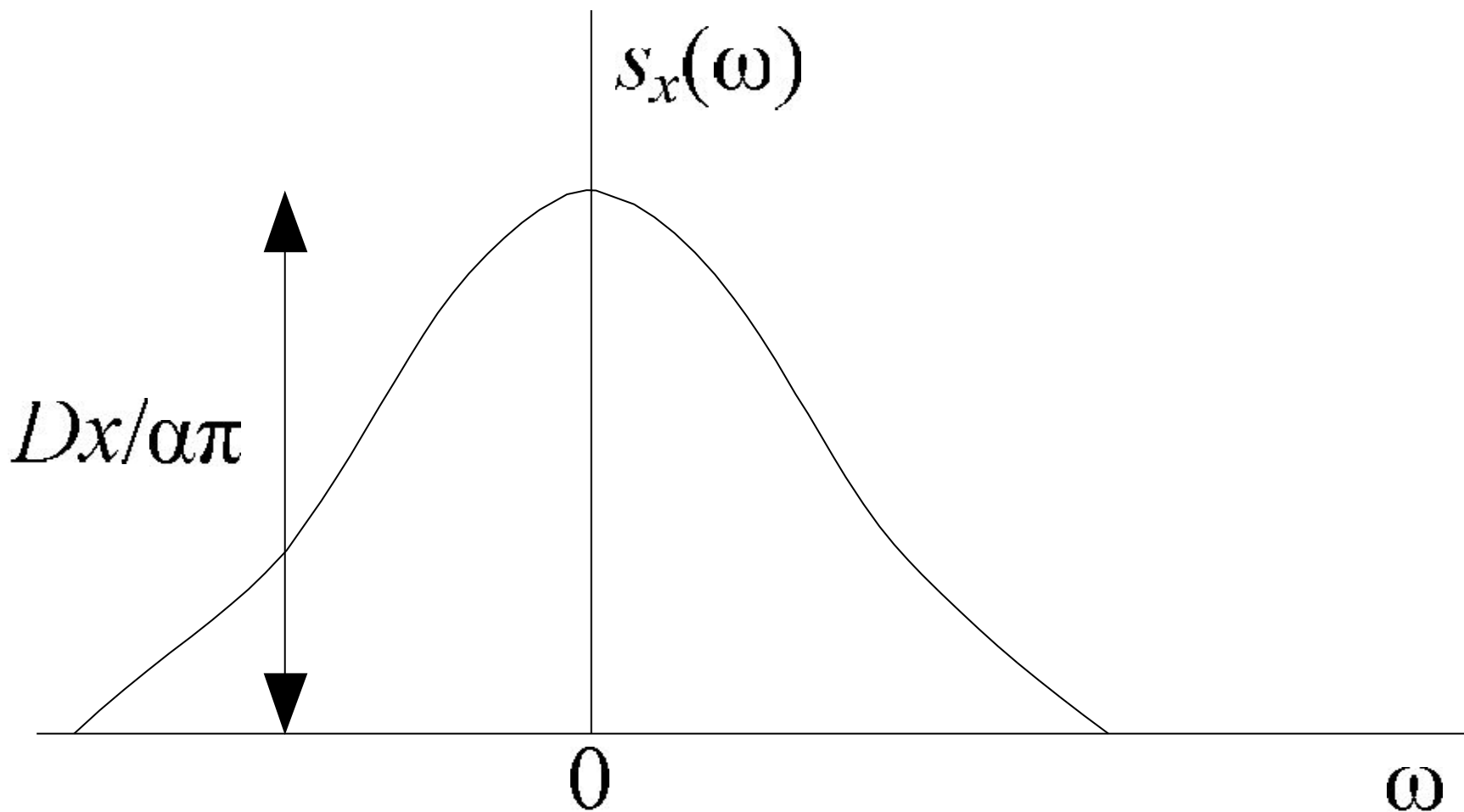
- Из белого шума $\xi(t)$ можно получить случайный процесс с заданными характеристиками, пропуская $\xi(t)$ через апериодическое звено.



Корреляционная функция формирующего фильтра



спектральная плотность формирующего фильтра



Экспоненциальная корреляционная функция

$$R_x(t) = D_x \cdot e^{-\alpha|t|}.$$

Спектральная плотность

$$s_x(\omega) = \frac{D_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau,$$

где учтено, что $|\tau| = \begin{cases} \tau & \text{при } \tau > 0 \\ -\tau & \text{при } \tau < 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} s_x(\omega) &= \frac{D_x}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-j\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)\tau} d\tau \right] = \frac{D_x}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha-j\omega} + \frac{1}{\alpha+j\omega} \right) = \\ &= \frac{D_x}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)}. \end{aligned}$$

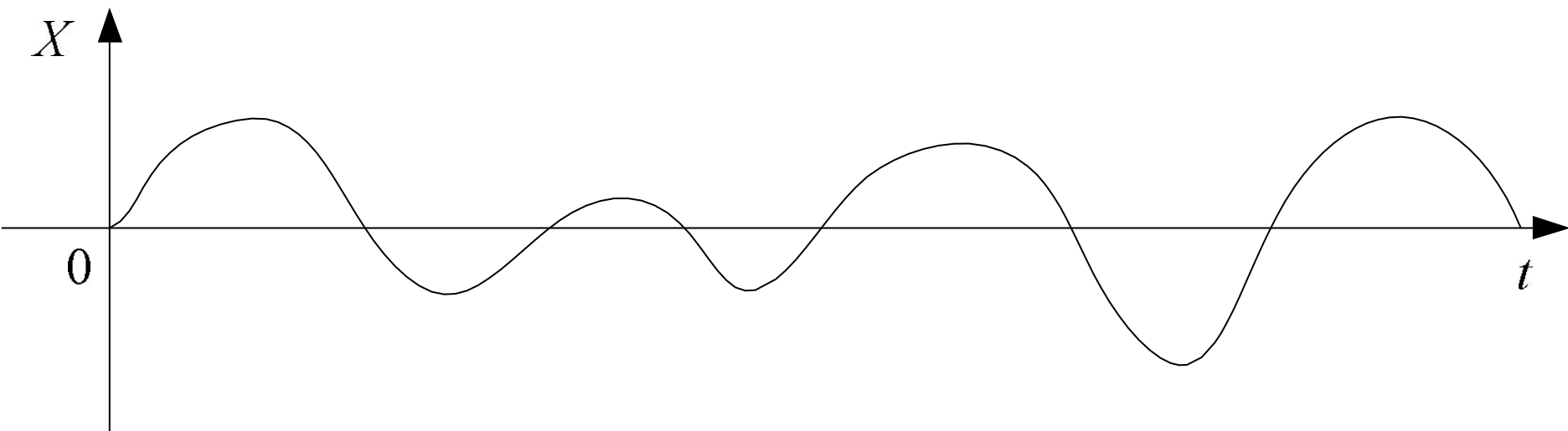
Формирующий фильтр

- При уменьшении параметра α (при возрастании постоянной времени T) корреляционная функция будет убывать медленнее, что соответствует более плавным реализациям случайного процесса $X(t)$.
- Кривая $s_x(\omega)$ при этом вытягивается вверх, сжимаясь с боков, т.е. повышается удельный вес низких частот.
- При $\alpha \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow 0$) $X(t)$ вырождается в белый шум.

Нерегулярная качка

- Некоторые объекты, например корабли, самолёты, находясь под действием нерегулярных возмущений (волнение моря, турбулентность атмосферы), движутся по случайному закону.
- Получающееся при этом случайное движение объекта называют нерегулярной качкой, в отличие от регулярной качки, представляющей собой периодическое движение.

Нерегулярная качка



Корреляционная функция

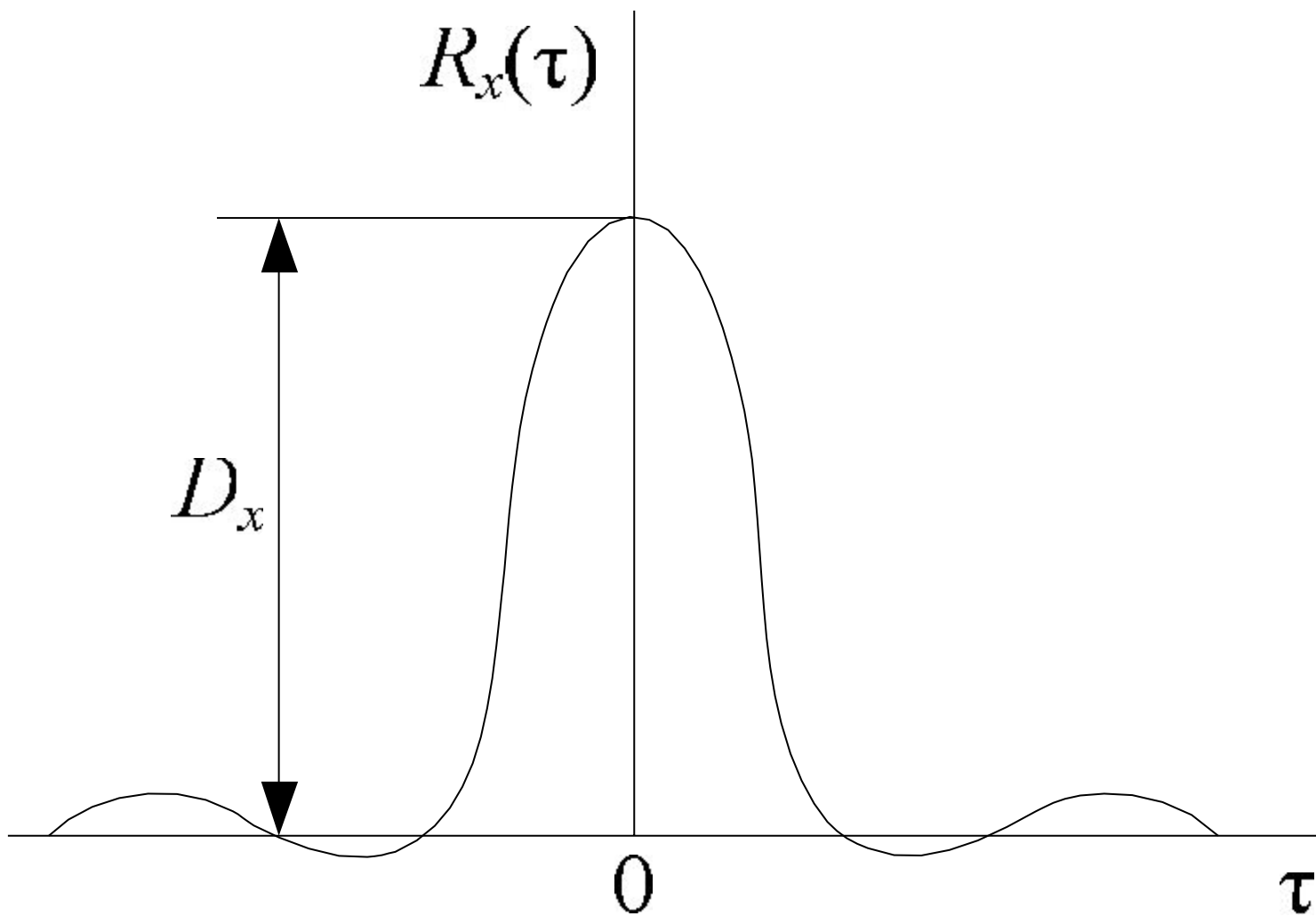
$$R_x(\tau) = D_x \cdot e^{-\alpha|\tau|} \cdot \cos \omega_0 \tau.$$

Выражение является экспоненциально-косинусной корреляционной функцией, где ω_0 – резонансная частота, α – параметр затухания, D_x – дисперсия.

Спектральная плотность

$$\begin{aligned}\zeta_x(\omega) &= \frac{D_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - j\omega\tau} \cdot \cos \omega_0 \tau \cdot d\tau = \frac{D_x}{4\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^{(\alpha - j\omega + j\omega_0)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega - j\omega_0)\tau} d\tau + \right. \\ &\left. + \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha - j\omega - j\omega_0)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega + j\omega_0)\tau} d\tau \right] = \frac{D_x \cdot \alpha}{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\omega_0 - \omega)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega_0 + \omega)^2} \right].\end{aligned}$$

Корреляционная функция



Спектральная плотность

