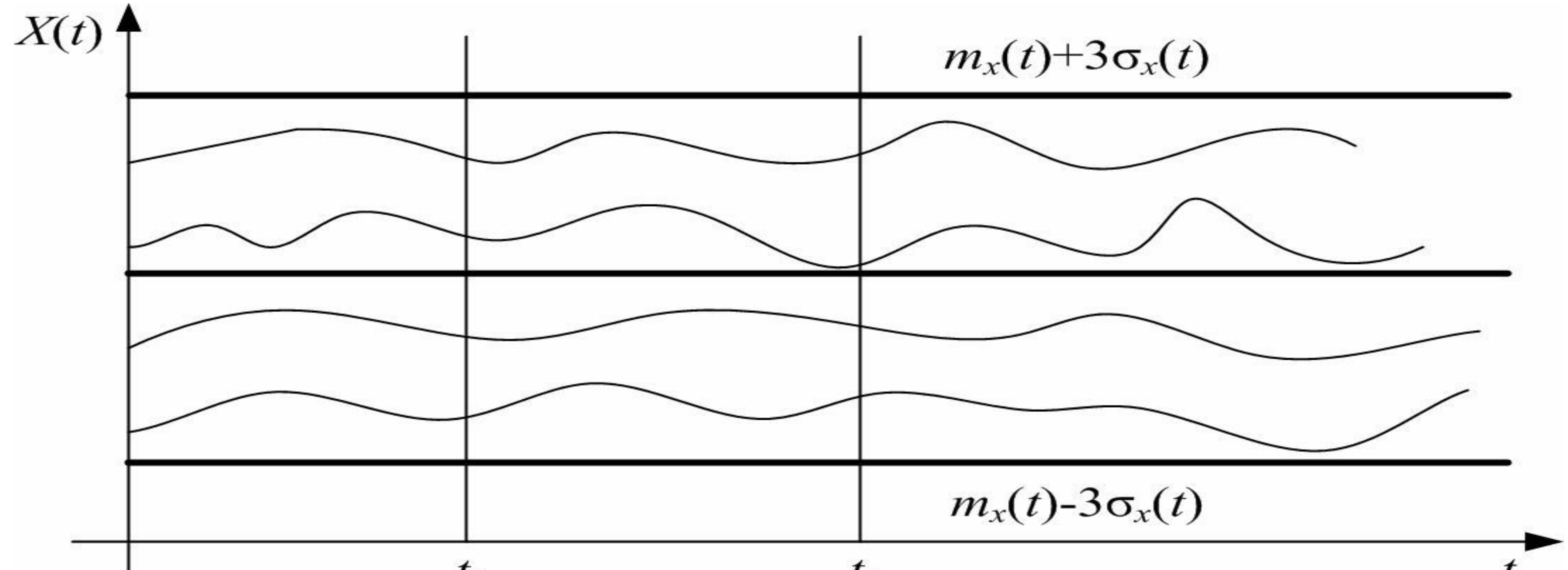
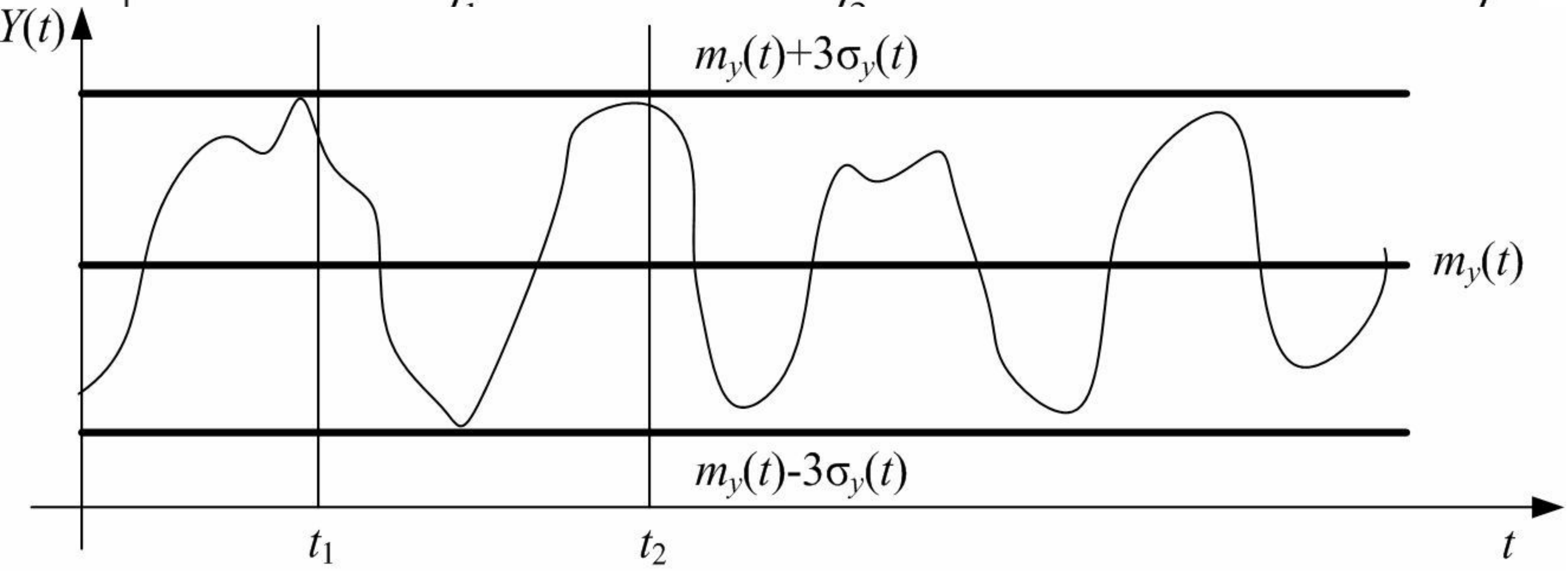
Корреляционный и спектральный анализ случайных процессов

Случайные процессы с одинаковыми параметрами





Корреляционная функция

- **Корреляционная функция** – такая неслучайная функция $Rx(t1, t2)$ двух аргументов, которая для любой пары фиксированных значений аргументов $t1$ и $t2$ равна корреляционному моменту, соответствующих этим сечениям случайных величин $x(t1)$ и $x(t2)$.

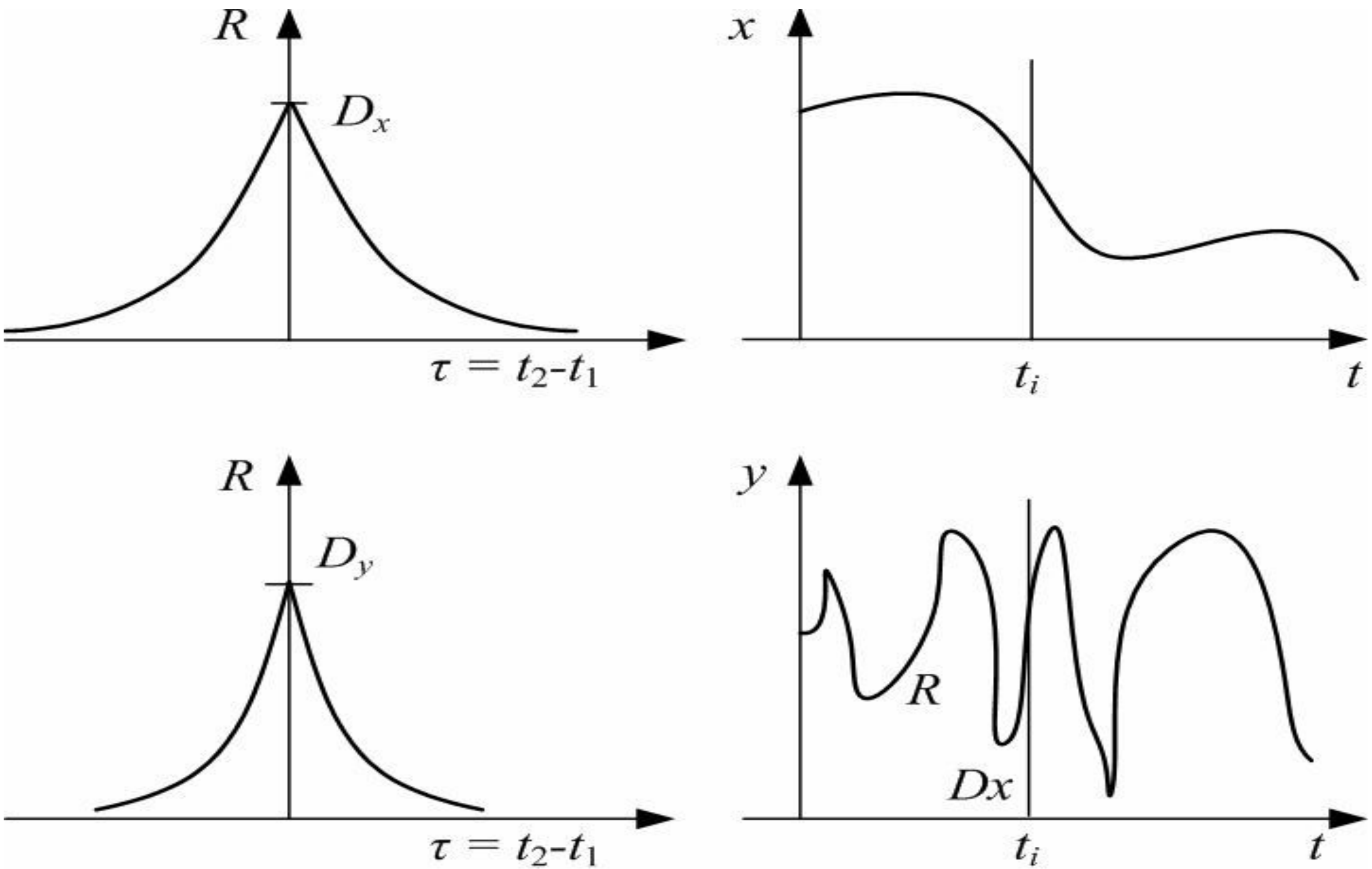
автокорреляционная функция

- Корреляционная функция математически выражает корреляцию двух функций или корреляцию функции с самой собой (**автокорреляционная фун**

$$R_x(t_1,t_2)=M\left[\overset{\circ}{x}(t_1)\cdot\overset{\circ}{x}(t_2)\right],$$

- где *t*1 и *t*2 – любые моменты времени

Корреляционные функции двух различных процессов



При совпадении моментов $t1$ и $t2$ корреляционная функция равна дисперсии

Нормированная корреляционная функция

- Нормированная корреляционная функция вычисляется по формуле

$$\rho_x(t_1,t_2)=\frac{R_x(t_1,t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)},$$

$$-1\le\rho_x(t_1,t_2)\le 1,$$

$$R_x(t_1,t_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[x_1-m_x(t_1)][x_2-m_x(t_2)]\omega_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2.$$

Корреляционная функция

- Знание о случайном процессе будет тем полнее, чем больше сечений будем рассматривать совместно и, следовательно, чем больше размерность плотности вероятности.
- Следовательно рассматривая *n* сечений нужно знать *n*- мерную плотность.
- Для полного описания случайного процесса необходимо знать бесконечномерную плотность вероятности. На практике обычно ограничиваются знанием первой и второй плотности вероятности.

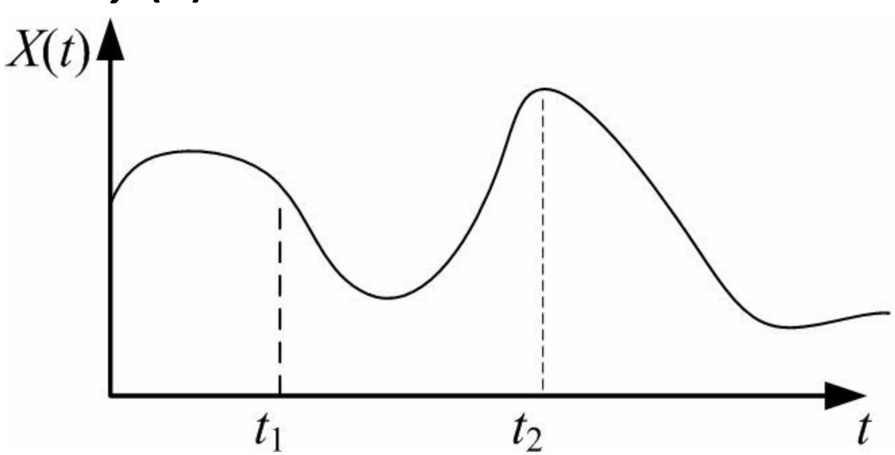
Корреляционная функция

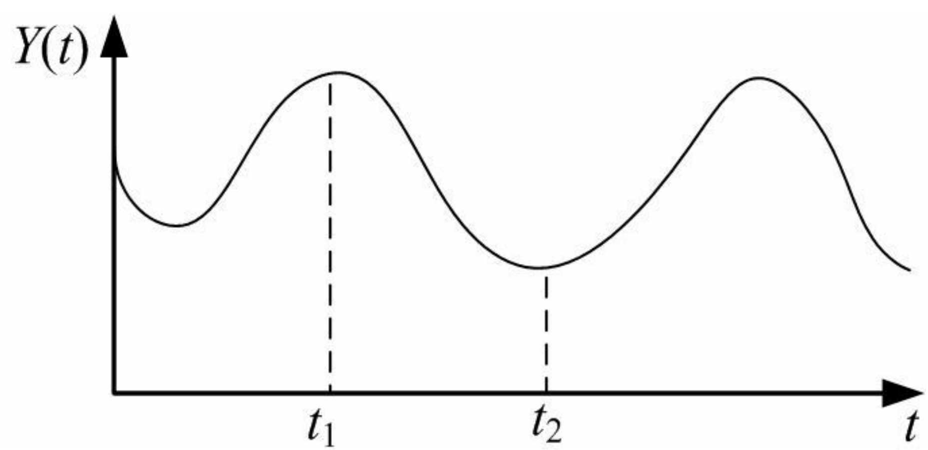
- Чтобы установить связь, между $X(t)$ и $Y(t)$ вводится понятие **взаимной корреляционной** функции (**корреляционная функция связи**), показывающая связь двух и более сечений процессов $x(t)$ и $y(t)$

$$R_{xy}(t_1,t_2)=M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)],$$

$$R_{xy}(t_1,t_2)\neq R_{yx}(t_1,t_2),$$

$$R_{xy}(t_1,t_2)=R_{yx}(t_2,t_1).$$





- корреляционная функция связи

$$R_{xy}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x-m_x(t_1)][y-m_y(t_2)]\omega_{11}(x,y;t_1,t_2)dxdy.$$

- нормированная корреляционная функция связи

$$\rho_{xy}(t_1,t_2)=\frac{R_{xy}(t_1,t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)};$$

Свойства корреляционных и взаимно корреляционных функций

- Корреляционная функция $Rx(t1, t2)$ симметрична относительно своих аргументов.
- Корреляционная функция комплексной случайной функции при перестановке аргументов заменяется комплексной сопряжённой функцией.

Свойства корреляционных и взаимно корреляционных функций

- При добавлении к случайной функции $X(t)$ произвольного неслучайного слагаемого, корреляционная функция случайной величины не изменяется

Свойства корреляционных и взаимно корреляционных функций

- При умножении случайной функции $X(t)$ на произвольный неслучайный множитель $\psi(t)$ корреляционная функция $Rx(t1, t2)$ умножается на $\psi(t1)\psi(t2)$.

Свойства корреляционных и взаимно корреляционных функций

$$\left|K_x(t_1,t_2)\right| \le \sqrt{D_x(t_1)D_x(t_2)}\,.$$

Свойства корреляционных и взаимно корреляционных функций

- Корреляционная функция является положительно определённой функцией
- т.е. дисперсия случайной функции всегда неотрицательна.

Свойства корреляционных и взаимно корреляционных функций

- Взаимная корреляционная функция двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ не изменяется при добавлении к этим случайным функциям произвольных неслучайных функций.

Свойства корреляционных и взаимно корреляционных функций

Если $U(t) = \psi_1(t)X(t)$; $V(t) = \psi_2(t)Y(t)$, то $R_{UV}(t_1, t_2) = \psi_1(t_1)\psi_2(t_2)R_{xy}(t_1, t_2)$.

$\left|R_{xy}(t_1, t_2)\right| \le \sqrt{D_x(t_1)D_y(t_2)}$.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

- **Спектр** стационарного случайного процесса характеризует распределение дисперсий случайных амплитуд по частотам.
- Спектральное разложение

$$X(t) = m_x + \sum_{k=1}^{\infty} (Z_k \cdot \sin \omega_k t + U_k \cdot \cos \omega_k t)$$

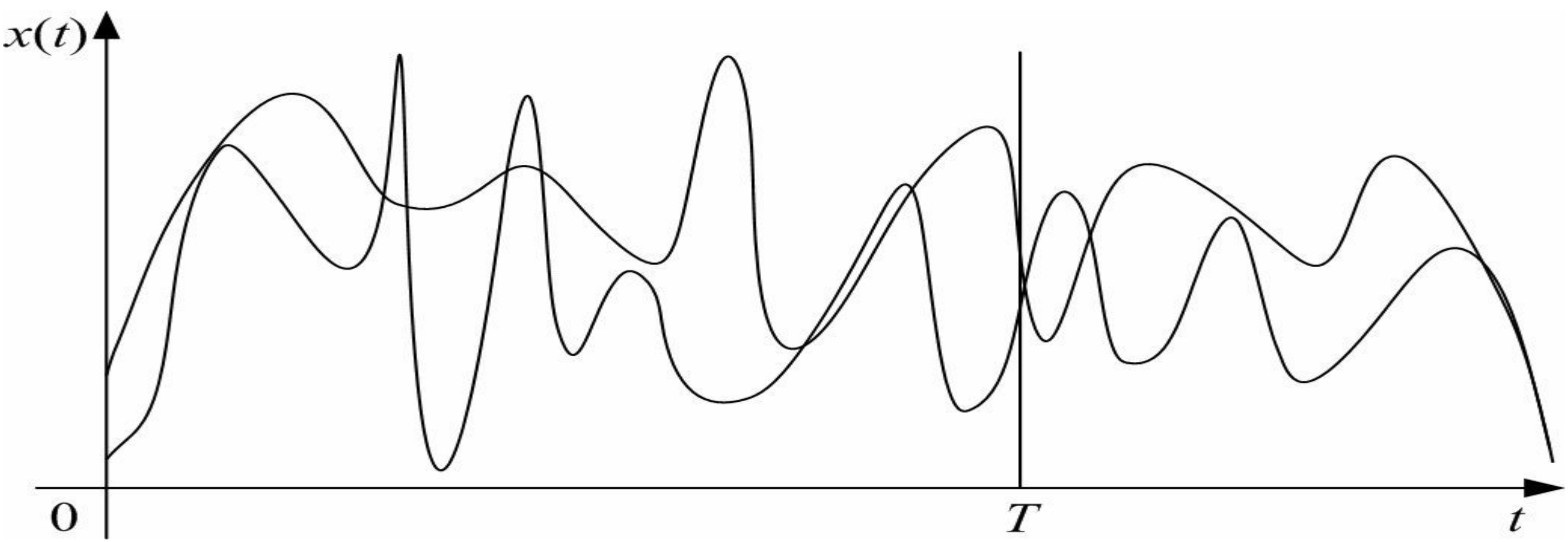
является разложением случайной функции *X*(*t*) на конечном интервале наблюдения *T*

$$X(t) = m_x + \sum_{k=1}^{\infty} (Z_k \cdot \sin \omega_k t + U_k \cdot \cos \omega_k t)$$

- Коэффициенты разложения *Zk*, *Uk*, *Ck* определяются по формулам Эйлера-Фурье. *Zk*, *Uk* – некоррелированные центрированные случайные величины (амплитуды колебаний) с дисперсиями, одинаковыми для каждой пары случайных величин *Zk* и *Uk* с одним и тем же индексом *k.*
- Координатными функциями разложения являются функции sin w*kt* и cos w*kt* при различных частотах w*k*.

Спектральное разложение

- Спектральное разложение представляет собой случайную функцию *X*(*t*) в виде гармонических колебаний различных частот со случайными



- Для исследования спектрального разложения удобно представлять его в комплексной форме.

$$\sin\omega_k t = \frac{e^{j\omega_k t} - e^{-j\omega_k t}}{2j} = -j\frac{e^{j\omega_k t} - e^{-j\omega_k t}}{2};$$

$$\cos\omega_k t = \frac{e^{j\omega_k t} + e^{-j\omega_k t}}{2}.$$

$$X_k(t) = V_k \cdot e^{j\omega_k t} + V_{-k} e^{-j\omega_k t}.$$

Корреляционный момент

$$R_{V_k V_{-k}} = M\left[V_k \overline{V}_{-k}\right] = M\left[\frac{U_k - jZ_k}{2} \cdot \frac{U_k - jZ_k}{2}\right] = M\left[\frac{(U_k - jZ_k)^2}{4}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{M\left[U_k{}^2\right] - 2jM\left[U_k Z_k\right] - M\left[Z_k^2\right]\right\} = \frac{1}{4}(D_k - D_k) = 0.$$

$$D\left[V_k\right] = D\left[V_{-k}\right] = \frac{D_k}{2}.$$

корреляционная функция случайного процесса *X* (*t*)

$$R_{xk}(t_1,t_2) = M\left[\left[\overset{\circ}{X}_k(t_1)\cdot\overline{\overset{\circ}{X}_k(t_2)}\right]\right],$$

$$\overset{\circ}{X}_k(t_1) = V_k\cdot e^{j\omega_k t} + V_{-k}\cdot e^{-j\omega_k t};$$

$$\overline{\overset{\circ}{X}_k(t_2)} = \overline{V}_k e^{-j\omega_k t} + \overline{V}_{-k} e^{j\omega_k t}.$$

корреляционная функция случайного процесса *X* (*t*)

$$R_{xk}(t_1,t_2) = M\left[(V_k \cdot e^{j\omega_k t_1} + V_{-k} \cdot e^{-j\omega_k t_1})(\overline{V}_{-k} \cdot e^{-j\omega_k t_2} + \overline{V}_{-k} \cdot e^{j\omega_k t_2})\right] =$$

$$= M\left[\left|V_k\right|^2\right] \cdot e^{j\omega_k (t_1 - t_2)} + M\left[\left|V_{-k}\right|^2 \cdot e^{-j\omega_k (t_1 - t_2)}\right] + M\left[V_k \cdot \overline{V}_{-k}\right] \cdot e^{j\omega_k (t_1 + t_2)} + M\left[\overline{V}_k \cdot V_{-k}\right] e^{-j\omega_k (t_1 + t_2)},$$

где $t_1 - t_2 = \tau$.

Дисперсия случайной гармоники *Xk*(*t*) при представлении её в комплексной форме делится пополам между гармоникой положительной частоты w*k* и отрицательной частоты (–w*k*)

$$R_{xk}(t_1,t_2) = R_{xk}(\tau) = \frac{D_k}{2} e^{j\omega_k \tau} + \frac{D_k}{2} e^{-j\omega_k \tau}.$$

случайный процесс

- представим случайный процесс *X*(*t*) в комплексной форме

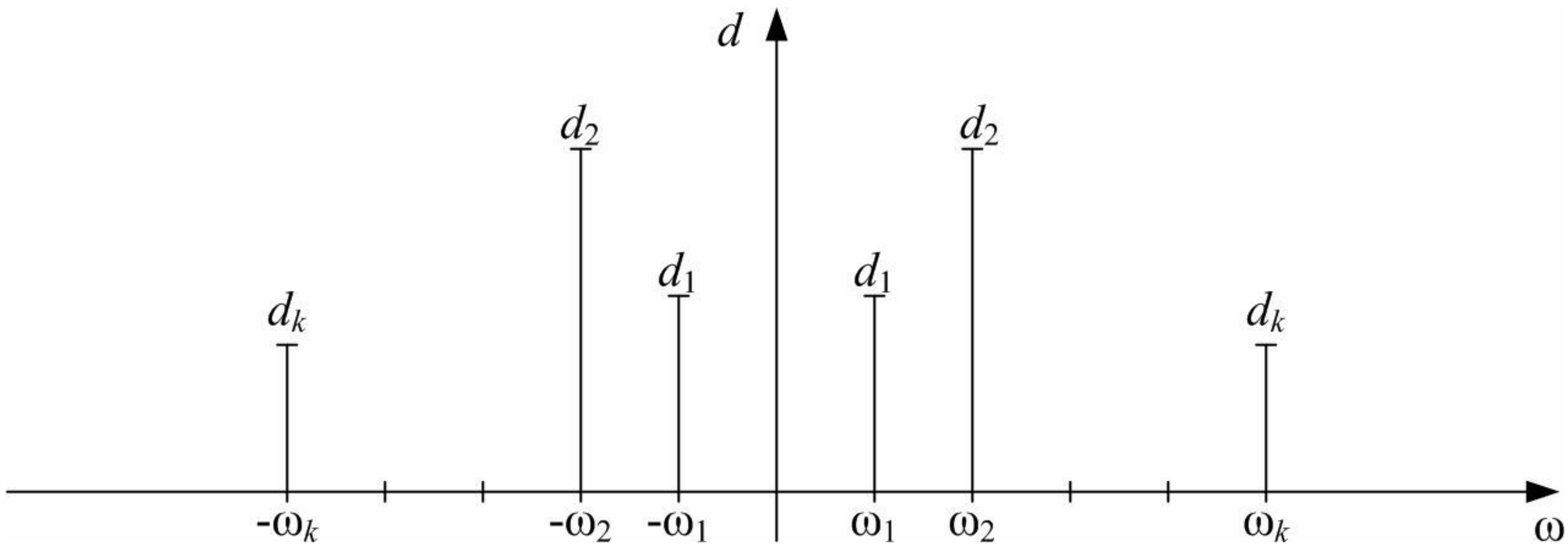
$$X(t) = m_x + \sum_{k=1}^{\infty}(V_k \cdot e^{j\omega_k t} + V_{-k} e^{-j\omega_k t}).$$

- Суммируем отдельно слагаемые, соответствующие положительным и отрицательным частотам.
- Заметим, что сумму отрицательных слагаемых можно выразить таким же образом, как и сумму положите $\sum_{k=1}^{-\infty} V_{-k} \cdot e^{j\omega_{-k} t} = \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cdot e^{j\omega_k t}$ слагаемых

Спектр дисперсий

- Распределение дисперсии по частотам определяет так называемый **спектр дисперсий** стационарной случайной функции.
- Спектр дисперсий можно изобразить на графике в виде линейчатого спектра

Спектр дисперсий



Спектр дисперсий

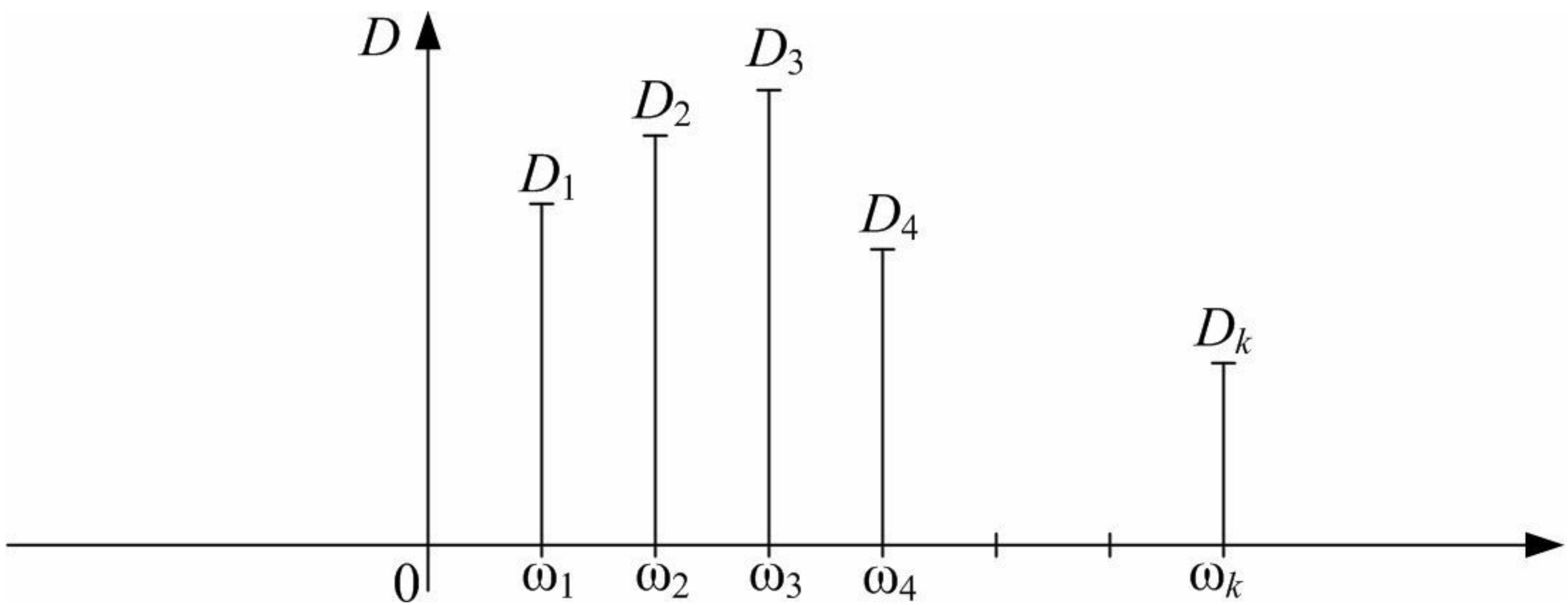
- Так как отрицательные частоты физически не существуют.

$$R_x(t_{1,}t_2) = R_x(\tau) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{D_k}{2} e^{j\omega_k \tau} \quad R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} d_k \cdot e^{j\omega_k \tau}.$$

можно переписать только для положительных частот

- w1, w2, … w*k*. При этом дисперсии, соответствующие этим частотам, необходимо удвоить.

Спектр дисперсий



$$R_x(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cdot e^{j\omega_k \tau};$$

$$D_x = \sum_{k=1}^{\infty} D_k .$$

- показывает, что дисперсия стационарного процесса *X*(*t*) равна дисперсий всех гармоник его спектр

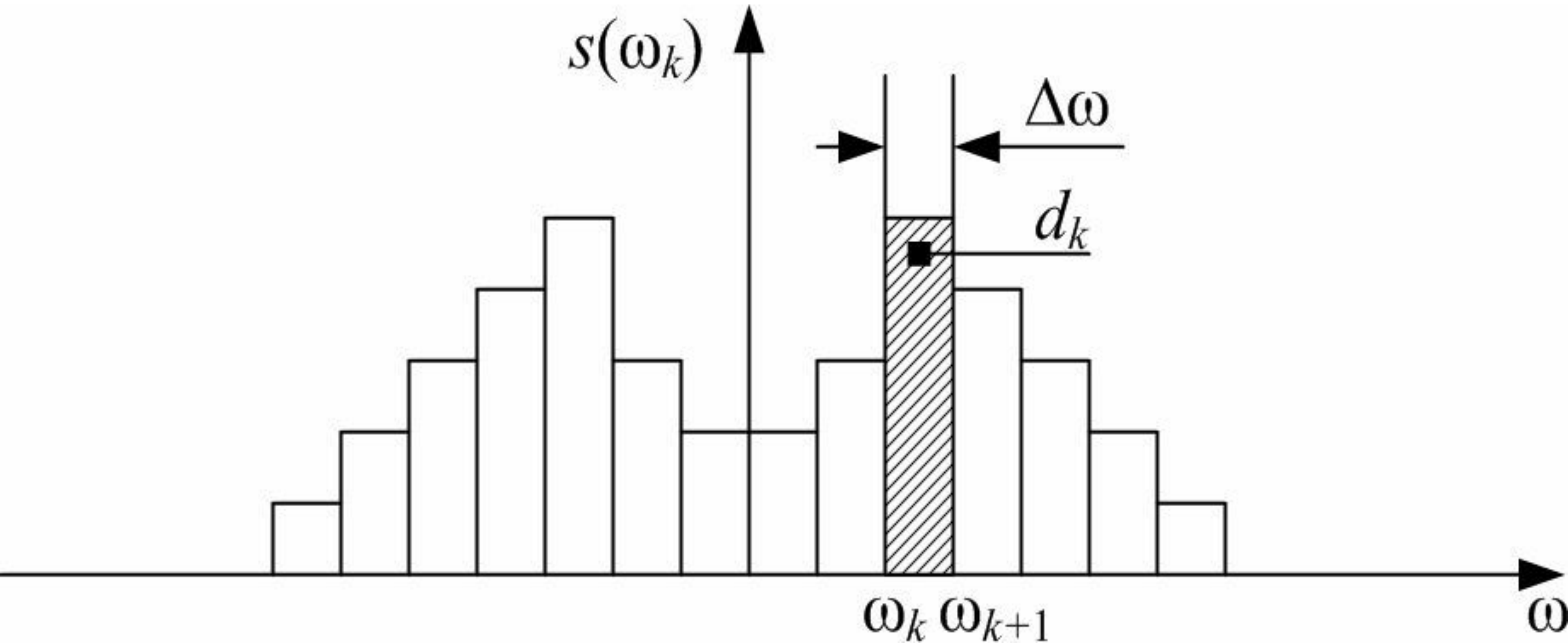
$$R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} d_k \cdot e^{j\omega_k \tau} .$$

- даёт разложение корреляционной функции *Rx*(т) случайного процесса *X*(*t*в ряд Фурье, коэффициентами которого являются дисперсии *dk*. А *dk* вычисляются как коэффициенты ряда Фурье

Спектральное разложение стационарных случайных функций (процессов) в непрерывный спектр дисперсии

- Для этого будем рассматривать $X(t)$ при T *стремящемуся к бесконечности*. Тогда расстояния между опорными частотами будут неограниченно уменьшаться.
- При этом дискретный спектр дисперсии будет неограниченно приближаться к непрерывному, в котором бесконечно малому интервалу частот $\Delta\omega_k = \omega_k - \omega_{k-1}$ будет соответствовать элементарная дисперсия $d_k(\omega_k)$.

Средняя плотность дисперсий



спектральная плотность

- $d_k/\Delta\omega$ имеет физический смысл **средней плотности дисперсии** и называется **спектральной плотностью**

$$s_x(\omega_k) = \frac{d_k}{\Delta\omega},$$

Переход от дискретного спектра к непрерывному

$$R_x(\tau) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} d_k \cdot e^{j\omega_k t};$$

$$D_x = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} d_k;$$

$$d_k = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} R_x(\tau)\cdot e^{-j\omega_k \tau}\cdot d\tau, k = \pm 1, \pm 2,$$

$$V_k \to V(\omega_k)\cdot \Delta\omega;$$

$$X(t) = m_x + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} V_k \cdot e^{j\omega_k t};$$

$$X(t) = m_x + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} V(\omega_k)\cdot e^{j\omega_k t}\cdot \Delta\omega.$$

Переход от дискретного спектра к непрерывному

$$R_x(\tau) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} s_x(\omega_k) \cdot e^{j\omega_k \tau} \cdot \Delta\omega\,;$$

$$D_x = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} S_x(\omega_k) \cdot \Delta\omega.$$

$$\frac{d_k}{\Delta\omega} = S_x(\omega_k),\ \Delta\omega = \frac{\pi}{T}; \quad \Delta\omega \cdot T = \pi; \quad \frac{1}{\Delta\omega} = \pi, \quad T = \frac{T}{\pi}$$

$$s_x(\omega_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} R_x(\tau) \cdot \tau^{-j\omega_k \tau} \cdot d\tau\,.$$

$$T \to \infty; (-T) \to -\infty;$$
$$\Delta\omega \to d\omega;\ \omega_k \to \omega$$

Переход от дискретного спектра к непрерывному

$$X(t) = m_x + \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega \,;$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} \cdot d\omega \,;$$

$$D_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) \cdot d\omega \,;$$

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\omega \,.$$

- Формула, выражающая корреляционную функцию стационарного случайного процесса через её спектральную плотность, была впервые получена в начале 30-х годов для ограниченного класса случайных процессов американским математиком, «отцом» кибернетики Норбертом Винером (1894- 1964).
- Несколько позже эту формулу для любых стационарных случайных процессов вывел советский математик Александр Яковлевич Хинчин (1894- 1959).
- Поэтому формулы, связывающие *Rx*(т), *Sx*(w) называют **формулами Винера-Хинчина**.

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\omega . \qquad R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} \cdot d\omega$$

плотность распределения дисперсии

- Графический смысл предельного перехода от конечного интервала [0, *T*] к бесконечному при $T \to \infty$, $\Delta\omega \to 0$ выражается в том, что ступенчатая функция $sx(wk)$ будет неограниченно приближаться к непрерывной функции $sx(w)$, которая будет изображать **плотность распределения дисперсии случайных амплитуд по частотам непрерывного спектра**.

спектральной плотностью стационарного случайного процесса

- Непрерывная функция $s_x(\omega)$ называется **спектральной плотностью стационарного случайного процесса**. $s_x(\omega)$ характеризует частотный состав стационарного случайного процесса $X(t)$ и полностью определяется его корреляционной функцией Rx(т)

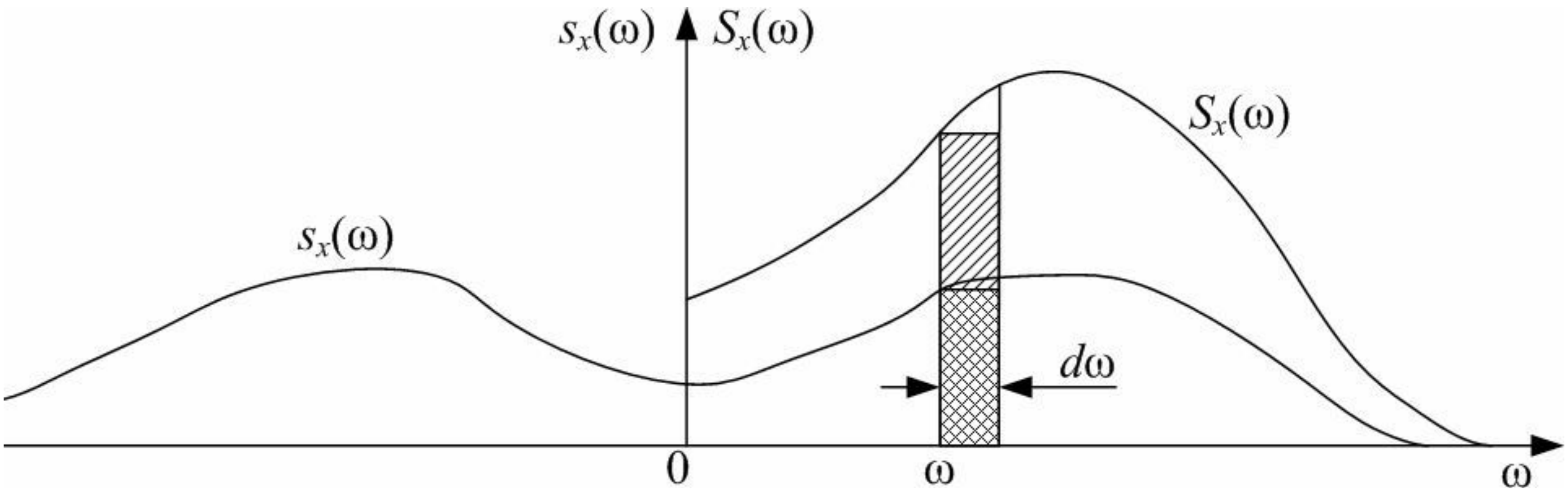
$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} \cdot d\omega$$

Разложение дисперсии

$$D_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) \cdot d\omega \ ;$$

- представляет собой разложение дисперсии *Dx* на сумму элементарных слагаемых $s_x(\omega)d\omega$, каждая из которых представляет собой дисперсию, приходящуюся на элементарный бесконечно малый интервал частот $d\omega$, прилежащей к точке ω при $(-\infty < \omega < \infty)$.

Спектральная плотность стационарного случайного процесса



$$D_x = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cdot d\omega,$$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\omega = 2s_x(\omega),$$

$$R_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} \cdot d\omega.$$

нормированная спектральная плотность

$$s_x^н(\omega) = \frac{\zeta_x(\omega)}{D_x},$$

$$S_x^н(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{D_x}.$$

Свойства спектральной плотности

- Спектральная плотность действительного стационарного случайного процесса является чётной действительной функцией аргумента ω
- Дисперсия действительного стационарного случайного процесса равна интегралу от спектральной плотности этого процесса в бесконечных преде

$$D_x = \int_0^\infty S_x(\omega) \cdot d\omega,$$

- Спектральная плотность стационарного случайного процесса – функция неотрицательная.

Корреляционные функции и спектральные плотности типовых стационарных процессов

- **Белый шум**
- **Формирующий фильтр**
- **Нерегулярная качка**

Белый шум

- Белый шум – это центрированный случайный процесс *X*(*t*) с некоррелированными сечениями.
- корреляционная функция белого шума

$$R_x(t_1,t_2) = G(t)\delta(t_1 - t_2) = R_x(\tau)$$

Белый шум

- Множитель $G(t) = G(t1) = G(t2)$ называется интенсивностью белого шума.
- Если $G(t) = G$ – белый шум стационарный.
- Белый шум – идеализированная случайная функция, реализовать которую на практике невозможно.

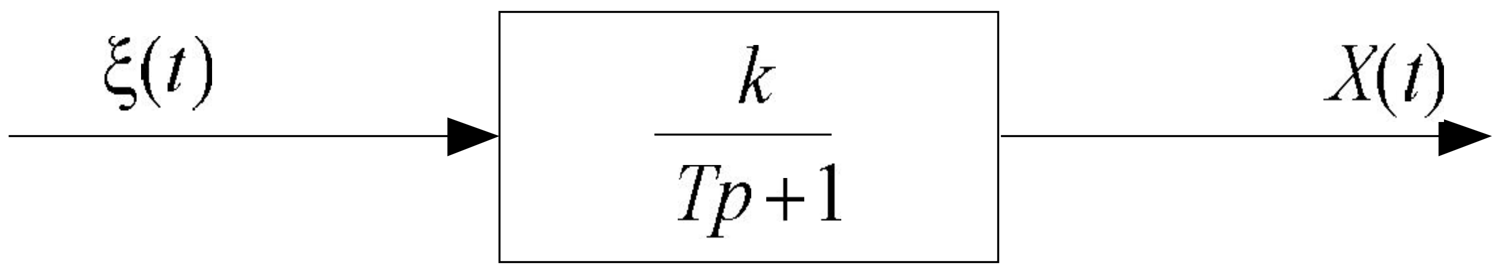
спектральная плотность

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}\cdot d\tau = \frac{G}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau =$$

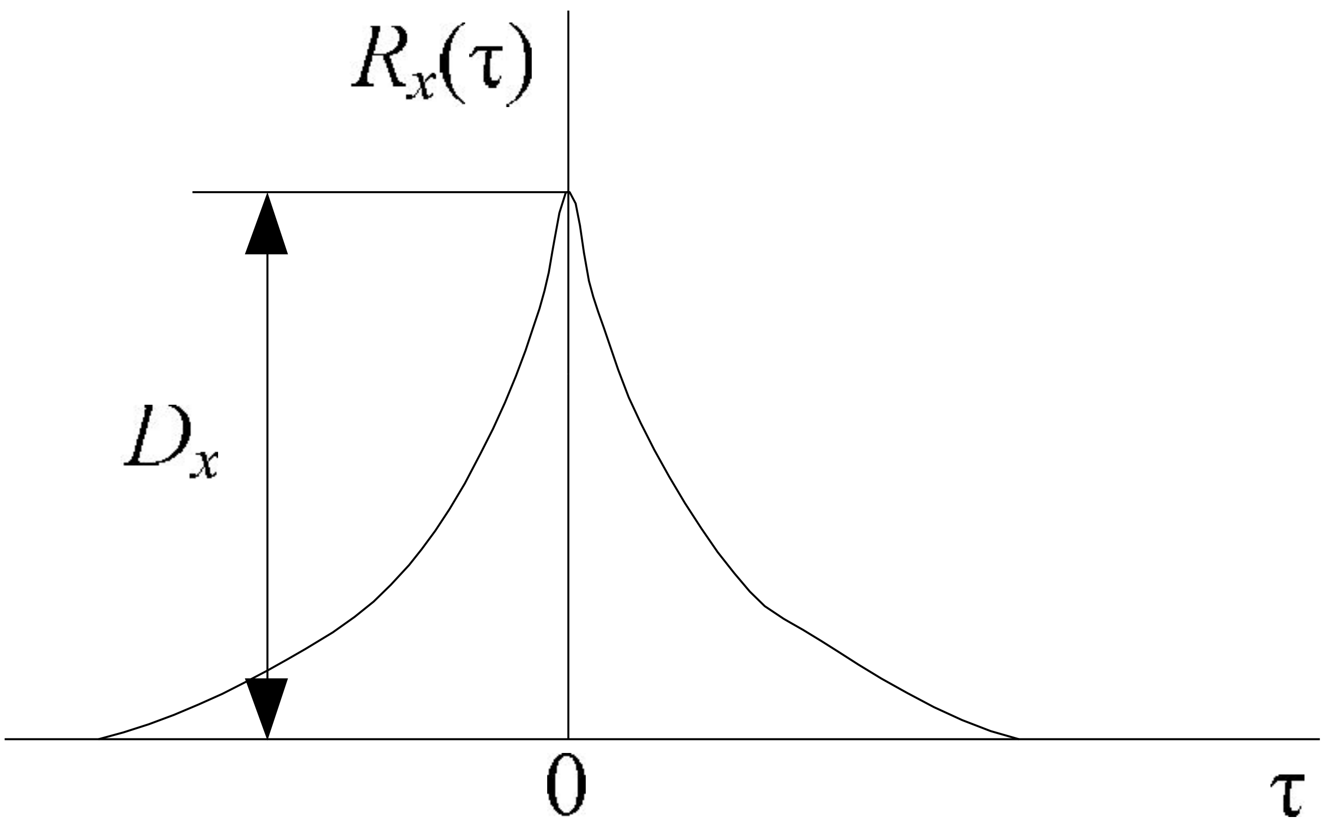
$$= \frac{G}{2\pi}\cdot e^{-j\omega\tau} = \frac{G}{2\pi} = const \Rightarrow G(t) = 2\pi\cdot S(t), \quad при\ \tau = 0$$

Формирующий фильтр

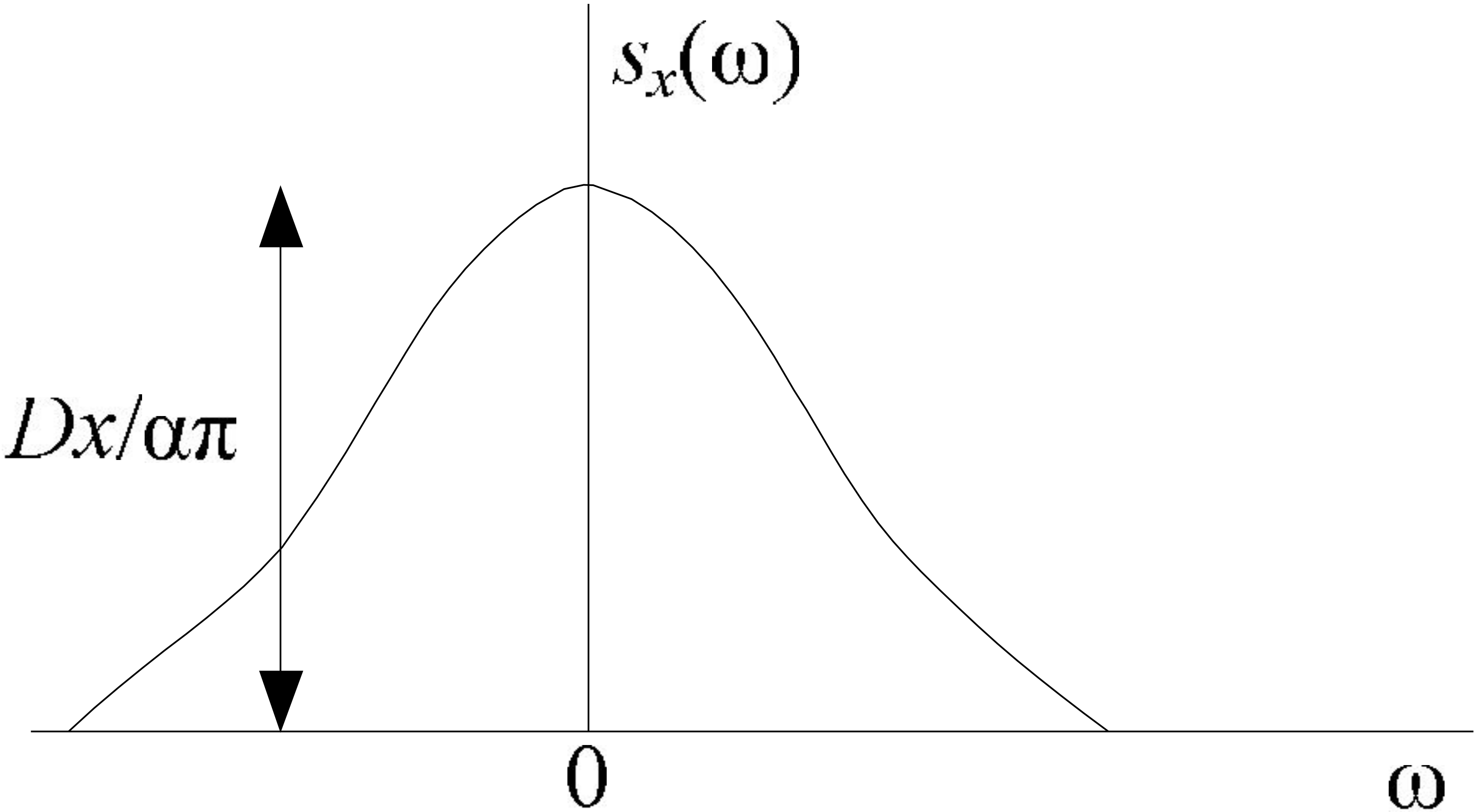
- Из белого шума $\xi(t)$ можно получить случайный процесс с заданными характеристиками, пропуская $\xi(t)$ через апериодическое звено.



Корреляционная функция формирующего фильтра



спектральная плотность формирующего фильтра



Экспоненциальная корреляционная функция

$$R_x(t) = D_x \cdot e^{-\alpha|\tau|}.$$

Спектральная плотность

$$s_x(\omega) = \frac{D_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau,$$

где учтено, что $|\tau| = \begin{cases} \tau & при \quad \tau > 0 \\ -\tau & при \quad \tau < 0 \end{cases}$

$$s_x(\omega) = \frac{D_x}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - j\omega)\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)\tau} d\tau\right] = \frac{D_x}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega}\right) =$$

$$= \frac{D_x}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

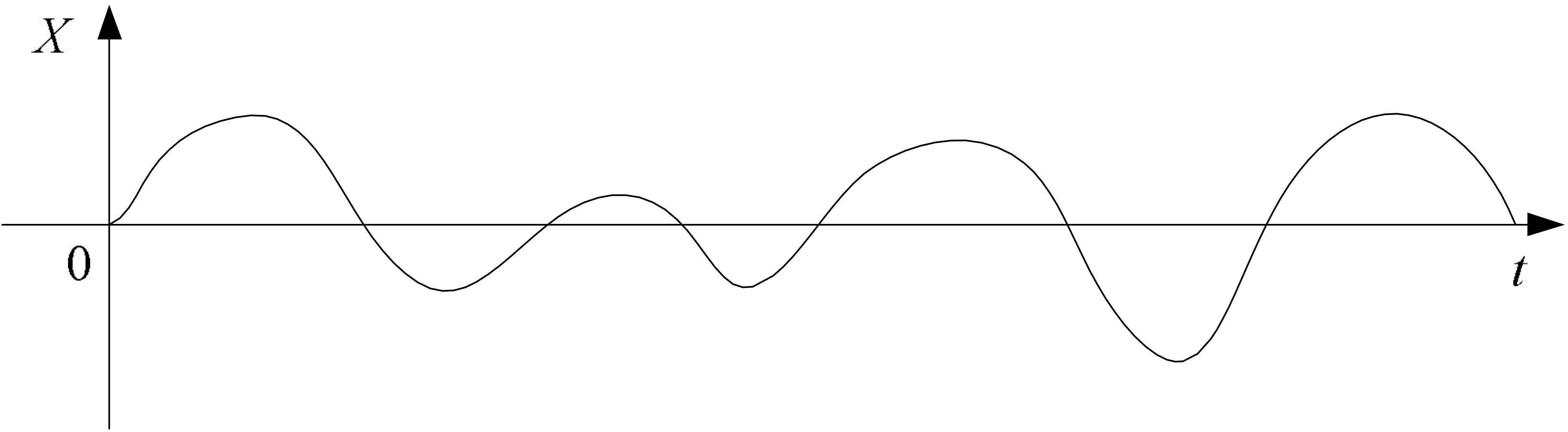
Формирующий фильтр

- При уменьшении параметра α (при возрастании постоянной времени T) корреляционная функция будет убывать медленнее, что соответствует более плавным реализациям случайного процесса $X(t)$.
- Кривая $s_x(\mathrm{w})$ при этом вытягивается вверх, сжимаясь с боков, т.е. повышается удельный вес низких частот.
- При $\alpha \to \infty$ ($T \to 0$) $X(t)$ вырождается в белый шум.

Нерегулярная качка

- Некоторые объекты, например корабли, самолёты, находясь под действием нерегулярных возмущений (волнение моря, турбулентность атмосферы), движутся по случайному закону.
- Получающееся при этом случайное движение объекта называют нерегулярной качкой, в отличие от регулярной качки, представляющей собой периодическое движение.

Нерегулярная качка



Корреляционная функция

$$R_x(\tau) = D_x \cdot e^{-\alpha|\tau|} \cdot \cos\omega_0\tau .$$

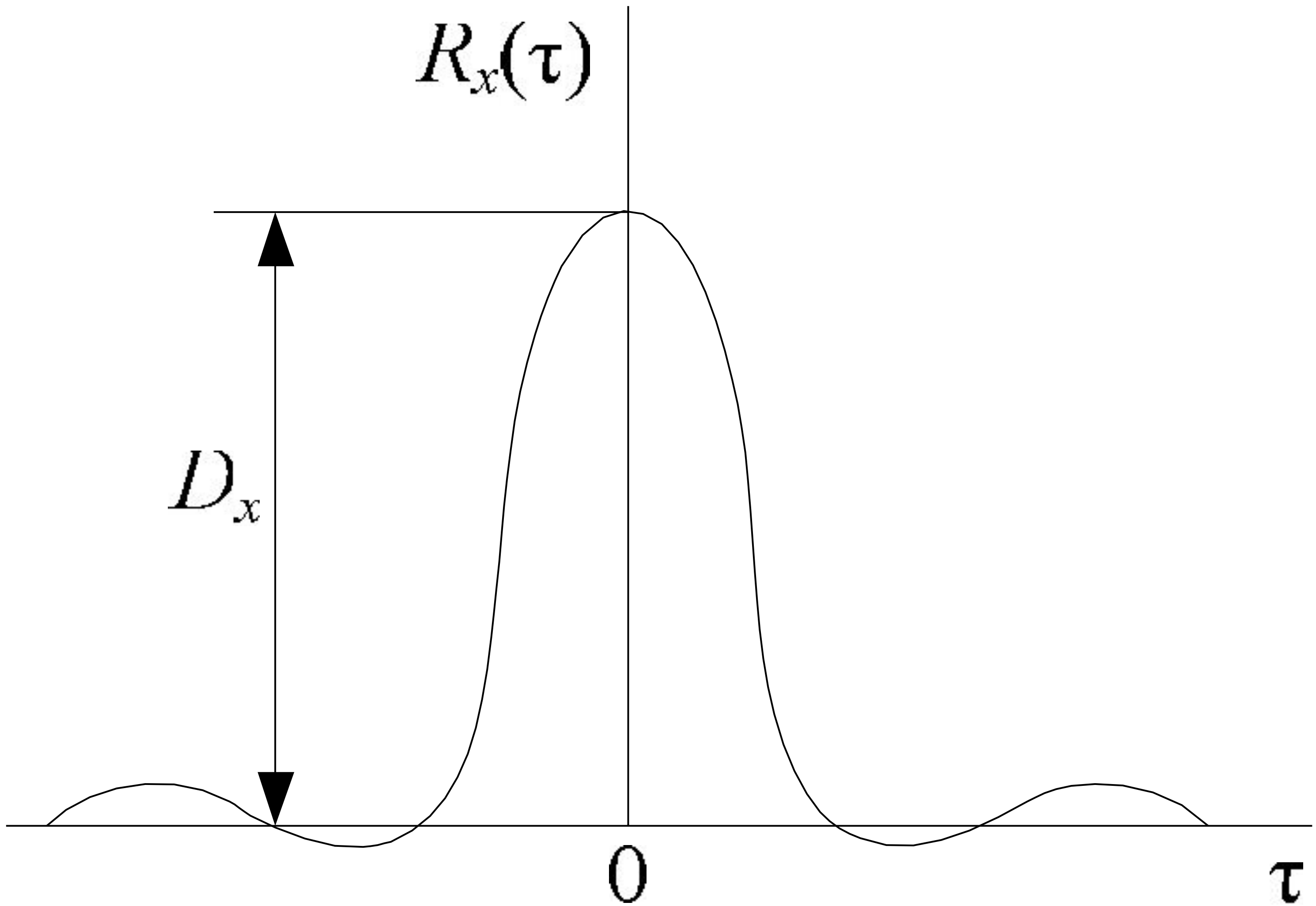
Выражение является экспоненциально-косинусной корреляционной функцией, где ω_0 – резонансная частота, α – параметр затухания, *Dx* – дисперсия.

Спектральная плотность

$$\zeta_x(\omega) = \frac{D_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - j\omega\tau} \cdot \cos\omega_0\tau \cdot d\tau = \frac{D_x}{4\pi}[\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - j\omega + j\omega_0)\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega - j\omega_0)\tau} d\tau +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - j\omega - j\omega_0)\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega + j\omega_0)\tau} d\tau] = \frac{D_x \cdot \alpha}{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\omega_0 - \omega)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega_0 + \omega)^2}\right].$$

Корреляционная функция



Спектральная плотность