НАУКОВО-ДОСЛІДНИЦЬКА РОБОТА

Застосування криволінійних координат для розв'язування задач

Роботу виконав:
Мацицький Артем Олександрович
студент І курсу
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка

Науковий керівник:
Сушко Наталія Анатоліївна
учитель математики
учитель-методист
Полтавського міського багатопрофільного
ліцею №1 імені І.П. Котляревського

Цілі та задачі

- ***Мета роботи:*** вивчення застосування полярної, циліндричної, сферичної систем координат до розв’язування задач.

- ***Об’єкт дослідження:*** полярна, циліндрична, сферична система координат.

- ***Предмет дослідження:*** алгебраїчні та геометричні задачі: рівняння, системи рівнянь, нерівності та теореми.

Постановка задач

- Вивчити особливості введення полярної, циліндричної, сферичної систем координат та їх зв'язок з декартовою системою.

- З’ясувати деякі аспекти використання криволінійних систем координат для оптимізації доведення відомих формул та теорем елементарної математики.

- Встановити можливості використання криволінійних систем координат для розв’язування геометричних та алгебраїчних задач.

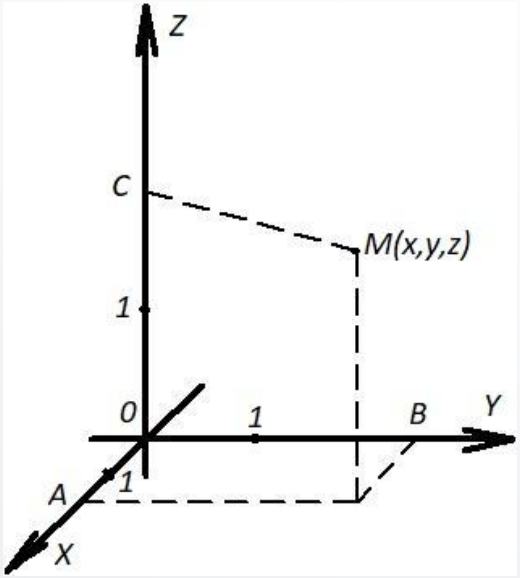
Структура роботи

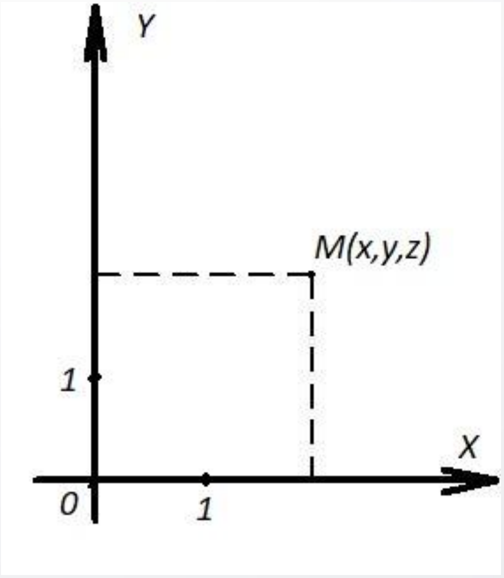
- *Робота складається з трьох розділів – теоретичної частини та практичної.*
- *В першому розділі розглянуто способи встановлення зв’язку між геометричними образами і числами, тобто, метод координат. Він дозволяє конкретному геометричному образу поставити у відповідність його рівняння.*
- *В другому та третьому розділах даної роботи досліджено застосування криволінійних координат для розв’язання деяких задач та доведення теорем методами, відмінних від традиційних.*

Системи координат та координатний метод

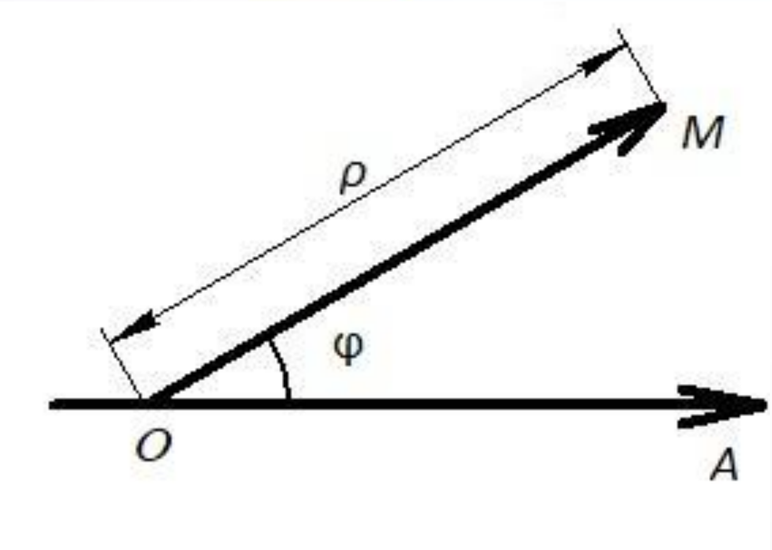
Декартова система координат

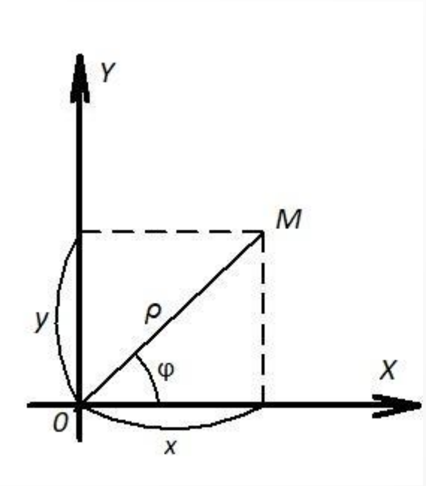
Три взаємно перпендикулярні осі Ox, Oy, Oz, які мають спільний початок точку O і однакову масштабну одиницю, утворюють прямокутну декартову систему координат у просторі. Якщо таких осей дві: Ox і Oy, то маємо систему координат на площині.





Полярні координати





Зв'язок між полярними і декартовими координатами:

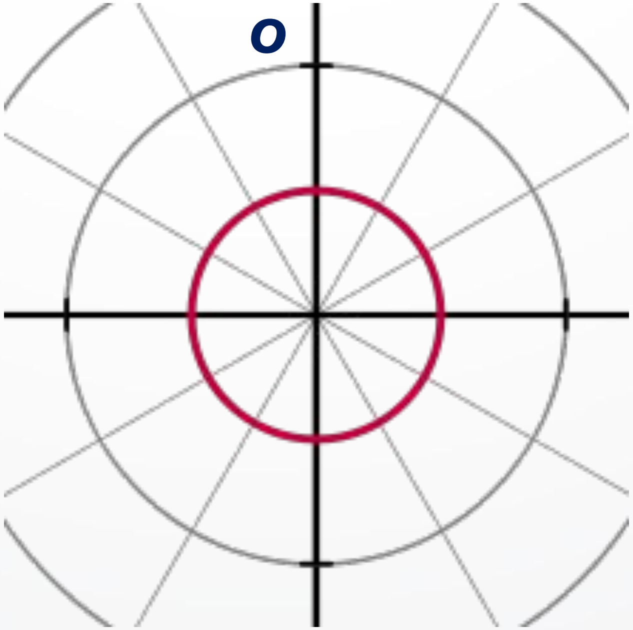
$$x = \rho \cdot \cos\varphi, \quad (1.1) \qquad y = \rho \cdot \sin\varphi \quad (1.2)$$

Відстань між точками у поярній системі координат:

$$|AB| = \sqrt{\rho_A^2 + \rho_B^2 - 2 \cdot \rho_A \cdot \rho_B \cdot \cos(\varphi_A - \varphi_B)} \quad (1.3)$$

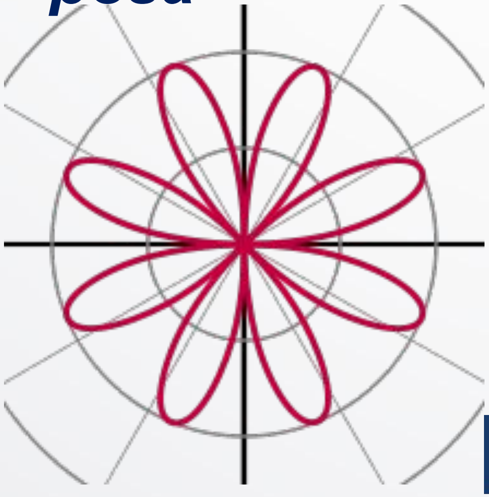
Рівняння кривих у полярних координатах

Коло



$$r^2 - 2 \cdot r \cdot r_0 \cdot \cos(\varphi - \theta) + r_0^2 = a^2$$

Полярна роза



$$r(\varphi) = a \cdot \cos(k \cdot \varphi + \theta_0)$$

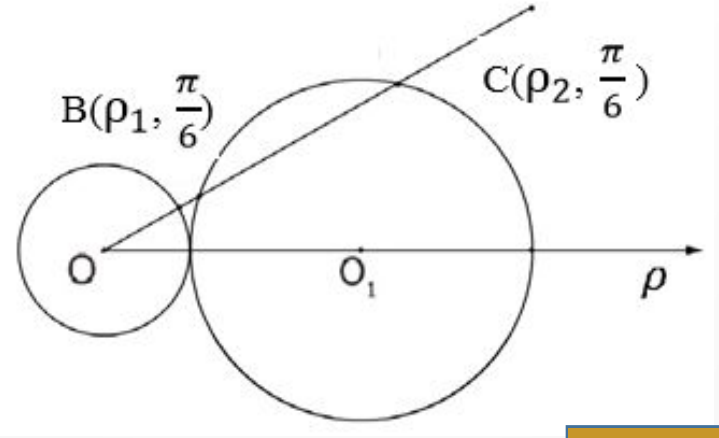
Спіраль Архімеда

$$r(\varphi) = a + b \cdot \varphi$$

Застосування полярної системи координат для розв’язання геометричних задач

Приклад (власний)

Кола радіусом R та 2R ззовні дотикаються. Один із кінців відрізка, що утворює з лінією центрів кіл кут 30^0, співпадає з центром кола меншого радіуса. Знайти, яка частина відрізка лежить всередині більшого кола, якщо відрізок перетинає обидва кола.



Рівняння більшого кола в

декартовій системі: $$(x-3R)^2 + y^2 = 4R^2$$

полярній системі: $$\rho^2 - 3\sqrt{3}R\rho + 5R^2 = 0$$

Використавши теорему Вієта: $$(\rho_1 - \rho_2)^2 = 7$$

А, отже, відстань між точками В і С дорівнює $\sqrt{7}$

Теорема косинусів

Доведення теореми косинусів у шкільному підручнику:

Теорема косинусів

Із першої ознаки рівності трикутників випливає, що дві сторони та кут між ними однозначно визначають трикутник. Отже, за вказаними елементами можна, наприклад, знайти третю сторону трикутника. Як це зробити, показує така теорема.

Теорема (теорема косинусів). *Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін і косинуса кута між ними.*

Доведення. Розглянемо трикутник ABC. Доведемо, наприклад, що

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Можливі три випадки:
1) кут A гострий;
2) кут A тупий;
3) кут A прямий.

Перший випадок. Нехай кут A гострий. Тоді хоча б один із кутів B або C є гострим.

- Нехай $\angle C < 90°$. Проведемо висоту BD. Вона повністю належатиме трикутнику ABC (рис. 1).

У прямокутному трикутнику ABD:

$$BD = AB \cdot \sin A, \quad AD = AB \cdot \cos A.$$

У прямокутному трикутнику BDC: $BC^2 = BD^2 + CD^2 =$

$$= BD^2 + (AC - AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 A + (AC - AB \cdot \cos A)^2 =$$
$$= AB^2 \cdot \sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A + AB^2 \cdot \cos^2 A =$$
$$= AB^2 \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A) + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A =$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

- Нехай $\angle B < 90°$. Проведемо висоту трикутника ABC із вершини C. Вона повністю належатиме трикутнику ABC. Доведення для цього випадку аналогічне розглянутому. Проведіть його самостійно.

Другий випадок. Нехай кут A тупий. Проведемо висоту BD трикутника ABC (рис. 2).

У прямокутному трикутнику ABD: $BD = AB \cdot \sin \angle BAD =$

$$= AB \cdot \sin(180° - \angle BAC) = AB \cdot \sin \angle BAC;$$

$$AD = AB \cdot \cos \angle BAD = AB \cdot \cos(180° - \angle BAC) = -AB \cdot \cos \angle BAC.$$

У прямокутному трикутнику BDC: $BC^2 = BD^2 + CD^2 =$

$$= BD^2 + (AC + AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 \angle BAC + (AC - AB \cdot \cos \angle BAC)^2 =$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC.$$

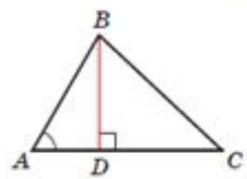


Рис. 1

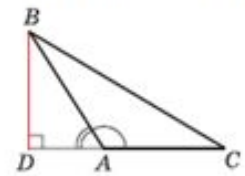


Рис. 2

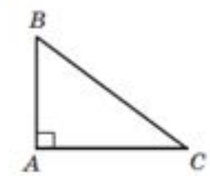


Рис. 3

Третій випадок. Нехай кут A прямий (рис. 3). Тоді $\cos A = 0$. Треба довести, що $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Ця рівність випливає з теореми Піфагора для трикутника ABC. ◄

Доведення теореми косинусів показує, що *теорема Піфагора є окремим випадком теореми косинусів, а теорема косинусів є узагальненням теореми Піфагора.*

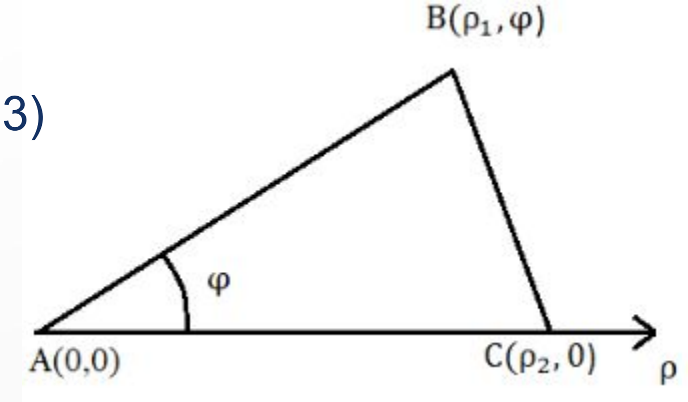
Якщо скористатися позначенням для довжин сторін і величин кутів трикутника ABC (див. форзац), то, наприклад, для сторони, довжина якої дорівнює a, можна записати:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$$

Теорема косинусів

Доведення у полярній системі координат:

$$|\mathrm{BC}| = \sqrt{\rho_B^2 + \rho_C^2 - 2 \cdot \rho_B \cdot \rho_C \cdot \cos(\varphi_B - \varphi_C)}$$ (1.3)



$$|\mathrm{BC}| = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2 \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \cos\varphi_1},$$

$$BC^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2 \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \cos\varphi_1 .$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot cos\angle(AB; AC)$$

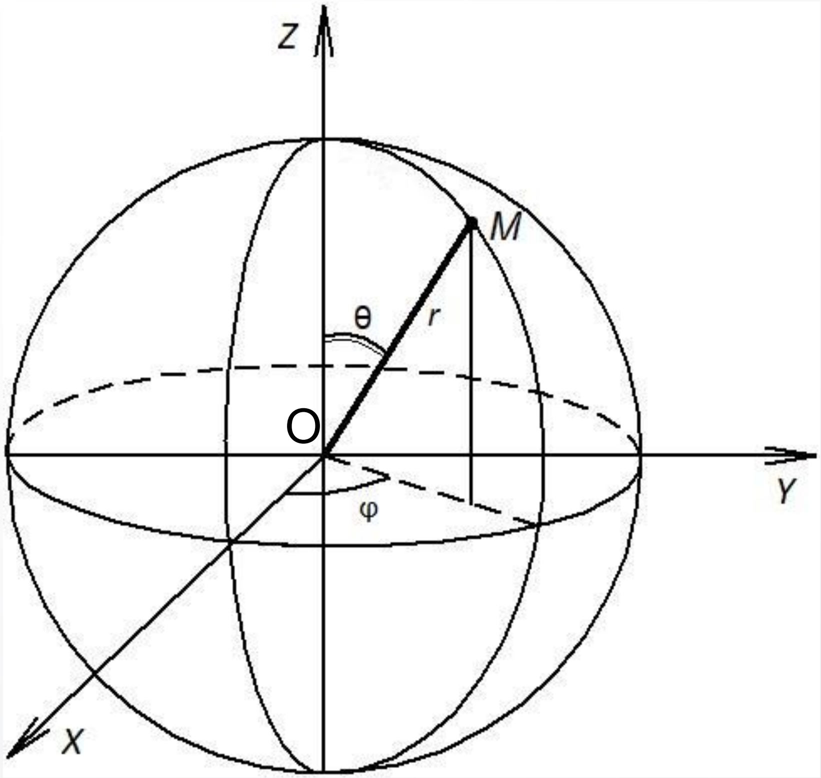
Теорему доведено

Сферичні координати

Зв’язок між сферичними і декартовими координатами:

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi\,; \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi\,; \\ z = r \cdot \cos\theta\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right); \\ \theta = \arccos\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z}}\right. \end{cases}$$



Застосування криволінійних координат для розв'язання задач

Задача(авторська)

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x \cdot y, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9. \end{cases}$$

Застосування сферичних координат

1 Застосуємо перехід до узагальненої сферичної системи координат:

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi\,, \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi\,, \\ x^2 + y^2 = x \cdot y. \end{cases}$$

$$r^2 \cdot sin^2\theta \cdot cos^2\varphi + r^2 \cdot sin^2\theta \cdot sin^2\varphi = r^2 \cdot sin^2\theta \cdot sin\varphi \cdot cos\varphi;$$

$$r^2 \cdot sin^2\theta \cdot (cos^2\varphi + sin^2\varphi - sin\varphi \cdot cos\varphi) = 0;$$

$$\boxed{r^2 \cdot sin^2\theta \cdot \left(1 - \frac{1}{2} sin2\varphi\right) = 0.}$$

2

$$\begin{cases} r = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9. \end{cases}$$

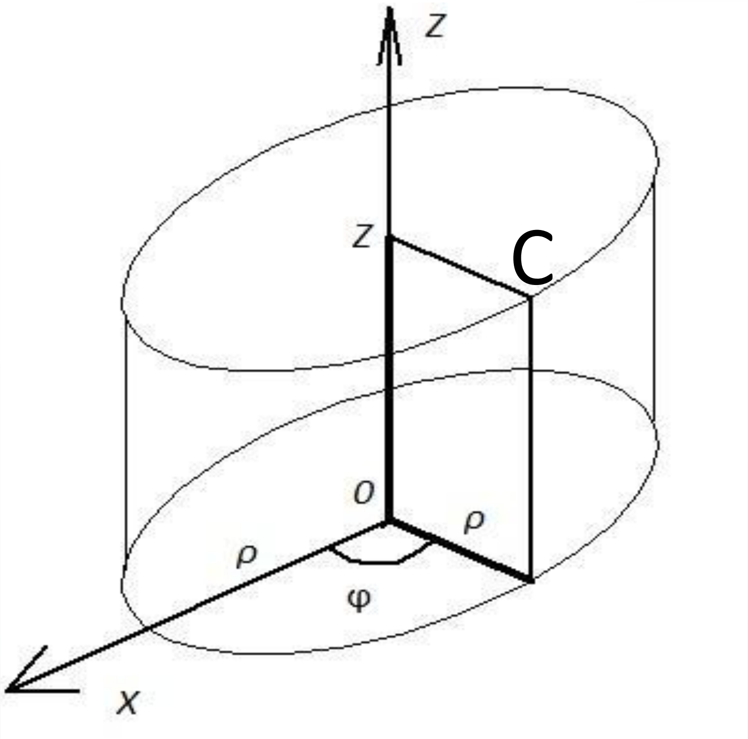
$$\begin{cases} r = \pm 3, \\ \left[\begin{array}{l} r = 0, \\ sin\theta = 0, \\ 1 - \dfrac{1}{2} sin2\varphi = 0; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} r = \pm 3, \\ \left[\begin{array}{l} sin\theta = 0, \\ sin2\varphi = 2; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} r = \pm 3, \\ sin\theta = 0; \end{cases} \Rightarrow \ cos\theta = \pm 1.$$

3

$$\begin{cases} x = \pm 3 \cdot sin\theta \cdot cos\varphi, \\ y = \pm 3 \cdot sin\theta \cdot sin\varphi, \\ z = \pm 3 \cdot cos\theta; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ \left[\begin{array}{l} z = \pm 3(-1); \\ z = \pm 3 \cdot 1; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = \pm 3. \end{cases}$$

Відповідь: $(0; 0; 3)$ або $(0; 0; -3)$.

Циліндричні координати



Зв’язок між циліндричними і декартовими координатами:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi\,, \\ y = \rho \cdot \sin\varphi\,, \\ z = z. \end{cases}$$

Застосування циліндричних координат

Застосуємо перехід до узагальненої циліндричної системи координат:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi, \\ y = \rho \cdot \sin\varphi, \\ z = z; \end{cases}$$

1

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x \cdot y, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9. \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho^2 \cdot cos^2\varphi + \rho^2 \cdot sin^2\varphi = \rho^2 \cdot sin\varphi \cdot cos\varphi, \\ \rho^2 \cdot cos^2\varphi + \rho^2 \cdot sin^2\varphi + z^2 = 9; \end{cases}$$

2

$$\begin{cases} \rho^2 \cdot (1 - sin\varphi \cdot cos\varphi) = 0, \\ \rho^2 \cdot (sin^2\varphi + cos^2\varphi) + z^2 = 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho^2 \cdot sin2\varphi = 0, \\ \rho^2 + z^2 = 9; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \rho = 0, \\ sin2\varphi = 2; \end{array}\right. \\ \rho^2 + z^2 = 9 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \rho = 0, \\ z = \pm 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = \pm 3. \end{cases}}$$

$\Rightarrow$

Відповідь: $(0; 0; 3)$ або $(0; 0; -3)$.

Висновки

- *З’ясовано основні області застосування криволінійних систем координат та їх зв'язок з декартовою системою;*
- *Запропоновано метод розв’язування задач елементарної математики за допомогою переходу в криволінійну систему координат, а саме в полярну, циліндричну, сферичну;*
- *Вказаний метод проілюстровано на конкретних прикладах, частину з яких сформульовано самостійно, в співпраці з науковим керівником.*

Дякую за увагу!